劣モジュラ最適化

京都大学数理解析研究所　岩田 覚

1.　はじめに

有限集合 V 上の集合関数 f は, 任意の $X, Y \subseteq V$ に対して

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

を満たすとき, 劣モジュラ関数と呼ばれる.

劣モジュラ関数は, 離散最適化を始めとする様々な分野で, 基礎的な概念を記述する際にしばしば登場する. 例えば, ネットワークのカット容量関数, マトロイドの階数関数, 多元情報源のエントロピー関数, 協力凸ゲームの特性関数は, いずれも劣モジュラ性を有する. また, スケジューリングや待ち行列といった分野でも劣モジュラ関数を用いた研究が展開されてきた.

エントロピー関数や凸ゲームといった例は, 凸解析との関係を連想させる. 実際, Frank の離散分離定理や Fujishige の Fenchel 型双対定理によって, 劣モジュラ関数と凸関数との類比が示された. さらに, Lovász [16] は, 集合関数の劣モジュラ性が, 適当な方法で拡張された関数の凸性によって特徴付けられることを明らかにした. その結果, 劣モジュラ関数の諸性質は, 離散世界の凸性として明確に理解されるに到った. この方向性は, その後, Dress–Wenzel が提案した付値マトロイドに関する研究と合流し, Murota による離散凸解析の理論に発展している.

2.　劣モジュラ関数の最小化

凸関数最小化が非線型最適化で重要であるように, 劣モジュラ関数最小化は離散最適化において重要な位置を占めている. 劣モジュラ関数最小化の最初の多項式時間アルゴリズムは, Grötschel–Lovász–Schrijver [9] によって与えられた. このアルゴリズムは, 線型計画問題に対する最初の多項式時間アルゴリズムを導いた楕円体法を用いている. しかし, 楕円体法は収束が遅く, 多項式時間アルゴリズムとはいうものの, 実際上も効率的であるとは言い難い.

Cunningham [1, 2] は, マトロイド多面体の分離問題を解く際に現れる特殊な劣モジュラ関数最小化問題に対する組合せ的な強多項式アルゴリズムと, 整数値劣モジュラ関数の最小値を計算する組合せ的な擬多項式時間アルゴリズムを発表した. この手法を出発点として, Iwata–Fleischer–Fujishige [14] と Schrijver [21] が, 劣モジュラ関数最小化の組合せ的な強多項式アルゴリズムを独立に開発した. その後, 加減算と大小比較のみを用いた完全に組合せ的なアルゴリズムの開発 [11] や, 計算量の観点からの改良がなされてきた [5, 12, 18, 15]. また, 対称劣モジュラ関数の最小化に関する組合せ的な強多項式時間アルゴリズムも知られている [20]. これらのアルゴリズムの概要は, [6, 13, 17] に解説されている.

劣モジュラ関数最小化の重要性は, 凸計画との類比によってのみ説明される訳ではない. むしろ, 劣モジュラ最適化の分野自体が, 劣モジュラ関数最小化の効率的な解法の出現を前提として発展して来た面がある. 特に, グラフ, ネットワーク, マトロイドに関する種々の組合せ最適化問題を統合した劣モジュラ流問題 [3] に対して多くの解法が発表されているが, いずれも劣モジュラ関数最小化の効率的な手続きを呼び出す形を取っている. また, ある種の部分集合族の中で劣モジュラ関数の最小値を計算する問題に対しても, 劣モジュラ関数最小化の解法を繰り返し呼び出す形のアルゴリズムが研究されている [8]. さらには, 動的フロー問題 [10] のように, 劣モジュラ関数最小化問題に帰着することによって, 多項式時間解法の存在が示される実用的な組合せ最適化問題もある.

3.　劣モジュラ関数の最大化

劣モジュラ関数の最大化問題も, 古くから研究されてきた離散最適化問題である. 例えば, 最大カット問題が劣モジュラ関数の最大化に帰着できることからも明らかなように, 一般に劣モジュラ関数の最大化問題は NP 困難である. そこで, 劣モジュラ関数の最大化に関しては, 近似アルゴリズムの

研究が行われてきた．特に，Nemhauser–Wolsey–Fisher [19] は，$|X| \leq k$ を満たす部分集合 X のうちで，単調劣モジュラ関数 f の値を最大にするものを見出す問題に対して，貪欲アルゴリズムの結果，最適解の $1 - 1/\mathrm{e}$ 倍以上の関数値を達成する近似解が得られることを示した．

最近では，組合せオークションとの関連で，劣モジュラ関数の最大化が注目されていて，新たな成果が続々と発表されている．中でも，単調性を仮定しない非負劣モジュラ関数の最大化問題に対する 2/5-近似アルゴリズム [4] やマトロイド制約の下での単調劣モジュラ関数最大化問題に対する $(1 - 1/\mathrm{e})$-近似アルゴリズム [23] が興味深い．

4. 劣モジュラ関数の近似

様々な最適化問題に劣モジュラ関数を付加して，近似アルゴリズム設計の可能性を探る試みも始められている [22]．この種の問題設定に対する包括的なアプローチとして，与えられた劣モジュラ関数 f を近似する簡単な劣モジュラ関数を, 多項式回だけの f の関数値評価によって構成することが考えられる．この問題に対して，最大体積楕円体の理論を用いたアルゴリズムが得られている [7].

参考文献

[1] Cunningham, W. H.: Testing membership in matroid polyhedra. *J. Combin. Theory*, Ser. B, **36** (1984), 161–188.

[2] Cunningham, W. H.: On submodular function minimization. *Combinatorica*, **5** (1985), 185–192.

[3] Edmonds, J., and R. Giles: A min-max relation for submodular functions on graphs. *Ann. Discrete Math.*, **1** (1977), 185–204.

[4] Feige, U., V. Mirrokni, and J. Vondrák: Maximizing non-monotone submodular functions, *Proc. 48th FOCS* (2007), 461–471.

[5] Fleischer, L., and S. Iwata: A push-relabel framework for submodular function minimization and applications to parametric optimization, *Discrete Appl. Math.*, **131** (2003), 311–322.

[6] Fujishige, S.: *Submodular Functions and Optimization*, Elsevier, 2005.

[7] Goemans, M. X., N. J. A. Harvey, S. Iwata, and V. Mirrokni: Approximating submodular functions everywhere. *Proc. 20th SODA* (2009).

[8] Goemans, M. X., and V. S. Ramakrishnan: Minimizing submodular functions over families of subsets, *Combinatorica*, **15** (1995), 499–513.

[9] Grötschel, M., L. Lovász, and A. Schrijver: The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, **1** (1981), 169–197.

[10] Hoppe, B., and É. Tardos: The quickest transshipment problem, *Math. Oper. Res.*, **25** (2000), 36–62.

[11] Iwata, S.: A fully combinatorial algorithm for submodular function minimization. *J. Combin. Theory*, Ser. B, **84** (2002), 203–212.

[12] Iwata, S.: A faster scaling algorithm for minimizing submodular functions. *SIAM J. Comput.*, **32** (2003), 833–840.

[13] Iwata, S.: Submodular function minimization. *Math. Programming*, **112** (2008), 45–64.

[14] Iwata, S., L. Fleischer, and S. Fujishige: A combinatorial strongly polynomial algorithm for minimizing submodular functions. *J. ACM*, **48** (2001), 761–777.

[15] Iwata, S., J. B. Orlin: A simple combinatorial algorithm for submodular function minimization. *Proc. 20th SODA* (2009).

[16] Lovász, L.: Submodular functions and convexity. *Mathematical Programming — The State of the Art* (A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte, eds., Springer-Verlag, 1983), 235–257.

[17] McCormick, S. T.: Submodular function minimization. *Discrete Optimization*, (K. Ardal, G. Nemhauser, and R. Weismantel, eds., Elsevier, 2005), 321–391.

[18] Orlin, J. B.: A faster strongly polynomial time algorithm for submodular function minimization. *Math. Programming*, to appear.

[19] Nemhauser, G. L., L. A. Wolsey, and M. L. Fisher: An analysis of approximations for maximizing supermodular set functions I. *Math. Programming*, **14** (1978), 265–294.

[20] Queyranne, M.: Minimizing symmetric submodular functions. *Math. Programming*, **82** (1998), 3–12.

[21] Schrijver, A.: A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time. *J. Combin. Theory*, Ser. B, **80** (2000), 346–355.

[22] Svitkina, Z., and L. Fleischer: Submodular approximation: sampling-based algorithms and lower bounds. *Proc. 49th FOCS* (2008).

[23] Vondrák, J.: Optimal approximation for the submodular welfare problem in the value oracle model. *Proc. 40th STOC* (2008), 67–74.