

# 動的計画法を用いた信号交差点の 期待遅れ時間の厳密評価手法

A dynamics programming approach for exact evaluation  
of the expected delay of signalized arterial roads

戸田 廉 長江 剛志  
Ren Toda Takeshi Nagae

東北大学 工学研究科 技術社会システム専攻  
Graduate School of Engineering, Tohoku University

This study proposes an exact method for evaluating expected delay of signalized arterial roads, taking into account the latent traffic flow theory and stochastic arrival of vehicles to the road section. In the modern variational theory (VT), given an arrival pattern and a signal pattern, evaluation of the delay of a signalized road section can be reduced to a search of the "shortest-path" in a time-space diagram. This implies that a straight-forward evaluation of the expected delay necessitates an enormous path enumeration for every possible arrival patterns. This study reveals that the dynamics programming can decompose the evaluation of an expected delay into a sequence of much smaller subproblems. This enables us to develop an efficient numerical method for evaluating the expected delay without resorting to exhaustive path enumeration.

## 1. 緒言

近年モータリゼーションが進み、自動車は誰もが利用出来る身近な乗り物となっている。しかし、誰もが利用出来るため、朝の出勤・通学や夕方の帰宅時、イベントなどの交通需要が増える場面で交通渋滞が発生してしまうことがよくある。渋滞は自動車の旅行時間の増加に繋がり、その影響として事故の増加や環境汚染物質の増加などを引き起こす。国土交通省 [5] によると 2002 年時点で日本の渋滞損失時間は年間 38 億円であったが、2012 年には年間 50 億時間にも増えており、金額に換算すると 11 兆円に達している。このように渋滞は大きな経済損失を生み出しており、改善すべき大きな社会問題と言える。

こうした渋滞のうち、信号交差点で発生するものを減少させる方法として、近年、新しい信号制御が注目されている [6]。これは、時々刻々と変化する交通量や接近速度をセンサーで検出し、信号現示をリアルタイムで調整するものである。このように信号現示をより適切に制御しようとする取り組みが行われており、信号制御の評価基準の一つとして、既存研究では信号交差点の遅れ時間が利用されている [3][4]。遅れ時間とは車両が渋滞や赤信号で余計にかかってしまう旅行時間の総和であり、実際の旅行時間と自由旅行時間との差で表される。つまり、同じ交通需要でも遅れ時間が小さくなるように信号現示を制御すれば、多くの交通量を流せることになる。

最適な信号制御を行うためには交通需要と信号現示がこの遅れ時間に及ぼす影響を定量的に評価する必要がある。そのためには交通流理論に基づいた遅れ時間の分析が必要である。特に、実際の交通量は確率的・非定常的であるため、これらを考慮した遅れ時間の期待値(期待遅れ時間)の評価が重要となる。

しかし、期待遅れ時間を交通流理論に基づいて計算しようとすると、確率的な到着需要から期待値計算を行うためにその組み合わせは膨大になってしまい、組み合わせ爆発を起こしてしまうため、計算が容易ではない。そこでモンテカルロ法をベースにした期待遅れ時間計算も考えられるが、そもそも期待遅れ

時間の計算は信号パラメータの最適化のための事前計算であることを考えるとこれは効率的ではない。

このように確率的な到着需要を考慮した期待遅れ時間評価法は現在確立されていない。しかし、最適な信号制御をするためには実際の交通量を想定した期待遅れ時間の評価が必要不可欠となる。そこで本研究は確率的な到着需要を考慮した信号交差点の期待遅れ時間評価手法を開発することを目的とする。

## 2. 交通流変分理論に基づく期待遅れ時間評価法

本章では Daganzo[1][2] が提案した交通流変分原理と、それに基づいて和田ら [3][4] が提案した期待遅れ時間評価方法について紹介する。

### 2.1 状況設定

本研究で対象とするのは、複数の信号交差点を含む 1 本の系統信号路線であり、その道路区間は  $x \in [0, L]$ , 制御対象とする時間は  $t \in [0, T]$  とする。道路は Fundamental Diagram(FD) によって特徴付けられ、そのパラメータは、Forward Wave(FW) 速度  $v$ , Backward Wave(BW) 速度  $w$ , 渋滞密度  $k_j$ , 飽和交通流率  $q_{\max}$  である。

### 2.2 交通流変分原理

交通流変分原理 (以降では VT と呼ぶ) の数値解法を概説する。図 1 のように FD を敷き詰めることで FW 速度  $v$  と BK 速度  $-w$  の傾きを持つリンク (FW/BW リンク) により時空間ネットワーク (VT ネットワーク) を構成する。FW/BW リンクは通常リンクと呼び、その集合を  $\mathcal{L}_0$  と表す。FW リンクと BW リンクの交点がノードであり、その集合を  $\mathcal{V}$  と表す。また、信号現示は信号交差点位置の隣り合うノードを結ぶリンク (信号リンク) によって表現され、この集合を  $\mathcal{L}_s$  とする。FD の底辺にあたる時間幅を  $\Delta t$ , FD の高さにあたる空間幅を  $\Delta x$  とする。VT ネットワーク上のノードは  $i = (t, x)$  で表現し、リンクは上流側ノード  $i$  と下流側ノード  $j$  を用いて  $(i, j)$  と表現される。

VT ネットワーク上の各リンクのコストは図 2 のように、移動観測者がリンクに沿った速度で走行したときの累積台数の変化の上限 (相対交通容量) として与えられる。  $c_{ij}$  をリンク

連絡先: 戸田 廉

東北大学工学研究科技術社会システム専攻 長江研究室  
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-816  
Tel,fax:022-795-6987, ren.toda.r5@dc.tohoku.ac.jp

$(i, j)$  のコストとすると, FW リンクでは移動観測者は誰からも追い越されないため,  $c_{ij} = 0$ , BW リンクでは移動観測者は  $\Delta x$  進む間に最大で  $k_j$  の密度を観測するので  $c_{ij} = k_j \Delta x$  と与えられる. 信号リンクのコストは信号現示によって異なる. 赤現示のときは移動観測者は誰からも追い越されないため,  $c_{ij} = 0$ , 青現示のときは速度 0 の移動観測者は  $\Delta t$  の間に最大で  $q_{\max}$  の台数を観測するので  $c_{ij} = q_{\max} \Delta t$  となる.

VT ネットワーク上のノード  $j$  の累積台数  $N_j$  を, 与えられた境界条件の下で求めることを考える. ノード  $j$  から到達可能な境界条件までの経路集合を  $\mathcal{P}_j \ni p$ , 経路  $p$  の起点となる境界ノード  $i(p)$  の累積台数を  $N_{i(p)}$ , 経路  $p$  の経路コストを  $\Delta_{i(p),j}$  とすれば, 実際に実現する累積台数  $N_j$  は, 以下の容量制約を満たさなければならない:

$$N_j \leq N_{i(p)} + \Delta_{i(p),j} \quad \forall p \in \mathcal{P}_j. \quad (1)$$

さらに VT では, この容量制約を満たす累積台数のうち, 最大のものが実現すると仮定する. その結果, 各ノード  $j$  の累積台数  $N_j$  は, そのノードからネットワークを遡って到達可能な境界からの多起点 1 終点の最短経路探索問題に帰着する:

$$\max. N_j \quad \text{s.t.} \quad N_j \leq N_{i(p)} + \Delta_{i(p),j} \quad \forall p \in \mathcal{P}_j \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow N_j = \min_{p \in \mathcal{P}_j} \{N_{i(p)} + \Delta_{i(p),j}\}. \quad (3)$$

さらに, いま, 各境界ノード  $i$  からノード  $j$  までの最短経路コストを  $\Delta_{i,j}$  と書くと, 以上の最短経路問題は, 境界選択問題:

$$N_j = \min_{i \in \Omega_j} \{N_i + \Delta_{i,j}\} \quad (4)$$

と書くこともできる. ここで,  $\Omega_j$  はノード  $j$  から到達可能な境界ノードの集合である.

以上の方法では, 全てのノードの累積台数を求めるために, そのノードの数だけ最短経路問題を解く必要がある. しかし, 図 1 に示すようなダミーノード  $o$  を用意し, ダミーノードから境界条件へのダミーリンクのコストを張り, そのリンクコストを各境界条件が持つ累積台数値とすれば, 全てのノードの累積台数を一括で求める問題は, ダミーノードを起点, 全てのノードを終点とする 1 起点多終点の最短経路探索問題に帰着する.

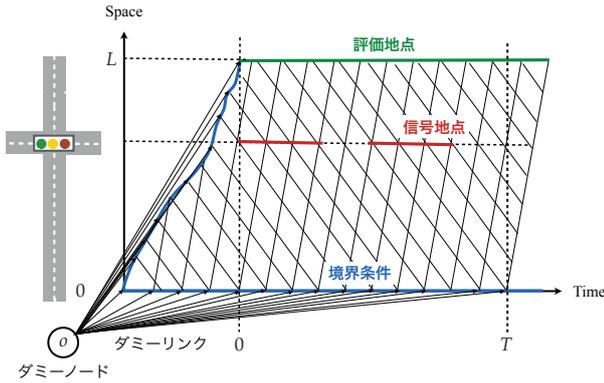


図 1: VT ネットワーク [4]

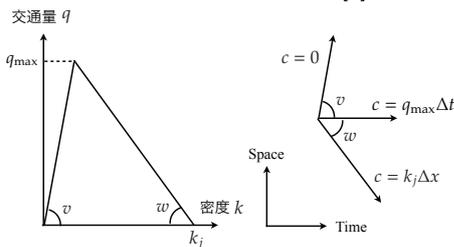


図 2: FD と各リンクの相対交通容量 [4]

## 2.3 確定的な遅れ時間評価方法

VT を用いて系統信号路線の遅れ時間  $D$  を評価する. 以降では簡単のため  $\Delta t = 1$  として議論を進める. 信号パラメータを与件とした道路の総遅れ時間は, 図 3 のように自由旅行時間  $L/v$  だけ下流側に並行移動させた上流端の累積曲線と下流端における累積曲線で囲まれる面積として表すことができる.

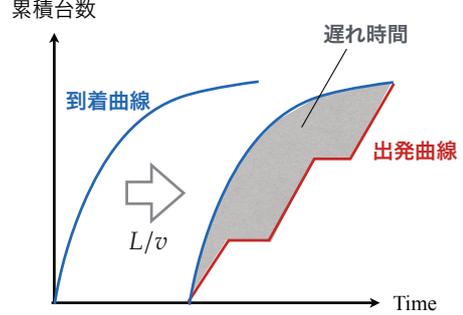


図 3: 遅れ時間の概念図 [4]

つまり, 遅れ時間は,

$$\begin{aligned} D &= \sum_{t \in \mathcal{T}} N(t - L/v, 0) - \sum_{t \in \mathcal{T}} N(t, L) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{V}_{up}} N_i - \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} N_j \end{aligned} \quad (5)$$

と表される. ここで,  $\mathcal{T}$  は  $[0, T]$  を  $\Delta t$  で離散化した時間帯の集合,  $\mathcal{V}_{up}$ ,  $\mathcal{V}_{down}$  はそれぞれ  $\mathcal{T}$  における上流端, 下流端のノード集合である.

この式において上流端の累積台数は境界条件により既知であるため, VT による評価が必要なのは下流端における累積台数のみである. 従って, 確定的な遅れ時間評価問題は以下の線形計画問題として与えられる:

$$D = \sum_{i \in \mathcal{V}_{up}} N_i - \max_N \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} N_j \quad (6)$$

subject to

$$N_j \leq N_i + c_{ij} \quad \forall ij \in \mathcal{L}_0 \quad (7)$$

$$N_j \leq N_i + q_{\max} \cdot s_{ij} \quad \forall ij \in \mathcal{L}_s \quad (8)$$

$$N_0 = 0. \quad (9)$$

すなわち, 1 起点多終点の最短経路問題を解くことで遅れ時間を求めることができる.

## 2.4 期待遅れ時間評価方法

時刻  $t - L/v$  から  $t - L/v + \Delta t$  の間に上流端に到着する到着台数を確率変数  $\varepsilon_t$  で表現する. この確率変数  $\varepsilon_t$  は, 平均到着率パラメータ  $\lambda$  を持つポアソン分布に従うとする. 従って, 時刻  $t = k\Delta t - L/v$  までに上流端に到着する累積台数は  $\sum_{t=0}^{k-1} \varepsilon_t$  と表現される. このとき, 上流端の境界条件が全て確率変数となるため, VT ネットワークの各ノード  $i$  の累積台数および遅れ時間も, それぞれ, 確率変数  $\tilde{N}_i$ ,  $\tilde{D}$  となる. そして, 期待遅れ時間は, 以下のように表現される:

$$\begin{aligned} E[\tilde{D}] &= E \left[ \sum_{k \in \mathcal{V}_{up}} \tilde{N}_k - \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} \tilde{N}_j \right] \\ &= \sum_{k \in \mathcal{V}_{up}} E[\tilde{N}_k] - \sum_{j \in \mathcal{V}_{down}} E[\tilde{N}_j]. \end{aligned} \quad (10)$$

よって, 期待遅れ時間を求めることは, VT ネットワークにおける上流端と下流端の各ノードの累積台数の期待値を求めることに帰着される.

このうち、各上流端ノードの累積台数の期待値は  $\sum_{t=0}^{k-1} \varepsilon_t$  の分布から容易に求められる。つまり、各確率変数  $\varepsilon_t$  がポアソン分布に従うため、その和もポアソン分布である:

$$E[\tilde{N}_k] = E\left[\sum_{t=0}^{k-1} \varepsilon_t\right] = \lambda k \quad \forall k \in \mathcal{V}_{up}. \quad (11)$$

一方、各下流端ノードの累積台数の期待値は、以下の確率的な最短経路問題の期待最小費用を求める問題として表される:

$$E[\tilde{N}_j] = E\left[\min_{k \in \Omega_j} \left\{ \sum_{t=0}^{k-t} \varepsilon_t + \Delta_{k,j} \right\}\right] \quad \forall j \in \mathcal{V}_{down}. \quad (12)$$

しかし、この問題 (12) を厳密に計算するには確率変数  $\varepsilon_t$  による場合分けと最小値計算が必要であり、時点が進むほどその組み合わせは指数関数的に増加し、組み合わせ爆発を起こしてしまうという課題がある。

### 3. 提案手法

本章では問題 (12) を実際の問題サイズでも組み合わせ爆発することなく計算できるような手法を提案する。3.1 節では組み合わせそのものを削減する手法を開発する。3.2 節では動的計画法の考え方をを用いることで問題 (12) が時刻について分解できることを示し、組み合わせを全列挙せずに求解する手法を開発する。

#### 3.1 組み合わせの削減

$\varepsilon_t$  がとりうる値の数を  $n$  とすると、問題 (12) の厳密計算では  $n^j$  個の項 (組み合わせ) が現れる。このうち  $j$  の値は到着需要の計測時間によって変化するが、 $n$  の値は設定する  $\Delta t$  の値によって任意の値 ( $n \geq 2$ ) に設定できる。そこで、本節では  $n$  の値が最小の  $n = 2$  となるように  $\varepsilon_t$  の値を 0 と 1 に制限し、組み合わせを減らす。

具体的には、 $\Delta t = 1/q_{\max}$  となるように  $\Delta t$  の値を設定すれば単位時間 ( $\Delta t$ ) あたりの飽和交通流率は  $q_{\max} = 1$  となる。 $\varepsilon_t$  は上流端の容量制約  $\varepsilon_t \leq q_{\max}$  を満たしているから以下のように 2 通りの値をとる確率変数に制限できる:

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } p) \\ 0 & (\text{確率 } 1-p) \end{cases}. \quad (13)$$

#### 3.2 動的計画法

##### 3.2.1 漸化式

本節では問題 (12) を時刻について分解して考えるために、漸化式を用いる。また、本節では簡単のため、下流端ノード  $j$  を固定して考える。漸化式を用いるために、問題 (12) に関連して、新たな目的関数  $n_k$  と状態変数  $m_k$  を以下のように定義する:

$$n_k = \min_{k' \leq k} m_{k'} \quad (14)$$

$$m_k = \sum_{t=0}^{k-t} \varepsilon_t + \Delta_{k,j}. \quad (15)$$

3.1 節で  $q_{\max}$  を  $1[\text{veh}/\Delta t]$  としたから、信号が青現示のときの信号リンクのコストは  $c_{ij} = q_{\max} \Delta t = 1$  となる。また、VT ネットワークの構造から、ある上流端ノード  $k-1$  を起点としてある下流端ノード  $j$  に向かう最短経路が、より遅い時間の上流端ノード  $k$  からの最短経路に合流するためには、必ず信号リンクを 1 度多く通過する必要がある [3]。この差分の信号リ

ンクを  $(k, j)$  の差分信号リンクと定義すると、最短経路コストの差がとりうる値は、 $(k, j)$  の差分信号リンクの現示によって

$$\Delta_{k-1,j} - \Delta_{k,j} = \begin{cases} 0 & (\text{赤現示}) \\ 1 & (\text{青現示}) \end{cases} \quad (16)$$

と表すことができる。すると (13), (15), (16) 式から以下の漸化式が導かれる:

$(k, j)$  の差分信号リンクが赤現示のとき

$$m_k = \begin{cases} m_{k-1} + 1 & (\varepsilon_t = 1) \\ m_{k-1} & (\varepsilon_t = 0) \end{cases} \quad (17)$$

$(k, j)$  の差分信号リンクが青現示のとき

$$m_k = \begin{cases} m_{k-1} & (\varepsilon_t = 1) \\ m_{k-1} - 1 & (\varepsilon_t = 0). \end{cases} \quad (18)$$

##### 3.2.2 期待最小費用の計算手法

以下に提案する  $E[\tilde{N}_j]$  の計算アルゴリズムを示す。

**Step1** 上流端ノード  $k = 0 \sim j$  から下流端ノード  $j$  までの最短経路を求め、上流端ノード  $k = 0$  から下流端ノード  $j$  までの最短経路における青リンクの数を初期値  $n_0, m_0$  とする。このとき  $k = 0$  における初期状態を  $S_0 = \{(n = n_0, m = m_0)\}$  と定義する。また、全ての  $(k, j)$  について差分信号リンクの現示を求める。

**Step2**  $k = 0$  から  $k = j$  まで順に (14), (17), (18) 式から導かれる以下の式に従って  $S_k = \{(n = n_k, m = m_k)\}$  の状態遷移木を構築する:

$(k, j)$  の差分信号リンクが赤現示のとき

$$S_k = \begin{cases} \{(n, m + 1)\} & (\varepsilon_t = 1) \\ \{(n, m)\} & (\varepsilon_t = 0) \end{cases} \quad \forall (n, m) \in S_{k-1} \quad (19)$$

$(k, j)$  の差分信号リンクが青現示のとき

$$S_k = \begin{cases} \{(n, m)\} & (\varepsilon_t = 1) \\ \{(n, m - 1)\} & (\varepsilon_t = 0, n \neq m) \\ \{(n - 1, m - 1)\} & (\varepsilon_t = 0, n = m) \end{cases} \quad \forall (n, m) \in S_{k-1}. \quad (20)$$

**Step3**  $k = 0$  における初期状態の生起確率を  $P_{0,n_0,m_0} = 1$  とし、 $k = 0$  から  $k = j$  まで順に (19), (20) 式から導かれる以下の式に従って各状態の生起確率  $P_{k,n,m}$  を求める。ただし、状態遷移関が存在しない項の確率は 0 とする。

$(k, j)$  の差分信号リンクが赤現示のとき

$$P_{k,n,m} = (1-p)P_{k-1,n,m} + pP_{k-1,n,m-1} \quad (21)$$

$(k, j)$  の差分信号リンクが青現示のとき

$$P_{k,n,m} = \begin{cases} (1-p)P_{k-1,n,m+1} + pP_{k-1,n,m} & (n \neq m) \\ (1-p)\{P_{k-1,n,m+1} + P_{k-1,n+1,m+1}\} \\ \quad + pP_{k-1,n,m} & (n = m). \end{cases} \quad (22)$$

**Step4**  $k = j$  における全ての状態  $S_j$  について

$$E[\tilde{N}_j] = \sum_{(n,m) \in S_j} n P_{j,n,m} \quad (23)$$

より  $E[\tilde{N}_j]$  を求めることができる。

## 4. 数値計算

### 4.1 対象ネットワーク

最後に本手法の適用例を示す。150m 離れた 2 つの信号交差点を含む道路区間を考え、図 4~7 に示す 4 つの信号パターンについてそれぞれ、提案手法を用いて期待遅れ時間を評価する。VT および信号サイクルを特徴付けるパラメータには、表 1 に示すものを用いる。また、初期状態は道路に全く車両がないものとする。

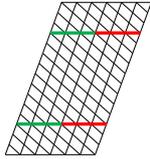


図 4: ケース 1

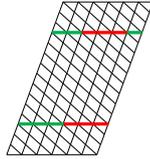


図 5: ケース 2

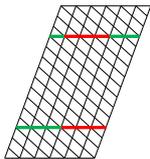


図 6: ケース 3

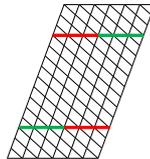


図 7: ケース 4

表 1: 計算パラメータ

FW 速度 $v$	30[km/s]
BK 速度 $w$	15[km/s]
飽和交通流量 $q_{max}$	600[veh/h]
平均到達流率 $\lambda$	0.7
到着需要予測期間	72[s]
サイクル長	36[s]
スプリット	50[%]

### 4.2 計算結果と考察

数値計算により得られた累積台数を図 8~11 に、求められた期待遅れ時間を表 2 に示す。図の青線は上流端に到着した累積台数を表す到着曲線であり、赤線は下流端から出発する累積台数を表す出発曲線である。また、図は到着曲線を自由旅行時間だけ下流側に平行移動させたものを表しており、到着曲線と出発曲線で囲まれた灰色の範囲の面積が期待総遅れ時間を表している。

ケース 1 の信号パターンが最も期待総遅れ時間が小さく、次いでケース 2, 3 と期待遅れ時間が増加し、ケース 4 の信号パターンが最も期待総遅れ時間が大きくなることが判った。ケース 1 が最善であった理由としては非飽和状態であれば第 1 信号を通過した車両は全て停止することなく第 2 信号も通過できるため、赤信号によって待ち行列が延伸しにくいということが考えられる。信号制御パターンをケース 2, 3, 4 の順に変えていくと、少なくとも 1 回は赤信号で停止する必要がある車両の台数が増え、待ち行列が延伸しやすくなるため、この順に期待遅れ時間が大きくなっていったと考えられる。

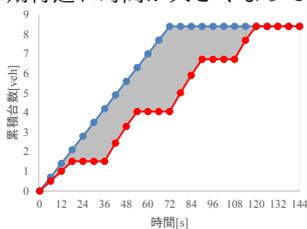


図 8: ケース 1 の累積台数

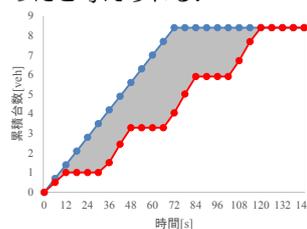


図 9: ケース 2 の累積台数

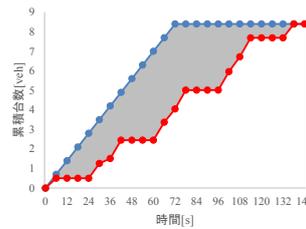


図 10: ケース 3 の累積台数

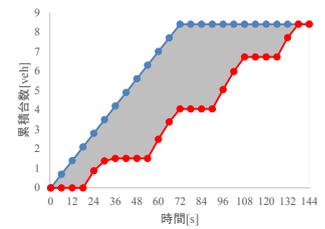


図 11: ケース 4 の累積台数

表 2: 各ケースにおける期待遅れ時間

ケース	期待総遅れ時間	1 台あたりの期待遅れ時間
1	230[veh·s]	27[s]
2	267[veh·s]	32[s]
3	314[veh·s]	37[s]
4	371[veh·s]	44[s]

## 5. 結言

本研究では確率的な到着需要を考慮した、信号交差点の期待遅れ時間評価手法を開発した。具体的には、VT ネットワークの時間幅を調節することで問題 (12) で表される期待最小費用を求める問題の組み合わせを削減した。また、新たな目的関数及び状態変数を導入し、漸化式で表現することで期待最小費用を時刻について分解して考えられることを示した。そして、前の時点の計算結果を用い、各時点で逐次計算することによって全ての組み合わせを列挙することなく期待最小費用を求めることができ、期待遅れ時間を評価することが可能となった。

今後の課題としてはまず、より大きな VT ネットワークでの計算を行い、和田らの既存研究 [3] と解の精度及び計算速度を比較することで提案手法の優位性を検証することが挙げられる。また、期待遅れ時間の評価に基づいた信号パラメータの最適化手法を開発していきたい。

## 参考文献

- [1] Carlos F. Daganzo, A variational formulation of kinematic waves: basic theory and complex boundary conditions, Transportation Research Part B Vol.39 No.2 pp.187-196, 2005.
- [2] Carlos F. Daganzo, A variational formulation of kinematic waves: Solution method, Transportation Research Part B Vol.39 No.10 pp.934-950, 2005.
- [3] 和田健太郎・白井健人・大口敬・井科(浅野)美帆, 交通流の変分原理に基づく信号路線の期待遅れ評価法, 土木計画学研究発表会, 2016.
- [4] 和田健太郎・白井健人・柳沼秀樹, Cross-Entropy 法に基づく待ち行列の延伸を考慮した交通信号群の最適化, 土木学会論文集 D3(土木計画学) 71(5) I.1055-I.1064, 2015.
- [5] 国土交通省, 都市圏の交通渋滞対策 -都市再生のための道路整備-, 平成 13 年度~平成 14 年度プログラム評価書, 2003.
- [6] 日産自動車, ITS を活用した交通渋滞の緩和に向けた活動 [Online], <http://www.nissan-global.com/JP/ENVIRONMENT/SOCIAL/ITS/PDF/ITS.pdf>, accessed 2017-02-20.