4C1-4

相対的制約を扱うマッチングメカニズムの提案と評価

Evaluation of matching mechanisms under relative distributional constraints

八尋 健太郎 *1 Kentaro Yahiro
濱田 直斗 *2 Naoto Hamada
鈴木 貴晶 *2 Takamasa Suzuki
櫻井 祐子 *2 Yuko Sakurai
横尾 真 *2 Makoto Yokoo

*1 九州大学 工学部 電気情報工学科
Department of Electrical Engineering and Computer Science, School of Engineering, Kyushu University

*2 九州大学 システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

This paper considers many-to-one matching problems (e.g. matching students to schools) with distributional constraints. We study a problem where distributional constraints are imposed in relative terms. In standard settings, distributional constraints are often imposed in absolute terms, e.g., maximum quota of a school. However, there are many real-life situations where distributional constraints are expressed with relative terms such as ratio or proportion. As far as we are aware of, there is very limited literature addressing such kind of constraints. In this paper, we define the matching problems with relative distributional constraints and introduce a new *quota reduction mechanism* that works under the setting. We theoretically show that our mechanism satisfies fairness and strategyproofness, and by comparing with an artificial cap mechanism via simulation experiments, we further illustrate that our mechanism has an advantage in terms of efficiency.

1. 序論

学生と学校，研修医と病院のような二種類のエージェント間の望ましい組合せについて考える問題はマッチング問題と呼ばれ，Gale と Shapley [Gale 62] により初めて定式化された．彼らによる提唱以降，マッチング問題における理論的性質の分析や現実的なモデルへの応用は，経済学，人工知能，マルチエージェントシステムの分野で広く論じられている．

マッチング理論を基にした公的な制度として，学生に入学する学校を選択する機会を与える学校選択制が存在する [安田 10]．市町村教育委員会が学生の居住区を基に公立校への学生の割当を決定することが一般的であるが，学校選択制を採用することで，学生が自由に自身の望む学校に進学する機会を得ることができる．学校選択制の適用にあたり，想定され得る現実的な制約下において学生を学校に割り当てる学校選択問題を考察することは有意義だといえる．

学校選択問題においては，割り当てられる学生の人数が個別の学校の定員数以下となることを保証する上限制約が一般的に存在する．例えば，日本の東京 23 区が採用している制度において，各学校の受け入れ学生数の上限は東京都教育委員会が各通学区域内の学生数を調査した上で定められている [安田 10]．学校選択問題に限らず広くマッチング問題において，割り当てられる学生数の上限といった絶対的な値を制約として用いる状況は活発に議論されている [Fragiadakis 16]．

しかし，制約として相対的な値を考慮する状況も存在する．文献 [Nguyen 17] では以下の実例を挙げている．1989 年，ニューヨーク州ホワイトプレインズの学校では，黒人とヒスパニックとそれ以外の人々 (アジア人や白人など) を各学校でほぼ同じ割合で受け入れ，かつ，各学校との割合の差を 5%以内にするという制約が存在した．

現実のマッチング問題ではこのような相対的制約を考慮する状況が数多く存在するが，実際に相対的制約を扱っている既存研究は少ない．そのため，相対的制約が課された際に既存研究の成果を用いる場合には，相対的制約から絶対的制約を適切に設定する必要がある．しかし，学校選択制を利用する学生の総数が事前に把握できない状況などにおいては，絶対的制約の適切な設定は困難である．

本稿ではこのような相対的制約下における学校選択問題について考察する．本稿では相対的制約の一つとして，割当数が最大の学校と最小の学校の割当数の比率の制御を行う，$ratio$ と呼ばれる値を用いた制約を導入する．より具体的には，$ratio$ は「割当数が最大の学校の割当数」に対する「割当数が最小の学校の割当数」の比率の下限値を表す．

本稿ではまず，$ratio$ による制約下において公平性，戦略的操作不可能性を満たす既存メカニズムである Artificial Cap Deferred Acceptance メカニズム (ACDA) を紹介する．ACDA は Artificial Cap (AC) と呼ばれる人為的な各学校の定員を設けることにより，Deferred Acceptance メカニズム (DA) を実行するメカニズムである．そして，ACDA は非浪費性の観点で効率的でないことを具体例をもって示す．次に，$ratio$ による制約下において公平性，戦略的操作不可能性を満たす Quota Reduction Deferred Acceptance メカニズム (QRDA) を提案する．QRDA は絶対的制約を設定する必要がない柔軟なメカニズムである．最後に，QRDA は ACDA より学生の満足度が高いことを理論的に示し，さらに ACDA より非浪費性の観点で優れていることを計算機実験により示す．

2. モデル

$ratio$ による制約下における学校選択問題のインスタンスは $(S, C, X, \succ_S, \succ_C, ratio)$ の組で定義される．$S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ は n 人の学生の集合，$C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ は m 校の学校の集合である．$X = S \times C$ は契約の集合であり，契約 $(s, c) \in X$ は学生 s が学校 c に割り当てられることを意味する．$X' \subseteq X$ となる X' に関して，X'_s は $\{(s, c) \in X' \mid c \in C\}$ を，X'_c

連絡先: 八尋 健太郎，九州大学工学部電気情報工学科，812-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，yahiro@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

は $\{(s,c) \in X' \mid s \in S\}$ を意味する．$\succ_S = (\succ_{s_1}, \ldots, \succ_{s_n})$ は学生が持つ選好順序であり，$\succ_s$ は学生 s にとっての全学校に対する厳密な選好を意味する．例えば，学生 s が厳密に学校 c' よりも学校 c を好む場合，$(s,c) \succ_s (s,c')$ と表す．$\succ_C = (\succ_{c_1}, \ldots, \succ_{c_m})$ は学校が持つ優先順序であり，$\succ_c$ は学校 c にとっての全学生に対する厳密な選好を意味する．例えば，学校 c が厳密に学生 s' よりも学生 s を好む場合，$(s,c) \succ_c (s',c)$ と表す．$ratio$ は学校の割当数に関する相対的な値で，「割当数が最大の学校の割当数」に対する「割当数が最小の学校の割当数」の比率の下限値を表す．値が大きいほど割当数の最大値，最小値の差が小さく，割当数の分散を抑える目的で用いられる．

ここで，関数 $\mu : 2^X \to \mathbb{Z}$ を定義する．$X' \subseteq X$ となる X' に関して，$\mu(X')$ は任意の $c \in C \setminus \{c'\}$ について $|X'_{c'}| \leq |X'_c|$ を満たす $c' \in C$ の割当数 $|X'_{c'}|$ を返す．同様に，$\nu : 2^X \to \mathbb{Z}$ を，任意の $c \in C \setminus \{c'\}$ について $|X'_{c'}| \geq |X'_c|$ を満たす c' の割当数 $|X'_{c'}|$ を返す関数として定義する．この二つの関数を用いて，$r : 2^X \to [0,1]$ を $r(X') = \mu(X') / \nu(X')$ として定義する．$r(X')$ は，$X' \subseteq X$ における「割当数が最大の学校の割当数」に対する「割当数が最小の学校の割当数」の比率を返す．以上の定義を用いて，$|X'| = n$ かつ $r(X') \geq ratio$ が成り立つとき，X' は**学校側実現可能**であるという．また，任意の $s \in S$ について $|X'_s| = 1$ が成り立つとき，X' は**学生側実現可能**であるという．X' が学生側実現可能かつ学校側実現可能であるとき，X' は**実現可能**であるという [*1]．実現可能な契約の集合を，特に**マッチング**と呼ぶ [*2]．また，$\succ_S$ を入力としてマッチングを出力する手続きを**メカニズム**と呼ぶ．メカニズム φ により $\succ_S$ を入力として得られたマッチングを $\varphi(\succ_S)$ と表し，$\varphi_s(\succ_S)$ を $\{(s,c) \in \varphi(\succ_S) \mid c \in C\}$ とする．

以降では，ある二つの要素数 m のベクトル $\zeta, \zeta' \in \mathbb{Z}^m$ に関して，任意の $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ について $\zeta_i \leq \zeta'_i$ であるとき $\zeta \leq \zeta'$ と表す．また，ある二つのマッチング $X', X'' \subseteq X$ と学生 $s \in S$ について $X'_s = \{x'\}$, $X''_s = \{x''\}$ かつ $x' \succ_s x''$ が成り立つとき，$X'_s \succ_s X''_s$ と表し，特に，$X'_s \succ_s X''_s$ または $X'_s = X''_s$ であるとき $X'_s \succeq_s X''_s$ と表す．さらに，s 以外の学生の選好順序を $\succ_{-s}$ として表し，$\succ_S = (\succ_s, \succ_{-s})$ とする．

以下，メカニズムやマッチングに望まれる性質を定義する．

定義 1 (公平性) マッチング X' に対し，学生 s が他の学生 s' $(\neq s)$ に**妥当な不満を持つ**とは，$(s,c') \succ_s (s,c)$ となるような (s,c), $(s',c') \in X'$, $(s,c') \in X \setminus X'$ について $(s,c') \succ_{c'} (s',c')$ が成り立つことをいう．マッチング X' が**公平性**を満たすとは，X' において妥当な不満を持つ学生が存在しないことをいう．また，公平性を満たすマッチングを常に出力するとき，そのメカニズムは公平性を満たすという．

つまり，学生 s が s' に妥当な不満を持つとは，s は現在割り当てられている学校よりも c' の方が好ましく，c' も現在受け入れている s' より s の優先順序が高いという場合を指す．

定義 2 (非浪費性) マッチング X' に対し，学生 s が学校 c' に**空きシートを要求する**とは，$(s,c') \succ_s (s,c)$ となるような $(s,c) \in X'$, $(s,c') \in X \setminus X'$ について $(X' \setminus X'_s) \cup \{(s,c')\}$ が学校側実現可能であることをいう．マッチング X' が**非浪費性**を満たすとは，X' において空きシートを要求する学生が存在しないことをいう．また，非浪費性を満たすマッチングを常に出力するとき，そのメカニズムは非浪費性を満たすという．

つまり，学生 s が学校 c' に空きシートを要求するとは，s が現在割り当てられている学校よりも c' の方が好ましく，s が現在の割当から c' の割当に変更したとしても，マッチングが実現可能である場合を指す．

定義 3 (戦略的操作不可能性) メカニズムが φ が**戦略的操作不可能性**を満たすとは，任意の s, $\succ_s$, $\tilde{\succ}_s$, $\succ_{-s}$ について $\varphi_s((\succ_s, \succ_{-s})) \succeq_s \varphi_s((\tilde{\succ}_s, \succ_{-s}))$ が成り立つことをいう．

つまり，戦略的操作不可能性を満たすメカニズムにおいては，どの学生も他の学生の申告に関わらず，自身の選好順序を偽って申告する誘因を持たない．

3. メカニズム

本章では，$ratio$ による制約を扱うメカニズムを紹介する．また，メカニズムが満たす理論的性質を示す．

3.1 既存メカニズム: Artificial Cap Deferred Acceptance メカニズム (ACDA)

本節では文献 [Goto 16] を基に，Artificial Cap (AC) と呼ばれる人為的な上限を用いて Deferred Acceptance メカニズム (DA) [Gale 62] を実行する Artificial Cap Deferred Acceptance メカニズム (ACDA) を紹介する．DA は，学校の上限ベクトル $q_C = (q_{c_1}, ..., q_{c_m})$ を用いた $(S, C, X, \succ_S, \succ_C, q_C)$ の組の下で動作する．ここで，q_c は学校 c の上限を意味する．

定義 4 (DA)

Step 1 各学生 s はまだ拒否されていない学校のうち $\succ_s$ において最も好む学校に申し込む．

Step 2 申し込まれた各学校 c はこれまで申込があった学生のうち $\succ_c$ の上位 q_c 人までを受け入れ，残りの学生を拒否する．

Step 3 拒否される学生が存在しなければ，メカニズムを終了する．そうでないなら，Step 1 に戻る．

ACDA は AC の定め方により，下限制約といった様々な制約を扱うことができる汎用性の高いメカニズムである [Goto 16]．本稿では ACDA が実現可能なマッチングを常に出力するよう，以下の定義 5 の手続きにより定まる要素数 m のベクトル $\zeta \in \mathbb{Z}^m$ を AC として定める．定義 5 の手続きは，学校に対する順序 P を用いる．ここで一般性を失うことなく，P を $c_1, c_2, \ldots, c_m, c_1, c_2, \ldots$ とする．

定義 5 (AC の決定方法)

Step 1 ζ_i を学校 c_i の上限とし，任意の $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ について $\zeta_i \leftarrow n$ とする．

Step 2 n 人の学生を c_m に割り当てる．もし上限 ζ_m を超える場合は，超える学生を c_{m-1} に割り当てる．さらに上限 ζ_{m-1} を超える場合は，超える学生を c_{m-2} に割り当てる．これらの操作を，上限を超える学生が現れなくなるまで繰り返す．

*1 詳細な説明は割愛するが，本モデルでは $0 \leq ratio \leq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor / \lceil \frac{n}{m} \rceil$ とすることで，実現可能な契約の集合の存在性が保証される．

*2 マッチング理論の慣習上，単に $X' \subseteq X$ となる X' をマッチングと呼ぶこともある．

Step 3 割り当てた結果が実現可能であれば終了する．実現可能でなければ，順序 P に従い学校 c_i を選び，$\zeta_i \leftarrow \zeta_i - 1$ として Step 2 に戻る．

この手続きで得られる ζ を用いて，ACDA は以下で定義される．

定義 6 (ACDA) 定義 5 より得られる ζ を AC として DA を実行する．つまり，任意の $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ について $q_{c_i} \leftarrow \zeta_i$ とし，*ratio* の代わりに学校の上限ベクトル q_C を用いた $(S, C, X, \succ_S, \succ_C, q_C)$ の組において DA を実行する．

ACDA について以下の定理が成り立つことを示す．また，ACDA の動作例を例 1 に示す．

定理 1 ACDA は公平性，戦略的操作不可能性を満たす．

証明 1 q_C は外因的に与えられることと，DA は公平性と戦略的操作不可能性を満たす [Gale 62, Dubins 81] ことより，定理 1 を得る． □

例 1 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$，$C = \{c_1, c_2, c_3\}$，$ratio = 1/3$ である場合を考える．各学校 c が持つ優先順序は共通して $s_1 \succ_c s_2 \succ_c s_3 \succ_c s_4 \succ_c s_5 \succ_c s_6$ とし，学生 s_5, s_6 が持つ選好順序はそれぞれ，$c_1 \succ_{s_5} c_3 \succ_{s_5} c_2$，$c_2 \succ_{s_6} c_3 \succ_{s_6} c_1$ であり，それ以外の各学生 s は共通して $c_1 \succ_s c_2 \succ_s c_3$ であるとする．

AC は定義 5 より $(2, 2, 3)$ と定まる．よって，$q_C = (2, 2, 3)$ として DA を実行する．まず，各学生は最も好む学校に申し込む．つまり，s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 は c_1 に，s_6 は c_2 に申し込む．c_1 は上限まで優先順序に従い s_1, s_2 を受け入れ s_3, s_4, s_5 を拒否し，c_2 は s_6 を受け入れる．拒否された s_3, s_4 は c_1 の次に好ましい c_2 に，s_5 は c_3 にそれぞれ申し込む．c_2 は先程受け入れていた s_6 を含めて上限まで優先順序に従い s_3, s_4 を受け入れ s_6 を拒否し，c_3 は s_5 を受け入れる．拒否された s_6 は c_2 の次に好ましい c_3 に申し込む．c_3 は先程受け入れていた s_5 を含めて上限まで優先順序に従い s_5, s_6 を受け入れる．このとき拒否される学生が存在しないためメカニズムを終了する．

以上より得られるマッチングは $X' = \{(s_1, c_1), (s_2, c_1), (s_3, c_2), (s_4, c_2), (s_5, c_3), (s_6, c_3)\}$ となる．X' において s_3 は c_1 に空きシートを要求する．なぜならば，$r((X' \setminus X'_{s_3}) \cup \{(s_3, c_1)\}) = 1/3 \geq ratio$ となるためである．同様に，s_4, s_5 は c_1 に，s_6 は c_2 にそれぞれ空きシートを要求する．例 1 において多くの学生が空きシートを要求するため，非浪費性の観点で非常に効率的でない．

3.2 提案メカニズム: Quota Reduction Deferred Acceptance メカニズム (QRDA)

本節では，公平性，戦略的操作不可能性を満たすメカニズムである Quota Reduction Deferred Acceptance メカニズム (QRDA) を提案する．QRDA はステージが進むごとに各学校の定員を減らすメカニズムであり，文献 [Fragiadakis 16] の Dynamic Quotas Deferred Acceptance メカニズムに基づく．また，絶対的制約を設定する必要がない柔軟なメカニズムである．ACDA と同様に，QRDA も実現可能なマッチングを常に出力する．以降，動的な上限である場合には静的な上限との差異を強調するために，学校の上限ベクトルを $\hat{q}_C = (\hat{q}_{c_1}, \ldots, \hat{q}_{c_m})$ として用いる．QRDA では ACDA で用いた順序 P を用いる．

定義 7 (QRDA) 任意の学校 $c \in C$ について $\hat{q}^1_c \leftarrow n$ とし，ステージ 1 に進む．

ステージ k: *ratio* の代わりに学校の上限ベクトル $\hat{q}^k_C$ を用いた $(S, C, X, \succ_S, \succ_C, \hat{q}^k_C)$ の組において DA を実行し得られるマッチングを X^k とする．X^k が実現可能であれば，X^k を出力しメカニズムが終了する．そうでなければ，順序 P に従い学校 c を選び，$\hat{q}^{k+1}_c \leftarrow \hat{q}^k_c - 1$ とし，他の学校 c' については $\hat{q}^{k+1}_{c'} \leftarrow \hat{q}^k_{c'}$ とする．その後，ステージ $k+1$ に進む．

QRDA は，各ステージにおいて DA を実行する．その結果が実現可能でなければ順序 P に従い学校を選び，その学校の定員を減らした上で DA を実行する．この一連の手続きを，実現可能なマッチングが得られるまで繰り返し実行するメカニズムである．以下に，例 1 における QRDA の動作例を示す．

例 2 $n = 6$ より $\hat{q}^1_C = (6, 6, 6)$ としステージ 1 に進む．この上限で DA を実行すると $X^1 = \{(s_1, c_1), (s_2, c_1), (s_3, c_1), (s_4, c_1), (s_5, c_1), (s_6, c_2)\}$ を得る．$r(X^1) = 0/5 = 0$ であり実現可能ではないため P に従い選ばれた学校 c_1 の定員を一つ減らす．つまり，$\hat{q}^2_{c_1} \leftarrow 5$ としてステージ 2 に進む．ステージ 2 では $\hat{q}^2_C = (5, 6, 6)$ として DA を実行するが，ステージ 1 と得られるマッチングは同等である．この結果はステージ 4 まで続く．ステージ 5 では $\hat{q}^5_C = (4, 5, 5)$ として DA を実行し，$X^5 = \{(s_1, c_1), (s_2, c_1), (s_3, c_1), (s_4, c_1), (s_5, c_3), (s_6, c_2)\}$ を得る．$r(X^5) = 1/4$ であり実現可能ではないため P に従い c_2 の定員を一つ減らす．この結果はステージ 7 まで続く．ステージ 8 では $\hat{q}^8_C = (3, 4, 4)$ として DA を実行し，$X^8 = \{(s_1, c_1), (s_2, c_1), (s_3, c_1), (s_4, c_2), (s_5, c_3), (s_6, c_2)\}$ を得る．$r(X^8) = 1/3$ であり実現可能であるため，X^8 を出力しメカニズムが終了する．

このマッチングにおいて s_1, s_2, s_3, s_6 は最も好む学校に割り当てられており，空きシートを要求することはない．s_4 は c_1 より好ましくない c_2 に割り当てられているが，$r((X^8 \setminus X^8_{s_4}) \cup \{(s_4, c_1)\}) = 1/4 < ratio$ となる．よって空きシートを要求することはない．s_5 も同様の理由により，空きシートを要求することはない．以上より，例 2 の結果において空きシートを要求する学生は存在しない．

例 1 において，ACDA は AC により許容される人数，つまり高々 2 人を学校 c_1 に割り当てる．しかしながら，QRDA は AC を超える人数 3 人を割り当てることができる．以上の理由から，空きシートを要求する学生が減少したと考えられる．

3.3 QRDA の理論的性質

ACDA は DA と同等の動作のメカニズムであるが，QRDA は DA を繰り返し実行する点で異なる．しかし，QRDA においても ACDA と同様に以下の定理が成り立つことを示す．

定理 2 QRDA は公平性，戦略的操作不可能性を満たす．

証明 2 QRDA がステージ k で終了したと仮定する．得られたマッチング X^k は $(S, C, X, \succ_S, \succ_C, \hat{q}^k_C)$ の組において DA によって得られるマッチングと同等である．文献 [Gale 62] より DA は公平性を満たすため，X^k も公平性を満たすマッチングである．以上より，QRDA は公平性を満たす．QRDA が戦略的操作不可能性を満たすことの証明は，紙幅の都合上割愛するが，文献 [Goto 16] の定理 2 の証明に準ずる． □

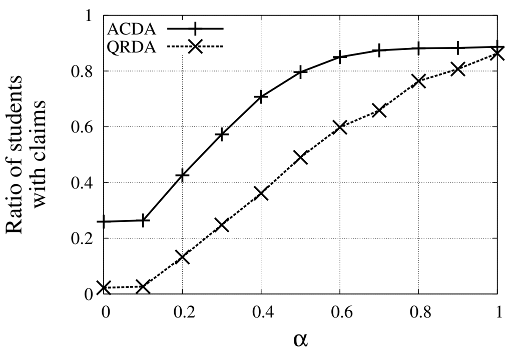

図 1: 空きシートを要求する学生の割合

QRDA は ACDA と同様に非浪費性を満たさない．しかし，QRDA により割り当てられた学校よりも ACDA により割り当てられた学校を好む学生は存在しない．この事実を以下の定理 3 で示す．

定理 3 任意のインスタンスにおいて，QRDA の出力するマッチングを X^{QRDA}，ACDA の出力するマッチングを X^{ACDA} とする．このとき任意の学生 $s \in S$ について $X_s^{QRDA} \succeq_s X_s^{ACDA}$ が成り立つ．

定理 3 を証明するために，学校の定員に関する単調性を定義する．DA は学校の定員に関する単調性を満たす [Ehlers 16]．

定義 8 (学校の定員に関する単調性) $(S, C, X, \succ_S, \succ_C, q'_C)$ の組においてメカニズム φ が出力するマッチングを X'，$(S, C, X, \succ_S, \succ_C, q''_C)$ の組において φ が出力するマッチングを X'' とする．ただし，$q'_C \geq q''_C$ とする．このとき任意の $\succ_S$, $s \in S$ について $X'_s \succeq_s X''_s$ が成り立つとき，φ は**学校の定員に関する単調性**を満たすという．

定義 8 は，学校の上限が増えた場合，任意の学生の割当は良くなりこそすれ，悪くなることはないということを表している．

証明 3 QRDA と ACDA の動作より，$\zeta \leq \hat{q}_C^k$ である．ただし ζ は AC を，$\hat{q}_C^k$ は QRDA が終了するステージ k における学校の上限を表す．QRDA，ACDA が終了するステージにおいて得られるマッチング X^{QRDA}，X^{ACDA} は，それぞれ $(S, C, X, \succ_S, \succ_C, \hat{q}_C^k)$，$(S, C, X, \succ_S, \succ_C, \zeta)$ の組において DA を実行して得られるマッチングと同等である．DA は学校の定員に関する単調性を満たすことから，任意の $\succ_S$, $s \in S$ について $X_s^{QRDA} \succeq_s X_s^{ACDA}$ が成り立つ． □

4. 評価

本章では，計算機実験によって ACDA と QRDA の性能を評価する．ここでは，学生数 $n = 100$，学校数 $m = 10$，相対的制約 $ratio = 1/4$ と設定する．

学生の選好順序については，各学生ごとに各学校に対する評価値を生成し，その評価値に基づいて順序を定める．各学生の各学校に対する評価値は以下の方法で定める．まず全ての学生に共通のベクトル u_{com} を $[0, 1]^m$ から一様分布により生成する．次に各学生 s に固有のベクトル u_s を同様に $[0, 1]^m$ から一様分布により生成する．また，パラメータ $\alpha \in [0, 1]$ を設定する．以上 u_{com}, u_s, α によって，各学校に対する s の評価値を $\alpha u_{com} + (1 - \alpha)u_s$ で与える．つまり α の値が大きいほど学生の選好の相関が強くなり，値が小さいほど学生の選好の相関が弱くなる．また，学校の優先順序は一様分布により生成する．u_{com}, u_s, 学校の優先順序に関して 100 個のインスタンスを生成し，各 α に対して 100 問の実行結果の平均をとる．

図 1 は各 α において空きシートを要求する学生の割合を示している．任意の α において，ACDA より QRDA の方が空きシートを要求する学生の割合が低いことが確認できる．

5. 結論

本稿では，相対的制約として *ratio* がモデルに存在する場合を考察した．この *ratio* による制約下における既存メカニズムとして ACDA が存在したが，新たなメカニズム QRDA を提案し，公平性，戦略的操作不可能性を満たすメカニズムであることを証明した．最後に，QRDA は ACDA より学生の満足度が高いことを理論的に示し，さらに ACDA より非浪費性の観点で優れていることを計算機実験により示した．

今後の研究課題としては，*ratio* による制約下において，公平性，非浪費性，戦略的操作不可能性を満たすメカニズムが存在するか否かを考察することが挙げられる．存在すればそのようなメカニズムの提案，存在しなければ，QRDA より非浪費性の観点で優れる新たなメカニズムの提案が考えられる．

謝辞

本研究は JSPS 基盤研究 (S) (24220003)，JSPS 基盤研究 (B) (15H02751) の助成を受けました．深く感謝致します．

参考文献

[Dubins 81] Dubins, L. E. and Freedman, D. A.: Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 88, No. 7, pp. 485–494 (1981)

[Ehlers 16] Ehlers, L. and Klaus, B.: Object allocation via deferred-acceptance: Strategy-proofness and comparative statics, *Games and Economic Behavior*, Vol. 97, pp. 128–146 (2016)

[Fragiadakis 16] Fragiadakis, D. and Troyan, P.: Improving matching under hard distributional constraints, *Theoretical Economics* (2016), forthcoming

[Gale 62] Gale, D. and Shapley, L. S.: College admissions and the stability of marriage, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 1, pp. 9–15 (1962)

[Goto 16] Goto, M., Kojima, F., Kurata, R., Tamura, A., and Yokoo, M.: Designing Matching Mechanisms under General Distributional Constraints, *American Economic Journal: Microeconomics* (2016), forthcoming

[Nguyen 17] Nguyen, T. and Vohra, R.: Stable Matching with Proportionality Constraints (2017), mimeo (the latest version is available at http://web.ics.purdue.edu/~nguye161/proportional.pdf)

[安田 10] 安田洋祐：学校選択制のデザイン: ゲーム理論アプローチ, NTT 出版 (2010)