

# 多目的最適化を用いた エッシャー風タイリング図形の生成に関する研究

A Study on Escher-like Tiling Design Using Evolutionary Multi-objective Optimization

久富 あすか<sup>\*1</sup> 木場 仁美<sup>\*1</sup> 神薗 誠<sup>\*1</sup> 水野 一徳<sup>\*2</sup> 小野 智司<sup>\*1</sup>  
Asuka Hisatomi Hitomi Koba Makoto Kamizono Kazunori Mizuno Satoshi Ono

<sup>\*1</sup>鹿児島大学 大学院 理工学研究科 情報生体システム工学専攻

Department of Information Science and Biomedical Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University

<sup>\*2</sup>拓殖大学 工学部 情報工学科

Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Takushoku University

In this paper, we propose a method that generates a tilable shape similar to a given figure. In previous work, an analytical method have been proposed; however it cannot consider one of constraints to generate a tilable object. In addition, its output dramatically changes according to a slight difference in an input figure shape. The proposed method chooses vertices constituting the input figure and tiling patterns as input to the analytical method using multi-objective optimization, enabling it to find a range of solutions with better quality than the previous work.

## 1. はじめに

タイリングとは、平面を隙間および重複が生じることなく充填させるように、有限種類の図形を連続的に敷き詰める行為である [Kaplan 09]. タイリング可能な図形をタイリング可能図形と呼び、図形を複製し、平行移動、回転、反転の操作により空間を充填するパターンをタイリングパターン (TP) と呼ぶ. Kaplan は、与えられた図形に可能な限り類似し、タイリング可能図形を設計する問題を Escherization 問題として定義している. 単一図形により 2 次元空間を充填するタイリングパターンは、93 種類のみ [Grunbaum 87] と有限であるものの、上記の Escherization 問題を解き、タイリング可能図形を生成することは難しい. これは、同一の形状を持つ 2 つの図形が辺を共有するためである.

タイリング可能図形を解析的に生成する手法が提案されている [Koizumi 09]. しかし、入力する形状の微小な違いにより、出力図形の形状が大きく変化してしまう問題がある (図 1(a),(b)) また、対応する辺の形状が合致することは保障されるものの、出力形状において辺同士の交差 (自己交叉と呼ぶ) を避けるという制約を考慮することが難しい (図 1(c)). さらに、この手法は入力された図形に適したタイリングパターンを、事前に指定する必要がある.

一方、メタヒューリスティクスにより、タイリング可能図形を試行錯誤的に生成する研究も行われている [Kaplan 00, Ono 14]. しかし、探索空間が膨大であること、および、変数間の依存性が強い (同時に複数の変数を変更させる必要がある) ため、メタヒューリスティクスのみで良好な解を得ることは困難である.

解析的手法 [Koizumi 09] とメタヒューリスティクスを用いた手法 [Kaplan 00, Ono 14] の問題点を改善した手法も提案されている [木場 15]. しかし、入力図形によっては良質なタイリング可能図形が生成できない問題がある.

このため、本研究では、与えられた入力図形に類似し、かつ、タイリング可能図形を、階層的な最適化により生成する手法を提案する. 提案手法は、解析的手法 [Koizumi 09] を局所的探索として利用し、大域的探索では進化型多目的最適化を用

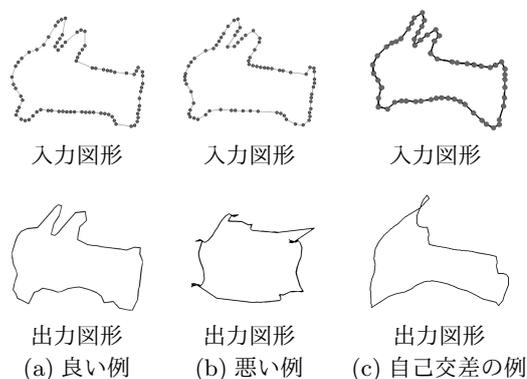


図 1. 入力頂点座標による出力図形の違い

いて、局所的探索の入力にあたる頂点群、および、タイリングパターンの選択を行う. これにより、入力図形に適したタイリングパターンの選択と、入力図形に類似した良好な形状を得られる頂点群の選択を同時に行うことができる. また、大域的探索に進化型多目的最適化を用いることにより、多様性に富んだ出力図形を複数求めることができる. 従来の単目的最適化では、局所的な起伏の表現が困難な入力図形や自己交差が発生する入力図形に対しても、入力図形に類似した好ましいタイリング可能図形を導出できる.

## 2. 関連研究

### 2.1 タイリングの概要

本研究では、1 種類のタイルで平面を充填する Isohedral タイリングを対象とする. タイルの形状の制約は強力であり、隣り合う辺の凹凸を考慮して形状を決定する必要がある. このため、手でタイリング可能図形を制作することは困難である. Kaplan は、この問題を Escherization 問題として定義している [Kaplan 00]. Escherization 問題とは、ある図形  $O$  が与えられたとき、

1. 図形  $U$  はできるだけ図形  $O$  に類似している

連絡先: 久富 あすか, mc116029@ibe.kagoshima-u.ac.jp

2. 図形  $U$  は平面を隙間および重複なく敷き詰めることができる

という 2 つの条件を満たす図形  $U$  を見つける問題である。

## 2.2 行列計算を用いた解析的手法

小泉らは、Escherization 問題を最小化問題として定式化し、入力された任意の図形  $O$  を  $n$  角形  $W$  で近似し、座標行列  $w$  から、タイリング可能図形  $U$  の座標行列  $u$  を求める解析的な手法を提案している [Koizumi 09]。この手法は、タイリング可能な基本的条件である、対応する 2 辺の形状が一致する制約条件のもとで、入力図形と出力図形との対応点間のユークリッド距離の二乗和を最小化することで、タイリング可能図形を生成する。

この手法は、最小化問題の関数が単純な凸関数であることを仮定して解析的に解を導出するため、高速であることが利点であり、効率的にタイルの自動生成を行い、良質な解（タイル）も多く確認した。しかし、入力図形の形状が同一でも、 $W$  を構成する頂点の個数や座標等の違いにより得られる解の品質が変化してしまう（図 1(a),(b)）。このため、入力頂点群を人手により試行錯誤的に選択する必要がある。また、小泉らの解析的手法では、自己交差に関する制約が含まれないため解に自己交差を含む図形が生成される場合がある。ここで、タイルの輪郭線が交差することを自己交差と呼ぶ（図 1(c)）。自己交差を含む図形は、Isohedral タイリングの条件を満たさない。

以上のように、解析的手法の出力は、入力図形の頂点群に強く依存する。このため、自己交差を含まず、かつ、入力図形に類似した良質な解を生成するためには、頂点群の位置や数を人手で試行錯誤することが必要となる。また、上記の頂点群の良否はタイリングパターンに依存するため、適切なタイリングパターンを事前に推定する必要もある。

## 2.3 メタヒューリスティクスによる手法

Kaplan は焼きなまし法 (Simulated Annealing : SA) を用いた手法を提案した [Kaplan 00]。この手法は 形状変化と評価とを繰り返すことでタイルを生成することにより、凸に近い入力図形に対して、良質な解を生成できる。しかし、入力図形によっては良質な解に収束しない場合や、探索時間が非常に長くなる場合がある。

対話型遺伝的アルゴリズム (Interactive Genetic Algorithm: IGA) を用いた手法も提案されている [Ono 14]。この手法は多様性に富んだタイルを生成でき、ユーザの嗜好に合うタイルの発見を試みる。一方、探索空間が膨大なため、SA を用いる手法と同様、解の品質や処理時間に問題がある。

階層的な最適化によりタイリング可能図形の自動生成手法も提案されている [木場 15]。この手法は、遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm:GA) [Goldberg 89] を用いた大域的探索のなかに、解析的手法 [Koizumi 09] を局所的探索として組み込んだ構造となっている。これにより、人間の試行錯誤なく、入力図形に類似した良質なタイリング可能図形を生成することができる。しかし、入力図形によっては、有効な目的関数が異なることが示されている [久富 16]。

## 3. 提案手法

### 3.1 方針

本研究では、解析的手法 [Koizumi 09] における入力頂点群の選択の試行錯誤、およびメタヒューリスティクスを用いた手法 [Kaplan 00, Ono 14] の解品質の低さと、単目的の階層的な最適化手法 [木場 15] の解の品質の不安定さを解決し、入力図形

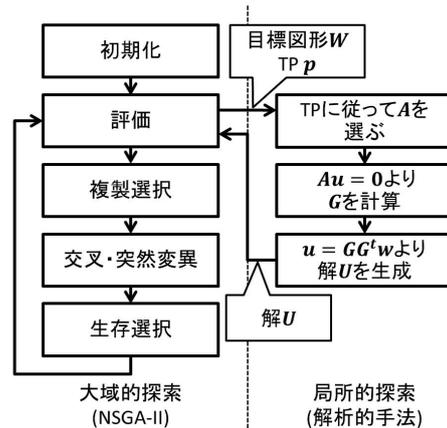


図 2. 提案手法の処理手順

によって出力図形の質が左右されにくく、良好なパレート最適解集合を生成する手法を提案する。具体的には、特性の異なる複数の目的関数を用意することで階層的な最適化手法における上位の最適化を多目的最適化に置き換え、NSGA-II (Fast and Elitist Multi-objective Genetic Algorithm) [Deb 02] によりパレート最適解集合を探索する手法を提案する。提案手法は、NSGA-II を用いた大域的探索の中に、解析的手法 [Koizumi 09] を局所的探索として組み込む構造とする。

### 3.2 処理手順

提案手法は、入れ子状の 2 つの最適化処理から構成される（図 2）。NSGA-II による大域的探索では、入力画像の輪郭頂点群に対してダウンサンプリングを行うことで、局所的探索の入力となる頂点群  $W$  を生成する。同時に NSGA-II は、局所的探索において利用するタイリングパターンの選択も行う。解析的手法 [Koizumi 09] による局所的探索では、NSGA-II により選択された頂点群とタイリングパターンをもとに、タイリング可能図形  $U$  を算出する。この  $U$  をもとに適応度を算出し、選択、交叉などの遺伝的操作を行う。なお、局所的探索はすべての個体に対して行われる点に留意されたい。上記のプロセスを繰り返すことで、良質なパレート最適解集合の発見を試みる。

### 3.3 個体表現

大域的探索である NSGA-II の遺伝子型は、原図形  $O$  から頂点群を選択するためのマスクパターンとタイリングパターン  $p$  との組み合わせである（図 3）。解析的手法の入力頂点群  $W$  は、 $N$  点から構成される  $O$  よりダウンサンプリングされた頂点群  $\tilde{N}$  であり、2 値のマスクパターンとして表現する。また、タイリングパターンは、冗長性を排した 29 パターンについてのみ考慮することとし、 $\lceil \log_2 29 \rceil = 5$  次元の 2 値変数の集合で表現する。以上のように、NSGA-II の染色体は長さ  $N + 5$  列の 2 値変数からなる。

提案手法における個体の表現型は、上記の遺伝子型 ( $W, p$ ) に対して局所的探索を適用して得られる頂点群  $U$  を描画することで得られるタイリング可能図形である。

### 3.4 目的関数

提案手法において、 $U$  と  $O$  との類似性を目的関数とする。類似性を評価する関数として、本稿では、最近傍距離と回転関数とを用いる。最近傍距離は、 $O$  の概形を捉えることに適しており、回転関数は、 $O$  の局所的な起伏の表現に適している

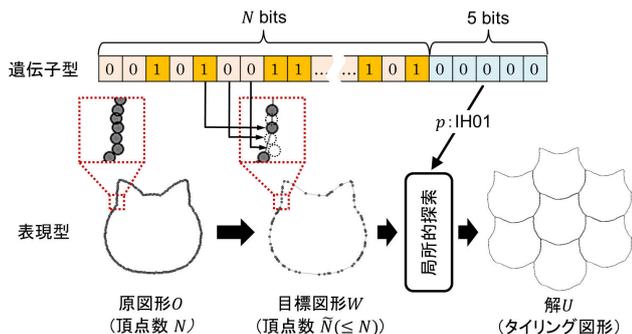


図 3. 個体表現

[久富 16]. また,  $U$  が, 自己交差を含む場合は, 目的関数値にペナルティを加算する.

### 3.4.1 最近傍距離

最近傍距離に基づく関数  $F_{ED}$  は,  $U, O$  間において頂点ごとに互いの最近傍点を求め, 最近傍点との距離の平均二乗誤差から算出する.  $O$  を構成する頂点数  $N$  と  $U$  を構成する頂点数  $n$  が異なるため,  $O$  の頂点を基準とした際の平均二乗誤差を  $ED_{G1}$ ,  $U$  の頂点を基準とした際の平均二乗誤差を  $ED_{G2}$  とし, この 2 つの平均を  $F_{ED}$  とする.

$$F_{ED} = \frac{1}{2}(ED_{G1} + ED_{G2}) \quad (1)$$

$$ED_{G1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{(\bar{x}_i - x_i)^2 + (\bar{y}_i - y_i)^2\} \quad (2)$$

$$ED_{G2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \{(x_j - \bar{x}_k)^2 + (y_j - \bar{y}_k)^2\} \quad (3)$$

ここで,  $(x_i, y_i)$  は  $O$  の輪郭上の点  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  に対してもっとも近い  $U$  上の点,  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  は  $U$  の輪郭上の点  $(x_j, y_j)$  に対してもっとも近い  $O$  の輪郭上の点である. なお, 形状間の位置合わせは, 重心のみを揃え, 回転方向に関しては総当たり的に行う. すなわち,  $O$  と  $U$  との  $n$  通りの対応関係全てに対して  $F_{ED}$  を算出し, 最も低い対応関係を採用する.

### 3.4.2 回転関数

回転関数 [Arkin 89] は, 辺の長さや角度の組の集合により多角形の形状を表す関数である. 回転関数を利用することで, 2 つの多角形の類似性を算出することが可能となる.

$$F_{TF} = \int_0^1 \{\Theta_A(s) - \Theta_B(s)\} ds \quad (4)$$

ここで,  $s$  は図形の全周を正規化した変数であり,  $\Theta(s)$  は水平軸と注目する辺がなす角度の正接である.  $F_{TF}$  を計算する際の位置合わせは回転方向のみ考慮すればよく, 提案手法では総当たり的に値を算出し, 最小値を採用する.

## 4. 評価実験

提案手法の有効性を確認するため, 従来手法との比較実験を行った.

### 4.1 準備

実験の比較対象として, 解析的手法 [Koizumi 09], および, GA により頂点の座標を直接求める手法 ( $GA_D$ ) [Ono 14], 単目的の階層的な最適化手法 ( $HO$ ) [木場 15] について実験を行っ



図 4. 原図形  $O$

た. 解析的手法は, 目的関数として  $F_{ED}$  を使い,  $GA_D$  は  $F_{TF}$  を用いた. また,  $GA_D$  では対話的な処理は行わないものとした.  $HO$  においては, 目的関数として,  $F_{TF}$ ,  $F_{ED}$ , およびそれらの重み付き線形和  $\beta F_{TF} + F_{ED}$  の 3 種類を用いた.  $\beta$  は, 初期集団における  $\beta F_{TF}$  と  $F_{ED}$  の全個体の平均値が等しくなるように設定した. 自己交差の検出には, 平面走査 [Preparata 92] を用いた. 個体数と世代数の積が 100,000 以下となるように実験条件を統一した. 原図形  $O$  の頂点数  $N$  は, 解の品質と探索時間を考慮し 180 点とした [木場 15]. ただし,  $GA_D$  は, 探索空間が膨大なため,  $O$  の頂点数  $N$  を 60 点とした. 解析的手法は, 原図形  $O$  の頂点選択を行う際の手法として均等分割と三角形分割の 2 通り, 頂点数を 60 点, 120 点, 180 点の 3 通り, および, 29 通りのタイリングパターンの全ての組み合わせ (合計 174 通り) の方法で入力頂点群を選択した. 提案手法と  $GA_D$  の試行回数は 5 回とし,  $HO$  の試行回数は, 目的関数ごとに 5 回とした. 自己交差のペナルティの重みは, 自己交差の発生回数分, 目的関数に加算するように設定した.

### 4.2 実験結果

従来手法である解析的手法 [Koizumi 09], および,  $GA_D$  [Ono 14],  $HO$  [木場 15] との比較実験を行った. 図 4 に原図形  $O$  を示し, 図 5 に提案手法と従来手法とを比較した結果を示す.  $GA_D$  と  $HO$  は 5 試行の中, また, 解析的手法では 174 種類の入力頂点群選択のなかで, それぞれ適応度をもっとも良い結果を示している. 提案手法は, 5 試行の中, Hyper volume がもっとも良い結果を示している. 実験結果より, 多様な形状の解を含むパレート最適解集合を生成することができた. 出力された解の形状においても, 提案手法では, 細部も表現されており, 自己交差の発生も少ないことがわかる.

図 6 に提案手法により生成されたタイルに内部絵を描き加え, 敷き詰めたタイリング画像を示す.

### 4.3 考察

4.2 節より, 提案手法は原図形  $O$  に左右されにくく, 原図形  $O$  に類似した解を生成できることがわかった. 解析的手法は, 入力頂点群を適切に選択することが困難であり, 均等分割や形状の特徴に基づく三角形分割のみでは良好な解を得ることが困難であった.  $HO$  は, 原図形  $O$  ごとに適する目的関数が異なるため, 原図形  $O$  と目的関数の組み合わせによっては, 良好な解を得ることが困難な場合があった. 提案手法は, NSGA-II により, 解析的手法における入力頂点群やタイリングパターンの選択を行い, 複数の目的関数から解を評価するため, 入力図形によって解の品質が左右されにくい. また, 多目的最適化を行うことにより,  $S_1$  のような単調であるが局所的な起伏を表現するのが困難な問題でも, 概形と局所的な起伏を適切に表現できている. また,  $S_2$  のような起伏の激しい形状でも細部まで表現できることがわかる.

\*1 いらすとや: <http://www.irasutoya.com/>

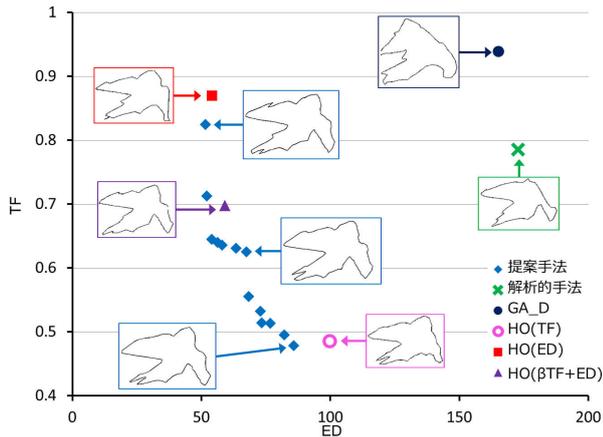
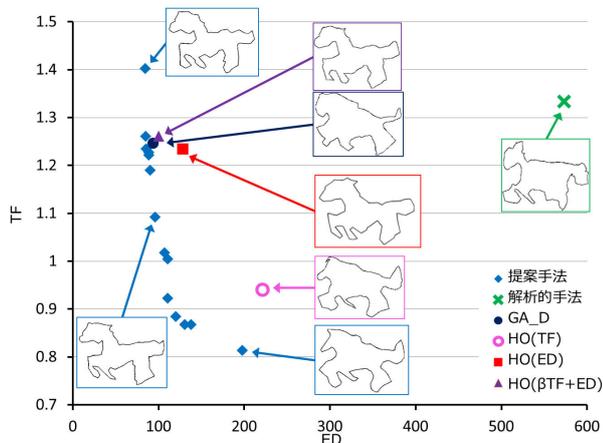
(a)  $S_1$ (b)  $S_2$ 

図 5. 実験結果

## 5. おわりに

本研究では、NSGA-II による大域的探索と解析的手法による局所的探索とを階層状に組み合わせたタイリング可能図形の生成手法を提案した。提案する手法は、NSGA-II による大域的探索で、解析的手法の入力となる頂点群およびタイリングパターンを決定し、複数の目的関数によって解を評価する。これにより、入力図形に左右されにくく、所与の形状に類似するタイリング可能図形を生成することが実現できる。実験により、先行研究 [Koizumi 09, Ono 14] において原図形に類似するタイルを生成できない場合でも、提案手法では原図形に類似したタイルを生成することが可能であることを確認した。

今後は、本問題における多様性の向上と、タイリングを行った状態の画像の評価について検討を行う予定である。

## 参考文献

- [Arkin 89] Arkin, E. M., Chew, L. P., Huttenlocher, D. P., Kedem, K., and Mitchell, J. S.: An efficiently computable metric for comparing polygonal shapes, Technical report, DTIC Document (1989)
- [Deb 02] Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T.: A fast and elitist multiobjective genetic al-

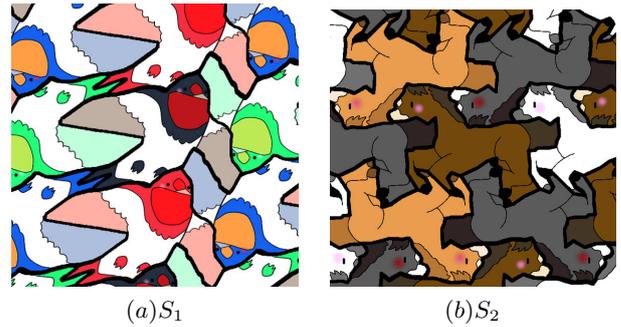


図 6. タイリング画像

gorithm: NSGA-II, *IEEE transactions on evolutionary computation*, Vol. 6, No. 2, pp. 182–197 (2002)

[Goldberg 89] Goldberg, D.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning* (1989)

[Grunbaum 87] Grunbaum, B. and Shephard., G. C.: *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman, New York (1987)

[Kaplan 00] Kaplan, C. S. and H.Salesin, D.: Escherization, *Proceedings of SIGGRAPH*, pp. 499–510 (2000)

[Kaplan 09] Kaplan, C. S.: Introductory Tiling Theory for Computer Graphics, *Synthesis Lectures on Computer Graphics and Animation*, Vol. 4, No. 1, pp. 1–113 (2009)

[Koizumi 09] Koizumi, H. and Sugihara, K.: Computer-aided design of Escher-like tiling, *NICOGRAPH Paper Contest* (2009)

[Ono 14] Ono, S., Kisanuki, M., Machii, H., and Mizuno, K.: Creation Support for Escher-Like Tiling Patterns by Interactive Genetic Algorithms, in *SIGGRAPH Asia* (2014)

[Preparata 92] Preparata, F. P.: 計算幾何学入門, *Computational geometry: an introduction*, 総研出版, 町田, Japan (1992)

[久富 16] 久富あすか, 木場仁美, 神菌誠 and 水野一徳, 小野智司: エッシャー風タイリング図形の自動設計における目的関数の検討, *進化計算シンポジウム* (2016)

[木場 15] 木場仁美, 水野一徳, 小野智司: 進化計算を用いたエッシャー風タイリングアートデザインに関する研究, *人工知能学会全国大会論文集*, Vol. 29, pp. 1–4 (2015)