2F2-4

2次元格子空間上の施設配置問題におけるパレート効率性の考察

Pareto Efficiency for Locating one Facility on a Grid

和田 勇歩 Yuho Wada　小野 友寛 Tomohiro Ono　富永 優仁 Yuto Tominaga　東藤 大樹 Taiki Todo　横尾 真 Makoto Yokoo

九州大学大学院システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering at Kyushu University

We consider the problem of locating one facility on a grid, from the perspective of mechanism design. Even though there is already a class of strategy-proof mechanisms for the problem, the quality of their output has not been sufficiently analyzed. In this paper, we first clarify a necessary and sufficient condition for the mechanism to satisfy Pareto efficiency, one of the most well-studied efficiency criteria in mechanism design. We then study false-name-proof mechanisms. We propose a false-name-proof and Pareto efficient mechanism for a limited size of grid, as well as a class of false-name-proof mechanisms for any size of grid.

1. 序論

施設配置問題は集団での合意形成のモデルであり，メカニズムデザイン研究の 1 分野として活発な研究がなされている [Hans 92, Klaus 07]．この問題は，エージェントの申告する所在地に基づき，施設の配置位置を決定する問題である．本論文では，2 次元格子空間上に 1 つの施設を配置する問題を扱う．施設配置メカニズムに参加するエージェント（参加者）は，自身の所在地からより近い位置に施設が配置されることを好む．

メカニズムデザインでは，社会的に望ましい性質を満たすメカニズムの設計が求められる [坂井 08]．施設配置問題をメカニズムデザインの観点から見ると，施設配置メカニズムは，戦略的操作不可能性と呼ばれる性質を満たすことが望まれる．戦略的操作不可能性は，ある参加者が虚偽の所在地を申告（戦略的操作）しても，その参加者にとってより望ましい結果が得られないことを保証する．この性質を満たさないメカニズムでは，利己的な参加者が自身にとってより望ましい結果になるように，虚偽の所在地を申告することが考えられる．

また，メカニズムの参加者は架空名義を用いて虚偽の申告（架空名義操作）を行うことで，自身にとってより望ましい結果を得ようとすることも考えられる．インターネット上でのキャラクターの人気投票が一例である．参加者が不正に複数の名義を用いて申告することで，その参加者にとってより好ましい順位結果にすることなどが挙げられる．したがって，メカニズムデザインの研究では，匿名性の高い環境下で架空名義操作に頑健なメカニズムを設計する必要がある [Yokoo 04]．架空名義操作不可能性は，ある参加者が架空名義操作を行ったとしても，その参加者にとってより望ましい結果が得られないことを保証する．施設配置問題において，架空名義操作不可能性を満たすメカニズムを扱った研究はいくつか存在する [Todo 11, Sonoda 16].

施設配置メカニズムが満たすべき望ましい性質として，他にもパレート効率性が挙げられる．他のどんな位置に配置を変更しても，少なくとも 1 人の参加者にとって，施設との距離を遠ざけなければ，他のいずれの参加者もこれ以上近くすることができない時，その施設の配置位置はパレート効率的であるという．パレート効率性とはメカニズムが返す施設の配置位置が常にパレート効率的であることを保証する性質である．

本論文では，まず，パレート効率的となる施設の配置位置が満たす条件を明らかにする．既存研究において多次元空間上の戦略的操作不可能性を満たす施設配置メカニズムとして，Percentile Mechanism が提案されている [Xin 13]．ここでは，2 次元格子上において Percentile Mechanism がパレート効率性を満足するための必要十分条件を示す．次に，連続な直線上において架空名義操作不可能性を満たす Target Mechanism [Moulin 80] を拡張し，2 次元格子空間上で架空名義操作不可能性を満たすメカニズムを提案する．最後に，サイズ $2 \times m$ の格子において架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たすメカニズムを提案する．

2. モデル

有限サイズの 2 次元格子 $A = \{0, \ldots, l-1\} \times \{0, \ldots, m-1\}$ $(l, m \geq 2)$ 上に，1 つの施設を配置する問題を扱う．潜在的なエージェントの集合を $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とする．この時，潜在的なエージェント全員が施設配置メカニズムに参加するのではなく，施設を利用しようと考えているエージェントのみが所在地の申告を行う．メカニズムに参加するエージェントの集合を $N \subseteq \mathcal{N}(|N| = n \geq 2)$ とする．この時，エージェント i の所在地の座標を $z_i = (z_i^x, z_i^y) \in A$ とし，エージェントの所在地の組を $Z = (z_i)_{i \in N}$ とする．この時，特定のエージェント i の申告を除いた所在地の組を Z_{-i} とする（$Z = (z_i, Z_{-i})$）．便宜上，座標の組の第一成分を x 座標，第二成分を y 座標と呼ぶこととする．また，各エージェントの x 座標の組を $(t_1^x, \ldots, t_n^x)$ $(t_1^x \leq \ldots \leq t_n^x)$，各エージェントの y 座標の組を $(t_1^y, \ldots, t_n^y)$ $(t_1^y \leq \ldots \leq t_n^y)$ と表現する．この時，エージェントの所在地において，x 座標の最小値を $\min_x = t_1^x$，最大値を $\max_x = t_n^x$，y 座標に関しても同様にして，$\min_y = t_1^y, \max_y = t_n^y$ とする．本論文では，エージェントの所在地の組 Z を入力として，施設の配置位置 $a = (a_x, a_y) \in A$ を出力するメカニズム f を考える．エージェント i の所在地 z_i と配置位置 a との距離は，$d(a, z_i) = |a_x - z_i^x| + |a_y - z_i^y|$（マンハッタン距離）で表す．エージェント i は A 上の選好順序 R_{z_i} を持ち，$aR_{z_i}b \Leftrightarrow d(a, z_i) \leq d(b, z_i)$ とし，a を b 以上に好むことを意味する．つまり，エージェントは，施設の配置位置と自身の所在地がより近いことを好む．この時，a, b がエージェント i にとって等価な関係であることを，$aI_{z_i}b \Leftrightarrow d(a, z_i) = d(b, z_i)$ と表し， エージェント i にとって a を b よりも厳密に好むこ

とを，$aP_{z_i}b \Leftrightarrow d(a, z_i) < d(b, z_i)$ と表す．

施設の配置位置 a, b に対して，全てのエージェントが a を b 以上に好み，少なくとも 1 人は a を b よりも厳密に好むならば b に施設を配置することは望まれない．この時，a は b をパレート支配するという．施設の配置位置が，任意の位置にパレート支配されない時，その配置位置はパレート効率的であるという．以下にパレート効率的な施設の配置位置を定義する．

定義 1 ある所在地の組 Z に対し，施設の配置位置 a が**パレート効率的**であるとは，以下の条件を満たすことを言う．

$$\forall a' \in A, \neg[(\exists i \in N, a'P_{z_i}a) \wedge (\forall i \in N, a'R_{z_i}a)]$$

メカニズム f が任意の Z に対してパレート効率的な施設の配置位置を返すのであれば，f はパレート効率性を満たすという．

エージェントは自身の所在地に対して虚偽の申告を行うことも可能である．エージェント i の虚偽の申告を $z'_i \in A$ とする．エージェントは合理的であるので，虚偽の申告をすることで施設の配置位置が近くなるならば，エージェントが正直に所在地を申告する保証はない．各エージェントが虚偽の所在地の申告を行っても，自身の所在地と施設の配置位置を近づけることができない性質を戦略的操作不可能性という．戦略的操作不可能性を以下のように定義する．

定義 2 あるメカニズム f が**戦略的操作不可能性**を満たすとは，以下の条件を満たすことを言う．

$$\forall Z \in A^n, \forall i \in N, \forall z'_i \in A, f(Z)R_{z_i}f(z'_i, Z_{-i})$$

また，エージェントは複数の名義を用いて申告を行うことも可能である．エージェント $i \in N$ が使用する名義の集合を ϕ_i とする．このエージェントが名義の集合 ϕ_i を用いて虚偽申告する所在地の組を Z'_{ϕ_i} とする．ここで 1 人のエージェントが複数の名義を扱って所在地を申告しても，自身の所在地と施設の配置位置を近づけることができない性質を架空名義操作不可能性といい，文献 [Todo 11] に倣い以下のように定義する．

定義 3 配置メカニズム f が**架空名義操作不可能性**を満たすとは，以下の条件を満たすことを言う．

$$\forall Z \in A^n, \forall i \in N, \forall \phi_i \subseteq (\mathcal{N} \setminus N) \cup \{i\},$$

$$\forall Z'_{\phi_i} \in A^{|\phi_i|}, f(Z)R_{z_i}f(Z'_{\phi_i}, Z_{-i})$$

3. パレート効率的な施設の配置位置

本章では，施設の配置位置がパレート効率的であるための必要十分条件を考察する．

ある施設の配置位置 $a = (a_x, a_y)$ がパレート効率的であるか否か議論するにあたり $g_x(Z, a) \subseteq \{+, -, 0\}$ を以下のように定義する．$+ \in g_x(Z, a) \Leftrightarrow \exists i, z_i^x > a_x$, $- \in g_x(Z, a) \Leftrightarrow \exists i, z_i^x < a_x$, $0 \in g_x(Z, a) \Leftrightarrow \exists i, z_i^x = a_x$ とする．$g_y(Z, a)$ も z_i^y, a_y について同様に定義する．また，$g_x(Z, a)$ を用いて条件式を 2 つ定義する．$S_{s,t}$ を $S_{s,t} = s \in g_x(Z, a) \wedge t \in g_y(Z, a)$ とし，$T_{s,t}$ を $T_{s,t} = S_{s,t} \vee S_{s,0} \vee S_{0,t} \vee S_{0,0}$ とする．

パレート効率的な施設配置位置が満たす必要十分条件を示した．紙幅の都合上，証明は省略する．

定理 1 ある所在地の組 Z に対し，施設の配置位置 $a = (a_x, a_y)$ がパレート効率的である必要十分条件は次のうち，いずれかの条件を満たすものである．

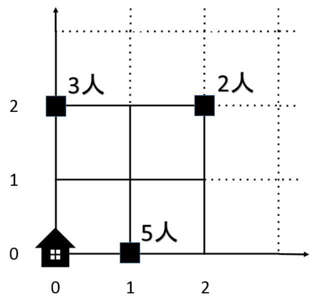

図 1: Percentile Mechanism の動作例（黒塗りの四角はエージェントの所在地，家はメカニズムが返す施設の配置位置を表す）

1. $\forall(s, t) \in \{+, -\}^2, T_{s,t}$
2. $T_{+,+} \wedge T_{-,-} \wedge \neg S_{+,-} \wedge \neg S_{-,+}$
3. $T_{+,-} \wedge T_{-,+} \wedge \neg S_{+,+} \wedge \neg S_{-,-}$

4. 戦略的操作不可能性

本章では，まず，既存研究で提案された戦略的操作不可能性を満たすメカニズム Percentile Mechanism [Xin 13] を紹介する．次に，Percentile Mechanism が本モデルにおいてパレート効率性を満たす必要十分条件を明らかにする．

4.1 Percentile Mechanism

Percentile Mechanism が戦略的操作不可能性，および，パレート効率性を満たすか否か考察する．

まず，Percentile Mechanism のメカニズムの仕様について説明を与える．メカニズムのパラメータとして $p = (p_x, p_y)$ $(0 \leq p_x \leq 1, 0 \leq p_y \leq 1)$ を持つ．エージェントの所在地の申告の組 Z を入力として施設の配置位置を決定する．与えられた入力から，施設の配置位置の x 座標を $a_x = t^x_{\lfloor (n-1) \cdot p_x \rfloor + 1}$ とする．y 座標に関しても同様にして，$a_y = t^y_{\lfloor (n-1) \cdot p_y \rfloor + 1}$ とする．以上より，施設の配置位置を $f_{per}^{(p_x, p_y)}(Z) = (a_x, a_y)$ とする．動作例を例 1 で示す．

例 1 メカニズムのパラメータを $(p_x, p_y) = (0.2, 0.3)$ とし，$N = \{1, \ldots, 10\}$，$z_1 = z_2 = z_3 = (0, 2)$，$z_4 = z_5 = z_6 = z_7 = z_8 = (1, 0)$，$z_9 = z_{10} = (2, 2)$ を入力として与える．この時，x 座標に関して $\lfloor 9 \cdot 0.2 \rfloor + 1 = 2$ なので，t_2^x のライン上に施設が配置される．y 座標に関して $\lfloor 9 \cdot 0.3 \rfloor + 1 = 3$ なので，t_3^y のライン上に施設が配置される．以上のことから施設の配置位置 $a = (0, 0)$ となる．図 1 に例 1 の図を示す．

Percentile Mechanism が戦略的操作不可能性を満たすことが文献 [Xin 13] で示された．

定理 2 (文献 [Xin 13]) 2 次元格子空間上で Percentile Mechanism は任意の $p = (p_x, p_y)$ に対して，戦略的操作不可能性を満たす．

4.2 パレート効率的な施設配置

本論文では，Percentile Mechanism がパレート効率性を満たすための必要十分条件を解明した．紙幅の都合上，証明は省略する．

Mechanism 1 Target Mechanism for grid

Require: Z
  if $\min_x \leq \alpha_x \leq \max_x$ **then**
    $a_x = \alpha_x$
  else if $\alpha_x < \min_x$ **then**
    $a_x = \min_x$
  else
    $a_x = \max_x$
  end if
  if $\min_y \leq \alpha_y \leq \max_y$ **then**
    $a_y = \alpha_y$
  else if $\alpha_y < \min_y$ **then**
    $a_y = \min_y$
  else
    $a_y = \max_y$
  end if
  return $a = (a_x, a_y)$

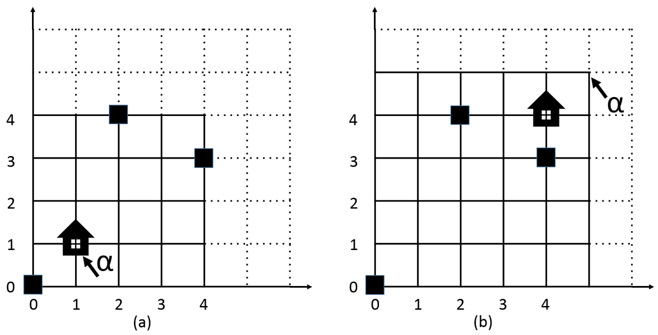

図 2: Target Mechanism for grid の動作例（α はパラメータの位置，黒塗りの四角はエージェントの所在地，家はメカニズムが返す施設の配置位置を表す）

定理 3 $f_{per}^{(p_x,p_y)}$ がパレート効率性を満たすための必要十分条件は $p_x = 0.5$ かつ $p_y = 0.5$ である．

5. 架空名義操作不可能性

本章では，架空名義操作不可能性を満たすメカニズムが，同時にパレート効率性を満たすか否か考察する．

5.1 Target Mechanism for grid

文献 [Todo 11, Moulin 80] で示されている，直線上で架空名義操作不可能性とパレート効率性を満たす Target Mechanism を，2 次元に拡張した Target Mechanism for grid を考察する．また，このメカニズムが架空名義操作不可能性および，パレート効率性を満たすか否か考察する．

まず，Target Mechanism for grid のアルゴリズムを Mechanism 1 に示す．$\alpha = (\alpha_x, \alpha_y) \in A$ はメカニズムの設計者が予め定めたパラメータとする．動作例を例 2 で示す．

例 2 格子のサイズを 7×7 とする．$N = \{1, 2, 3\}, z_1 = (0, 0), z_2 = (2, 4), z_3 = (4, 3)$ を入力として与える場合を考える．この時，$\min_x = 0, \max_x = 4, \min_y = 0, \max_y = 4$ となる．

Target Mechanism for grid のパラメータが $\alpha = (1, 1)$ の場合（図 2a），$\min_x \leq \alpha_x \leq \max_x$ であるから $a_x = \alpha_x$，また，$\min_y \leq \alpha_y \leq \max_y$ であるから $a_y = \alpha_y$ となる．したがって施設の配置位置は $a = (1, 1)$ となる．

Target Mechanism for grid のパラメータが $\alpha = (5, 5)$ の場合（図 2b），$\alpha_x > \max_x$ であるから $a_x = \max_x$，また，$\alpha_y > \max_x$ であるから $a_y = \max_y$ となる．したがって施設の配置位置は $a = (4, 4)$ となる．

図 2 にこれらの例の図を示す．

Target Mechanism for grid は架空名義操作不可能性を満たすがパレート効率性を同時には満たさないことを明らかにした．紙幅の都合上，証明は省略する．

定理 4 Target Mechanism for grid は架空名義操作不可能性を満たすが，パレート効率性を同時には満たさない．

5.2 Target Rule for $2 \times m$ grid

前節で Target Mechanism for grid は架空名義操作不可能性を満たすが，パレート効率性を同時には満たさないことを明らかにした．本節では，$2 \times m$ ($m \geq 2$) という限定的な格子空間上において，提案メカニズム Target Rule for $2 \times m$ grid が架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たすことを示す．

まず，Target Rule for $2 \times m$ grid のアルゴリズムを Mechanism 2 に示す．動作例を例 3 に示す．

Mechanism 2 Target Rule for $2 \times m$ grid

Require: Z
  $\alpha = (0, 0)$
  while $\alpha_x \leq m$ **do**
    if α がパレート効率的である **then**
      $a = \alpha$
      return a
    else
      $\alpha = (\alpha_x + 1, (\alpha_y + 1) \mod 2)$
    end if
  end while
  $a =$ エージェントが存在する唯一の点
  return a

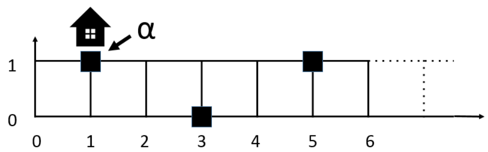

図 3: Target Rule for $2 \times m$ grid の動作例（α はパラメータの位置，黒塗りの四角はエージェントの所在地，家はメカニズムが返す施設の配置位置を表す）

例 3 $N = \{1, 2, 3\}, z_1 = (1, 1), z_2 = (3, 0), z_3 = (5, 1)$ を入力として与えた時，パレート効率的な配置位置は $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (3, 0)$ となる．そのうちはじめに α と重なるパレート効率的な配置位置は $(1, 1)$ である．したがって，施設の配置位置は $(1, 1)$ となる．この例を図 3 に示す．

Target Rule for $2 \times m$ grid はパレート効率性を満たす．メカニズムの性質上，施設をパレート効率的な位置に配置するため明らかである．

定理 5 Target Rule for $2 \times m$ grid はパレート効率性を満たす．

Target Rule for $2 \times m$ grid が架空名義操作不可能性を満たすことを解明した．

定理 6 Target Rule for $2 \times m$ grid は架空名義操作不可能性を満たす．

証明 紙幅の都合上，$a = (p, 0)$ $(p \geq 2)$ に施設が配置される以下の 2 つの場合のみを考える．エージェントが架空名義操作を行った後の施設の配置位置を $a' = (a'_x, a'_y)$ とする．

（1）a に施設が配置され，$a = (p, 0)$ を所在地とするエージェント i が存在する場合，i は明らかに架空名義操作を行う誘因を持たない．その他のエージェント j が $(p', 0)$ $(p' < p)$ または,$(p', 1)$ に架空名義を追加した場合，$a'_x \leq a_x$ となるため，$aR_{z_j}a'$ となる．また，上記の位置を架空名義を用いて申告しない場合，施設の配置位置に影響を及ぼさない．

（2）a に施設が配置されるが，a を所在地とするエージェントが存在せず，エージェントの所在地の申告の組 Z が以下の式を満たす場合を考える．式は，$\exists i, z_i = (p, 1)$ かつ $\exists j, \exists q > p, z_j = (q, 0)$ かつ $\forall k, \forall r > p, z_k \neq (r, 1)$ かつ $\forall h, z_h \neq (p-1, 0)$ である．なお，$(p-1, 0)$ にエージェントが存在する場合も考えられるが，ここでは考えない．$(p, 1)$ を所在地とする i が架空名義操作を行う場合を考える．$\exists x \in \phi_i, z'_x = (p, 1)$ の場合に，架空名義を用いて $\exists x \in \phi_i, \exists p' < p-1, z'_x = (p', 0)$ または $\exists x \in \phi_i, \exists p' < p-2, z'_x = (p', 1)$ を申告した場合，$a'_x \leq p-2$ となるため $aP_{z_i}a'$ となる．上記の位置を架空名義を用いて申告しない場合，施設の配置位置 $a' = (p-1, 1), (p, 0), (p+1, 1)$ のいずれかとなる．この場合，$aI_{z_i}a'$ となる．$\forall x \in \phi_i, z'_x \neq (p, 1)$ の場合に，架空名義を用いて $\exists x \in \phi_i, \exists p' < p-1, z'_x = (p', 0)$ または $z'_x = (p', 1)$ を申告した場合，施設の配置位置 a' に関して $a'_x \leq p-2$ となる．また，架空名義を用いて $\exists x \in \phi_i, \exists p' > p+1, z'_x = (p', 0)$ または $z'_x = (p', 1)$ を申告した場合，$a'_x \geq p+2$ となる．この時，$aP_{z_i}a'$ となる．また，同時に $\forall x (\neq i), z_x = (q, 0)$ となる場合に，架空名義を用いて $\forall x \in \phi_i, z'_x = (q, 0)$ という申告をした場合，施設の配置位置は $a' = (q, 0)$ となるため，$aP_{z_i}a'$ となる．また，上記の位置を架空名義を用いて申告しない場合，施設の配置位置 $a' = (p-1, 1), (p, 0), (p+1, 1)$ のいずれかとなり，$aI_{z_i}a'$ となる．次に $(q, 0)$ を所在地とする j が架空名義操作を行う場合を考える．架空名義を用いて $\exists x \in \phi_j, \exists q' \geq p, z'_x = (q', 0)$ または $z'_x = (q', 1)$ または $z'_x = (p-1, 0)$ となるような位置を申告した場合，施設の配置位置は $a' = (p, 0), (p+1, 1)$ のいずれかとなり，$aI_{z_j}a'$ となる． 上記以外の架空名義操作を行った場合，施設の配置位置 a' に関して $aP_{z_j}a'$ となる．

したがってこれらの場合に，いずれのエージェントも架空名義操作を行う誘因を持たない．

6. 結論

本論文では，戦略的操作不可能性や架空名義操作不可能性を満たすメカニズムがパレート効率性を同時に満たすか否か考察した．まず，パレート効率的な施設の配置位置が満たす条件を明らかにした．また，Percentile Mechanism が，限定的なパラメータの時，戦略的操作不可能性と同時にパレート効率性を満たすことを明らかにした．次に，直線上の Target Mechanism を 2 次元格子空間上に拡張したメカニズムは架空名義操作不可能性を満たすが，同時にはパレート効率性を満たさないことを示した．最後にサイズ $2 \times m$ の場合において，架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たすメカニズムの提案を行った．

今後の課題として以下の 2 つが挙げられる．1 つは，サイズ 3×3 以上の 2 次元格子空間上で，架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たすような施設配置を返すメカニズムが存在するか否か解明することである．もう 1 つは，複数の施設を配置する場合に，架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たすような施設配置メカニズムが存在するか否か解明することである．

謝辞

本研究は JSPS 基盤研究 (S) (24220003)，JST 国際科学技術共同研究推進事業 (戦略的国際共同研究プログラム) の助成を受けました．深く感謝致します．

参考文献

[Xin 13] Xin Sui, Craig Boutilier, and Tuomas W Sandholm. Analysis and optimization of multi-dimentional percentile mechanisms. In *Proceedings of the 23rd International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp.367-374, 2013.

[Todo 11] Taiki Todo, Atsushi Iwasaki, and Makoto Yokoo. False-name-proof mechanism design without money. In *Proceedings of the 10th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, Vol 2, pp. 651-658, 2011.

[Moulin 80] Herve Moulin. On strategy-proofness and single peakedness. *Public Choice*, Vol. 35, No. 4, pp. 437-455, 1980.

[Yokoo 04] Makoto Yokoo, Yuko Sakurai, and Shiegeo Matsubara. The effect of false-name bids in combinatorial auctions:New fraud in internet auctions. *Games and Economic Behavior*, Vol. 46, No. 1, pp. 174-188, 2004.

[Sonoda 16] Akihisa Sonoda, Taiki Todo, and Makoto Yokoo. False-name-proof locations of two facilities: economic and algorithmic approaches. In *Proceedings of the 30th conference on Artificial Intelligence*, pp. 615-621, 2016.

[Hans 92] Hans Peters, Hans van der Stel, and Ton Storeken. Pareto optimality, anonymity, and strategy-proofness in location problems. *International Journal of Game Theory*, Vol. 21, No. 3, pp.221-235, 1992.

[Klaus 07] Klaus Nehring and Clemens Puppe. Efficient and strategy-proof voting rules: A characterization. *Games and Economic Behavior*, Vol. 59, No.1, pp. 132-153, 2007.

[坂井 08] 坂井豊貴, 藤中裕二, 若山琢磨. メカニズムデザイン―資源配分制度の設計とインセンティブ. 2008.