

# 楽曲の木構造に対する代数的操作

## Algebraic Operation on Tree Structures in Music

東条 敏<sup>\*1</sup>    平田圭二<sup>\*2</sup>    松原正樹<sup>\*3</sup>    大村英史<sup>\*4</sup>  
Satoshi Tojo    Keiji Hirata    Masaki Matsubara    Hidefumi Ohmura

<sup>\*1</sup>北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究系  
JAIST, School of Information Science

<sup>\*2</sup>公立はこだて未来大学 複雑系知能学科 知能システムコース  
Department of Complex and Intelligent Systems, Future University Hakodate

<sup>\*3</sup>筑波大学図書館情報メディア系  
Faculty of Library, Information and Media Science, University of Tsukuba

<sup>\*4</sup>東京理科大学 理工学部 情報科学科  
Tokyo University of Science, Faculty of Science and Technology, Department of Information Sciences

In Generative Theory of Tonal Music, two kinds of tree structure appears: time-span tree and prolongation tree. Since these diagrammatic representations are not easy to handle, we consider to represent them in a formal, algebraic way. First, we need to fix the height of branch conjunction, that has been rather arbitrarily depicted, by the notion of Maximal Time-Span (MTS). Then, we represent the height in matrix; thus, we can treat trees as an element of linear algebra. In addition, various arrangements on tree can be represented in another linear transformation. Furthermore, the transformation from time-span tree to prolongation tree will also be represented by a formal procedure.

### 1. はじめに

Generative Theory of Tonal Music (GTTM)[5] においてはタイムスパン木 (Time-span tree) と延長的簡約木 (Prolongational tree) という二種類の木構造が楽曲から構成される。この木の書法においては、右分岐と左分岐に厳密な区別があり、かつ延長的簡約木のほうではさらに和声的制約において枝の接点に特定のマークが付けられる。延長的簡約木はタイムスパン木を再構成することで生成されるが、その際、楽曲のある区間で次に「重要な」ピッチイベントを選択するという操作があり、この重要度は枝の接点の高さで測られる。しかしながら GTTM においては木の枝の接点の高さは極めて恣意的に残されたままである。本稿では木の書法において厳密な制限を与え、木の編成と整形においてはすべて代数的に確立された方法でできることを示す。

### 2. タイムスパン簡約と延長的簡約

まずグループ解析の結果、グループ境界の構成が階層的であるため、このタイムスパン分析も階層性をなし、その結果タイムスパン木は一つの代表音を頂点として階層的に重要度を帯びることになる。図 1 においてはレベル *a* にある音が最も重要で、その下位にレベル *b*、さらに下位に *c* があると考えられる。逆に言うと、このレベルに従って曲の構造を簡約化 (reduction) していくのがタイムスパン簡約である。簡約の過程においてはレベルが上につれて曲は簡素化・抽象化され、オリジナルから遠ざかることになる。こうした簡約化が可能であるという仮説を強簡約仮説 (strong reduction hypothesis) と呼ぶ。この主張の背後には、聴者は音楽のすべての音の中から音楽の骨格を形成するように音を集めて心理的に構成するものであり、

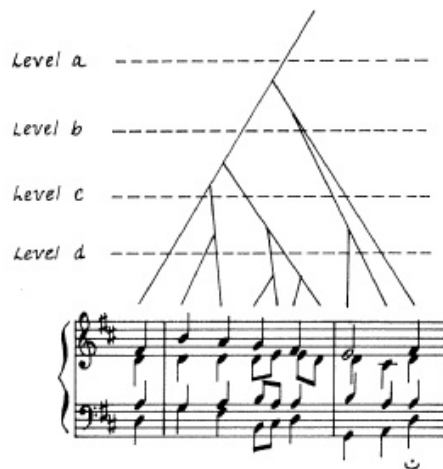


図 1: マタイ受難曲 ‘O Haupt voll Blut und Wunden’ のタイムスパン簡約 [5, p. 115]

その過程では自然に音に重要度の差異をつけ、重要な音が根幹構造を作る一方で、重要でない音はその根幹構造の中への単なる挿入音とするという考え方がある。

実際の楽曲をタイムスパン簡約する例を図 1 に示す。表層構造である楽譜を簡約していくと順に Level *d*, Level *c*, Level *b*, Level *a* のピッチイベント列が得られる。例えば Level *c* から Level *b* への簡約に注目すると、Level *c* にある 5 つのピッチイベントが Level *b* に簡約されると 2 番目と 3 番目のピッチイベントが捨象される。このように、簡約できる (reducible) 枝は末端の従属する枝だけである。

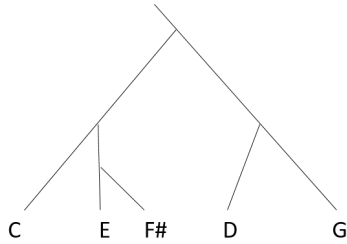


図 2: タイムスパン木の例

### 3. 木の表現

タイムスパン木および延長的簡約木を毎回グラフィックに表示していたのでは、テキスト処理も不可能であるし、木の木としての構成要件、すなわち木構造が整合的な構造をしているかどうかも明らかではない。さらに木を数学的演算の対象として表現しておけば代数的な操作において木の変形が可能になる。まず、二分木のトポロジーをナイーブに表現するには二つのピッチイベントの並びを括弧で示し、そのうちのどちらかがヘッドであるかを示せばよい。このヘッドの表示を例えば†(dagger) で表せば、 $CEF\sharp DG$  という音の並び (図 2) に対して、

$$(C^\dagger(E^\dagger F\sharp))(DG^\dagger)^\dagger$$

と表現しておけば足りる。

しかしながら、この表記は各ピッチイベントの音価 (duration) と、それに関係して木の枝の接合点の、木全体の高さに対する相対的位置において曖昧である。よってここでは音価に対応する概念を木の表現に加えることを試みる。

各ピッチイベントの最長タイムスパン (Maximum Time-span; MTS) とはあるピッチイベントが最も支配的である時間区間の長さである [1, 2]。すなわち最も弱いピッチイベントの MTS はその音符の音価であるし、木構造の頂点に立つピッチイベントの MTS はその木構造に相当する楽曲の長さ分に相当する。

楽曲の時間区間の長さはスコア上の拍数でも小節数でも数えることができるが、本稿では簡単のため拍数とする。MTS の長さはこのため離散的な整数値になる。一方、木構造全体の長さを 1 とし、部分木に相当する MTS の値を相対化し、各ピッチイベントに相当する MTS を 1 以下の分数で表示することも可能である。ここで次の定義を設けることにより、枝の接合点の高さの恣意性を排除する。

枝の接合点の高さはその枝の MTS の木全体のスパンに対する相対値であるとする。

この制約は枝の接合点が認知的に MTS を連想できるようにするためである。

図 3 は MTS を並べることにより木の表示を行ったものである。図では  $G, C$  の左端 (MTS の開始時点) がそろっていること、 $C, E, F\sharp$  の右端 (MTS の終了時点) と  $D$  の左端がそろっていることが縦の点線で示されている  $D$  と  $E$  をどちらを高く書くかについては、横棒の長さ (MTS) において枝の接点が表示されていると考えると、どちらか一意に決まる。すなわち図 2 の場合であれば  $D$  と  $E$  は同じ高さに書かれるべきである。

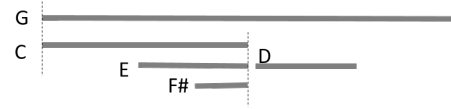


図 3: MTS による木の表示

### 4. Maximum Time-span を用いた木の行列表現

高さの拍数による表示 木の行列表現は [3] において提案されているが、これは単純に木の深さを整数値で順序づけしたものであった。これに対して本稿では MTS の値を陽に言及することで枝の接合点の高さと各音の音価 (ただし随伴する休符を含む) を表現している。

$$M = \begin{matrix} & C & E & F\sharp & D & G \\ \begin{matrix} C \\ E \\ F\sharp \\ D \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

図 4: 木の行列表現

図 4 においては  $C, D, E, F\sharp, G$  の各音がこの順序に並び 1, 0.5, 0.5, 1, 1 (拍) である。仮りにこの並びを 4/4 拍子 1 小節とするならば、一拍は四分音符、0.5 拍は八分音符である。ところが  $E$  が  $F\sharp$  を支配するために  $E$  の MTS は  $0.5 + 0.5 = 1$  であり、1 の高さで  $C$  に帰属する。さらに  $C$  は  $E, F\sharp$  合わせて MTS が 2 で  $G$  に帰属する。最後  $G$  は自分自身に MTS 4 で帰属しているとする。

なお木の枝の接合点の高さについては、[4] において次のよう提案されている。

- MTS が  $2^n$  拍  $\leq L_n < 2^{(n+1)}$  拍となる高さのレベル  $L_n$  を決定する。
- なお、カデンツを含む木の MTS は egg 等で接合されているイベントや従属されているイベントも含めて MTS を計算する。

この定義のように音価に対応する MTS を用いたことにより、木の接合点の高さの曖昧性を解消し、カデンツを考慮した安定的な簡約結果を生み出すことに成功した。これは文献 [3] のように木の深さを順序で表したものとより、似たような音価や MTS を同じ高さレベルに扱うことで木の安定性の面で整合性を取ることができた。一方で高さレベルを決定するのに 2 の累乗を用いているため、2 拍子や 4 拍子の楽曲にしか用いることができないという欠点があった。

本論文では音価の相対値を用いて楽曲の拍子を一般化し音価に相当する値を高さレベルの決定に用いることで音楽的にも数学的にも扱いやすいものとなっている。

高さの相対化 以下は木全体の高さを1として、各枝の接合点の高さを相対化した行列である。

$$\begin{array}{c} C \quad E \quad F\sharp \quad D \quad G \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

図4からは各ピッチイベントが持っていた音価が計算できることを示そう。行列の  $F\sharp$ ,  $D$  の列を見ると要素がすべてゼロであることから、これらのピッチイベントは自身に従属する枝を持たない。したがって  $E$ ,  $D$  が他の枝に帰属する高さがそのまま元の音価である。さらに  $F\sharp$  の音価がわかれば、 $F\sharp$  の帰属する  $E$  の MTS から  $E$  の元の音価も  $1/4 - 1/8 = 1/8$  と計算できる。これらの計算を再帰的に行うと、以下のように音価を計算できる。

$$\begin{array}{c} C \quad E \quad F\sharp \quad D \quad G \\ \hline 1 \quad .5 \quad .5 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

以上の議論は休符は仮定していないが、休符はそれが帰属するピッチイベントの音価に含めると考えることにする。

木の整合性条件 ここでは行列表現が一意的な木を保証するための条件を考察する。いま  $p_1, p_2, \dots, p_n$  をピッチイベントの時系列であるとする。またこのインデックス  $i$  によって構成される行列の要素を  $c_{ij}$  とし、 $p_i$  が  $p_j$  に接合する高さを表すものとする。

1. 各枝が必ず他の枝一つに帰属しなければならない。木を表す行列は行列の行の置換、あるいは列の置換のみによって対角行列に変形できる。この対角行列は列または行の定数倍のみによって単位行列に変形できる。
2.  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して  $i \leq j < k \leq l$  とする。このとき  $\{c_{jk}, c_{kj}\} > 0$  ならば  $\{c_{jk}, c_{kj}\} < \{c_{il}, c_{li}\}$  である。すなわち下方の部分木の MTS は上方の部分木の MTS より小さい。
3. さらにグループの階層性、すなわちグループは重複せず、隙間を空けず、上位グループ長は下位グループ長の和になっていることを要請する。これは与えられた木の行列から各ピッチイベントの元音価が（帰属する休符分含めて）一意に計算できることによる。

木の編集 木に対する操作のいくつかは木の行列に対する線形変換で表すことができる。

**reduction** 木の第  $k$  列がすべてゼロのとき、すなわち帰属する他の枝がなく、 $p_k$  が reducible であるとき、単位行列から  $(k, k)$  成分をゼロにしたもの(図5左)。を左からかけると第  $k$  ピッチイベントの reduction になる。

**flip**  $c_{ij}$  の値を  $c_{ji}$  に転置することによって  $p_i$  と  $p_j$  の枝の帰属関係を反転し、flip を実現できる(図5右)。この操作を reducible (下に帰属する枝のない)な枝からボトムアップに再帰的に連鎖することにより、楽曲の逆行(retrograde)を実現する。

$$\begin{array}{c} \dots \quad k \quad \dots \\ \vdots \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ k \end{array} \quad \begin{array}{c} \dots \quad i \quad \dots \quad j \quad \dots \\ \vdots \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ i \\ j \end{array}$$

図5: reduction と flip

## 5. 延長的簡約への基礎

枝の到達可能性 いま  $i < j < k$  とするとき、 $c_{ij} > 0, c_{jk} > 0$  であるということは、 $p_i$  は  $p_j$  に接合し、 $p_j$  は  $p_k$  に接合していることを意味する。するとインデックス  $j$  を媒介して  $p_i$  は2ステップで  $p_k$  に従属することがわかる。いま簡単のため、行列の要素が正であるときを1と書き  $1 + 1 = 1$  のブール値による行列のかけ算を定義する。図4の  $M$  を2回かけ合わせると、

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、 $C, E, D, G$  が2ステップで  $G$  に吸収されることがわかる。また  $M^3 = (0 \mid 1)$  ( $0$  は5行4列のゼロ行列、 $1$  は長さ5の列ベクトル)により、すべての枝が  $G$  に従属することがわかる。すると、

$$\tilde{M} \equiv \sum_{k=1}^n M^k = M + M^2 + \dots + M^n$$

はある枝が上方に向かって従属接続する枝のすべてを表示することができる。

延長的簡約への基礎 いま和声解析によって  $C, E, F\sharp, D, G$  の音列に

$$\mathbf{v} = (\text{IV}, 0, 0, \text{V}, \text{I})$$

という機能が見つかったとしよう。ここで IV はサブドミナント、V はドミナント、I はトニックとし、0 は特定の和声機能を持たないことを示す。このとき、行列とベクトルの演算

$$M\mathbf{v} = (\text{I}, \text{IV}, 0, \text{I}, \text{I})$$

は  $C, D$  がそれぞれ I に、 $E$  が IV に従属することを意味する。また  $M^2$  に対してこの操作を行うと、

$$M^2\mathbf{v} = (\text{I}, \text{I}, 0, \text{I}, \text{I})$$

より、 $E$  も上層部では機能 I に吸収されることを意味する。もちろん、 $M^3$  ではすべてのピッチイベントが I の影響下にある。

$$M^3\mathbf{v} = (\text{I}, \text{I}, \text{I}, \text{I}, \text{I})$$

この和声機能下の影響をすべてのレベルの音に再帰的に割り当てるためには、 $\tilde{M}$  に  $\mathbf{v}$  をかければよい。

$$\tilde{M}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{IV} + \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \end{pmatrix}$$

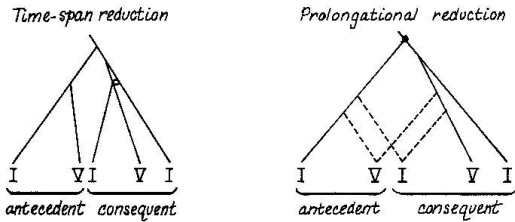
本研究では、この行列とベクトルの間の足し算を安定性 (*stability*; *sbl*)

$$IV + I \equiv sbl(IV, I)$$

により定義する。安定性とは GTTM の延長的簡約において、

単純進行 (progression)	和声の変化
弱延長 (weak prolongation)	同じ和声のバス変化
強延長 (strong prolongation)	同じ和声, 同じバス

とするとき、(1) 分岐条件 (右分岐の強延長 > 右分岐の弱延長 > 右分岐の進行, 左分岐の進行 > 左分岐の弱延長 > 左分岐の強延長), (2) ダイアトニックセット条件, (3) メロディー条件, (4) 和声条件で決まるものである。タイムスパン木から延長的簡約木の編集とは、以上の安定性条件により、最も安定度の高い枝に接合をし直す作業である [5, p. 223].



いま簡単な例として  $C, G, C$  という音列に対して、

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

という二種類の木を考え、さらにこの音列が  $I, V, I$  の機能を持つものとする。このとき  $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$  に対して  $\mathbf{v} = (I_1, V, I_2)$  をかけ合わせると安定性を評価することができて、

$$\tilde{M}_1 \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ sbl(I_1, I_2) \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}_2 \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ sbl(V, I_2) \\ I_2 \end{pmatrix}$$

のうち、 $sbl(X, Y)$  の比較とともに、 $\tilde{M}_1 \mathbf{v}$  と  $\tilde{M}_2 \mathbf{v}$  の比較も可能となる。

このアルゴリズムは、枝の接合の高さが明確になったことによって実現可能であるが、上記安定度評価においては評価基準が複数あるためにパラメータによる重みづけが必要である。

ここで延長的簡約木を線形に表記する方法として二次記法 (secondary notation) を導入しておく。二次記法は木に代えて直接音符と音符をスラーで結ぶ記法であるが、強延長では点線のスラー、弱延長と進行では実線によるスラーを木の枝接合に合わせて階層的に書く方法である (図 6)。

二次記法への応用 二次記法はやはり行列表記が可能で、図 6 に対しては、図 7 のような行列が可能であるが、さらに各接合点に  $p$ (progression),  $w$ (weak prolongation),  $s$ (strong prolongation) をタグ付けしたものである。



図 6: 二次記法 [5, p. 202]

$$\begin{matrix} F\sharp & H & A & G & F\sharp & E & E & F\sharp \\ F\sharp & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (8, s) \\ 0 & 0 & (1, p) & 0 & 0 & \dots \\ A & (3, w) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ G & 0 & 0 & 0 & (2, p) & \dots \\ F\sharp & 0 & 0 & 0 & (5, s) & \dots \\ E & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ E & & & & & \\ F & & & & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

図 7: 二次記法の行列表現

## 6. おわりに

本稿においては GTTM における木構造の行列表現を考え、その間の演算や和声情報のベクトルとのかけ算がどういう意味を持つか考察した。今後は図 4 から安定性の数値比較と代数的な操作のみで図 7 を求めるシステムを実装する。

## 参考文献

- [1] Tojo, S., Hirata, K. Structural Similarity Based on Time-span Tree. In *Proceeding of CMMR2012*, pp. 645660. London (2012)
- [2] Hirata, K., Tojo, S., Hamanaka, M.: Cognitive Similarity grounded by tree distance from the analysis of K.265/300e. In *Proceeding of CMMR2013*, pp. 415430. Marseille (2013)
- [3] 松原正樹, 東条 敏, 平田圭二. GTTM タイムスパン木における構造レベルの導入と代数表現. 第 29 回人工知能学会全国大会予稿集, 2CS-OS-21b-4 (2015)
- [4] Matsubra, M., Kodama, T., Tojo, S. Revisiting Cadenential Retention in GTTM. In *Proceedings of KSE/IEEE 2016*, (2016)
- [5] Lehrdahl, F. and Jackendoff, R. *A Generative Theory of Tonal Music*, The MIT Press, Cambridge (1983)