1C3-3

仮定概念を必要とする算数文章題の問題内構造と問題間構造のモデル化と利用可能性の考察

Modeling of inner structure and outer structure of arithmetic word problem required the assumption concept and considerations of availability for learning

山本 晏宏[*1] 林 雄介[*1] 平嶋 宗[*1]
Yasuhiro Yamamoto Yusuke Hayashi Tsukasa Hirashima

[*1] 広島大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering Hiroshima University

In arithmetic problems, there are problems where, alongside solving the arithmetical process, there is also a certain process that binds the sentences of the problem to an arithmetical representation. Presently, in the present education systems in Japan, there are many solutions to solve certain specific problems, what this work proposes to do are to transform the structure of the problem in to a new model. The objective is to deepen the understanding of the underlying process that binds the word sentences of the problem and the corresponding arithmetical representation.

1. はじめに

人の思考を情報に対する操作であると仮定することは，人工知能や認知科学においてしばしば用いられる基本的な仮定の一つになっている．この仮定に基づくと，(1)情報，と(2)操作，の二つが思考を分析・モデル化する際の対象となる．このうち，「情報」を中心として分析・モデル化する方法が情報構造指向アプローチとなる[Carbonell 70, 平嶋 13, 平嶋 15]．情報構造指向アプローチでは，人の思考の複雑さを，主に思考対象の複雑さと捉える．これは，人の思考において特徴的な活動が見られた場合，それを思考対象の情報構造の特徴の表れと捉えることになる．学習・教育の文脈において行われている課題分析にこのアプローチを適用すると，課題の難しさや他の課題との関係，あるいはある課題が難しい場合にそれを簡単化する方法などが情報構造に基づいて導くことが可能となる．また，学習者の思考はこの情報構造に対する構造的操作と定式化することで，学習者の振る舞いの診断やフィードバックの生成も行うことができるようになる．本研究は，算数の文章題の学習において最終段階で学ぶものとされる鶴亀算の問題などの，特殊な解法で解くものとされている問題を，この情報構造指向アプローチに基づいて分析し，学習支援の対象にする試みである．

[文部科学省 03]は小学校から中学校への進学において，授業の理解度や学習意欲などが中学生になると肯定的意見の割合が低下する傾向にあるという問題を報告している．そのため小学校教育から中学校教育への接続が求められ，多くの研究が行われている．また，“ 指導要領上、例えば移行するのが困難と言われる算数と数学など、小学校と中学校の教科ごとのつながりを考えていくことが重要” [文部科学省 12]とあるように，算数から数学への接続が困難であると考えられる．

方程式として表した場合でも，未知数を求めるために代数的な操作(移項，両辺の等倍，因数分解)を必要としない場合は，算数においても，既知の数量から求められる数量を段階的に計算することで，答えとなる数量を導くことができる．したがって，算数的に考えても特に支障なく解決可能であるといえる．しかしながら，代数的な操作を必要とするような問題の場合，代数を使わずに解く場合には，特殊な操作が必要となる．鶴亀算などと呼ばれる一群の問題と解法がそれらである．それらの問題は総称して，特殊問題と呼ばれている[山本 15]．特殊問題のうち，鶴亀算等のいくつかの種類の問題は，2元1次方程式の特定の形式(係数の性質)で特徴づけることが可能となる．本研究では，これら特殊問題を計算手続としての解法ではなく，問題の持つ情報構造として特徴付ける(問題内構造)ことで，問題間の関係付け(問題外構造)を試みる．このために導入している概念が，「仮定概念」である．この仮定問題を導入して解決する問題を，ここでは「仮定問題」と呼ぶことにする．

2元1次連立方程式とは，ある問題の状況が存在し，未知数が 2 つ存在しており，ある一定の数量関係が与えられている場合に未知数を求める手法である．鶴亀算や消去算などの本研究で対象とする仮定問題は問題の状況は等しく，未知数や与えられた数量関係の組み合わせが異なることだけの問題となる．つまりある数量関係の組み合わせに対して算数として解を導くことが可能な問題状況(つまり問題)が鶴亀算や消去算といった各種の仮定問題になる．

これらの仮定問題の学習では，特定の問題パターンに対する特定の計算手続として解法が教えられているため，不適切といえる部分があった．このような学習は，仮定問題に対する道具的な理解[Skemp 76]を取り扱っているとは言えても，関係的理解につながるものにはなっていなかったといえる．仮定問題を算数的な数量概念間の演算関係として情報構造化し，各種の問題間の関係までも把握できるようになれば，関係的理解の段階に進むことができると期待できる．また，問題を理解し解決することが，問題が含んでいる数量関係を把握することが重要であり，計算手順を適用することはその結果であることを意識させることができれば，算数の文章題と数学の文章題への橋渡しとして有効であることが期待できる．

以下本稿では，2元1次連立方程に対応した算数の問題の定義，個々の問題間の定義，つまり問題内の構造と問題間の構造の定義を行う．

2. 解法の定着

算数文章題の理解には問題に対しての理解の深さを表すことになる道具的理解と関係的理解，また問題に対して理解の幅の広さを表す内的理解と外的理解が存在する．本章ではそれぞれについての説明を行う．

連絡先：山本 晏宏，広島大学大学院工学研究科
学習工学研究室，東広島市鏡山一丁目4番1号，
(082)424-7505，y-yama@lel.hiroshima-u.ac.jp

2.1 道具的理解と関係的理解

［Skemp 76］は理解を道具的理解と関係的理解の2種の理解状態があると説明している．道具的理解とは単に規則を記憶し，規則を用いる状態である．一方，関係的理解は規則自体の意味を理解し，規則を適用する理由も分かっている状態であるとして，道具的理解よりも関係的理解が重要であるとしている．ここで算数の分野にそれぞれの理解を当てはめてみると，道具的理解は単に解法を覚えそれを用いる状態であり，関係的理解は問題における概念間の演算関係から解法を導くことができる状態であると考えることができる．つまり，道具的理解は覚えた解法が適用できる問題をその問題が持つ特徴から判別できるようになっているものの，なぜその解法で問題が解けるかはわかっていない状態であるといえる．それに対して，関係的理解は文章中に出現する数字やキーワードよりもより抽象的である概念間の演算を読み取り，その関係に基づいてその解法が使える理由を判断できている状態であるので，道具的理解よりも問題に対して深く理解していると考えられる．

2.2 内的理解と外的理解

［Brown 74］は理解を内的理解と外的理解の 2 種の理解が存在すると説明している．内的理解は解法とその適用対象の問題の理解を意味し，外的理解はその解法が適用できない問題との関係まで含めた理解を意味する．

2.3 連立方程式と算数における理解

数学における連立方程式と算数における特殊算で同じ数量関係を表すものでも，代数的な操作では解を導くまでの操作に説明をつけることが出来ない．例として，2x+4y=20 と x+y=6 の 2 つの数量関係を持つ連立方程式を考える．これを代数として問題の解を導くには加減法を用い x+y=6 の両辺に 2 を掛けることで容易に導くことができる．しかしながら算数においては，この問題のオブジェクトが仮にツルとカメであるとすると，ツルとカメの匹数が未知数になっている場合には x+y=6 の両辺に 2 を掛ける操作は概念的に「全てツルであるとすると足の合計本数は 12 本」という操作になるが，一方でツルとカメのそれぞれの足の本数が未知数になっている場合では「ツルとカメの足の合計がそれぞれ 2 倍の場合」といった様に行っている操作の概念的な意味が全く異なっている．代数では行っている操作に対して概念的な説明を立てることが出来ず，問題に対する操作の理解に関しては不十分であると考えられる．

現状の連立方程式と算数における関係を下図に示す（図1）．下図における縦の関係の理解が関係的理解を横の関係が外的理解について表現している．実線で書かれている部分が現状，定義されている問題・関係であり点線で書かれている部分が現状定義されておらず，本研究で定義を行う問題である．代数における連立方程式では多くの場合数量関係の組み合わせで問題を区別していないことから，与えられた数量関係と解法をそれぞれの問題で何らかの関連付けを行うことができていると考えられる．一方算数においては，鶴亀算や消去算の数量関係や解法においての関係が一般には用いられることはなく，その他の連立方程式では表現可能である問題が定義されていない．本研究の目的は図1の点線部分の定義を行う事になる．また，図1には 3 種の問題のみの関係を表現しているがこれら以外の数量関係を持った問題も数多く存在していると考えられ，問題の範囲についても定義を行う．

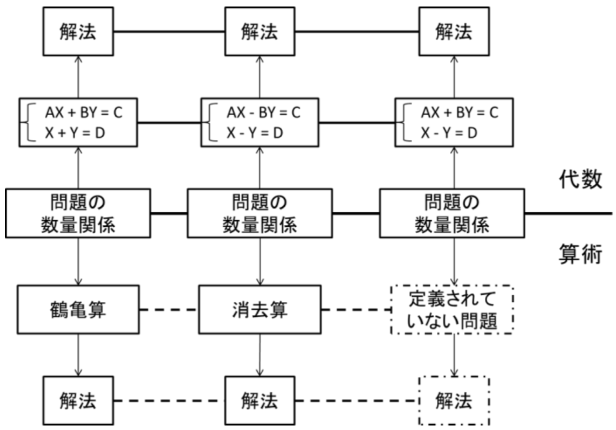

図1：現状の代数と算術における関係

3. 算数三角ブロックと発見的問題

3.1 算数三角ブロックモデル

算数文章題の問題解決過程は，問題理解過程である変換過程，統合過程と問題解決過程であるプラン化過程と実行過程にわけられる．この中で統合過程において問題で与えられた数量関係を整理して解法を導くとされている．この統合過程は頭の中で行われることなので，数量関係に関する支援は困難であると言われていた［Polya 54, Mayer 92, 坂本 93,多鹿 95］．

統合過程の外化モデルとして言葉の式表現を用いた単一の二項演算を基本とした三つ組構造（以下では算数三角ブロック，もしくは単に三角ブロックと呼ぶ）が提案されている［尾土井 13, Hirashima 15］．単一の三角ブロックは四則演算のいずれかの演算子を持っており，その演算子によって三角ブロックの各頂点に配置される3つの概念の数量関係を表現する（図2）．また複数の三角ブロックにおいて，共有される概念の介するとことで二項演算以上に複雑な演算も表現可能である（図3）．

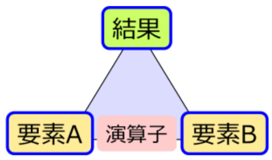

図2：三角ブロックでの二項演算表現

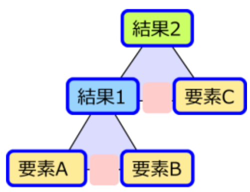

図3：三角ブロックでの階層的表現

3.2 特殊問題

算数三角ブロックモデルでは，問題文に明示されている概念とそれを用いることで導くことができる概念を用い統合できる問題，つまり演繹的に統合できる問題を取り扱っていた．しかしながら算数文章題においては演繹的に統合することが出来ず，特殊な概念の導入が必要になる問題も存在する．その一例として先に述べた鶴亀算が存在する．鶴亀算は演繹的に統合を行った場合ひとつのまとまりとして統合することが出来ず解を導くこ

とが出来ない．そこで[竹内 14]らはこのような問題を「すべてツルと仮定した時の足の総本数」といった問題文中に明示された概念からは導くことができないような特殊な概念を用いることで統合が可能になり，1つの三角ブロックとして構造記述可能な問題と定義している．また，このような仮定概念を導入する前の統合の形を演繹的構造（図4），導入後の統合の形を発見的構造（図5）と定義している．ここで演繹的構造とは問題文で与えられた数量関係を意味し，発見的構造とは演繹的構造から得られる数量関係から解法を導くことで得られる数量関係のこと指すと考えることができる．これは，特殊問題についても，特殊概念を導入することで，一般的な問題と同様に演繹的に統合することができるようにしていることになり，一般問題と特殊問題の接続を行っていると位置づけることができる．

平嶋らが提案した特殊問題の構造的表現[Hirashima 90, 平嶋 92]は，これらの数量関係を縮退させたものであり，道具的理解に使われる問題の特徴づけを表現したものと位置付けられることになる．この表現との対比で言うと，本稿で提案している表現はより関係的理解に近づいたものということができる．

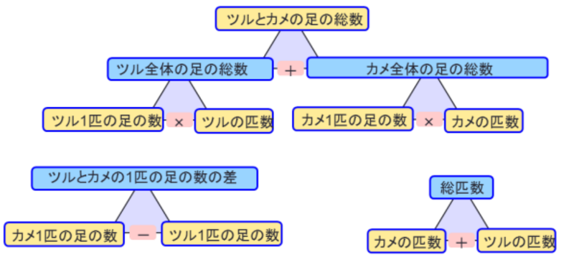

図4：演繹的構造

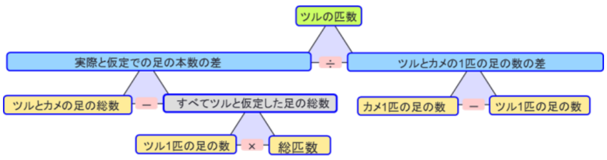

図5：発見的構造

4. 問題の分析

本章では，連立方程式における数量関係の変形と算数における操作を比較することで対象となる問題が算数におけるどのような問題であるかを定義し，定義された問題がどれほどのパターンが存在するかを確認する．

4.1 数量関係の変形と仮定

連立方程式では解法の一部に数量関係の両辺に任意の値を掛けるや数量関係から得られる結果を未知数に代入するといった代数的な数量関係の操作が存在する．この代数的操作が算数におけるどのような操作に対応しているか分析することで対象となる問題が算数においてどのような問題であるかを定義する．既に連立方程式で解くことができることが分かっている鶴亀算を例にあげて説明する．例として次のような問題を考える，「ツルとカメが合わせて7匹います．足の数は合わせて20本です．ツルとカメはそれぞれ何匹いますか」．算数においてのこの問題の解法は，最初に「全てをツルとした場合の足の本数」を考える必要がある．一方，代数での数量関係の操作は加減法と代入法の 2 種に大別でき，問題文から得られるツルの匹数をx，カメの匹数をyとした時，加減法の場合は数量関係 x+y=7 に対して両辺に 2 を掛けることになる．この時鶴亀算においての仮定をした場合の数量関係も 2x+2y=14 となり，代数における数量関係の操作と等しい結果を得ることができるため，加減法の操作の数量関係の操作は鶴亀算おいて仮定を用いることと等しいことが解る．代入法においても仮定をした後に未知の値を既知の値で置き換えることと等しい結果になるため，代入法も鶴亀算においての仮定することと等しいことが指摘できる．その後の操作は負の値が出現しない限り，算数においても代数の操作を説明することができる．また，仮定することで，消去算や和差算といった 2 元 1 次連立方程式で表現することができるそれぞれ独立した解法で説明されている特殊問題を統一した解法で表現することが出来た．したがって対象となる算数の問題は鶴亀算と同様に仮定を用いる問題であるといえる．

4.2 問題内構造の定義

本節では対象となる問題のパターンを数量関係の組み合わせから考える．対象となる問題は大きく分けて 2 パターン存在し，1 つ目のパターンとしては，2 つのオブジェクトが存在し，オブジェクトはそれぞれ 2 つの数量を持つ．例えばツルとカメがオブジェクトとして存在した場合，ツルは 4 匹で 1 匹当たり足の本数が 2 本，カメは 3 匹で 1 匹当たり足の本数が 4 本の様に考える．そこから合計匹数は 7 匹のような考えられる数量関係が導かれる．それぞれのオブジェクトが持つ数量の 1 つを未知数にすると，導かれていた数量関係が未知数を含んだものになる．その数量関係から，2 つの未知数が含まれているものを 2 つ選択することで問題になる数量関係からの組み合わせを定めることができる．数量関係の選択を変更することで鶴亀算や消去算だけでなく和差算や差集め算といった仮定を用いる問題も作成可能である．ここで，それぞれの作成した問題の元になっている数量関係の状況は等しいため，算数のこれらの問題は状況が等しく与えられた数量関係が異なる場合に解を導く方法として鶴亀算や消去算といった特定の方式が設定されていると言える．2 つ目のパターンとしては，1 つ目のパターンの状況に加えて，未知数は等しいがもう一方の数量が異なる状況の 2 つの状況を考える．それぞれの状況から未知数を 2 つ含んだ数量関係を選択することで，問題の作成が可能である．作成した問題はオブジェクトやオブジェクトの持つ数量などの表層的な情報も等しく，与えられた数量関係のみが異なるためより数量関係に着目でき，外的理解促進が期待できると考えられる．

4.3 問題のパターン

数量関係の組み合わせにより作成した問題を下図（図6）に示す．それぞれの表は未知数の設定が異なっており，左から未知数が共に匹数の場合，未知数が共に足の本数の場合，未知数が匹数と足の本数の場合となっている．また，これらの問題の中には，「全てをツルとする」場合と「ツルとカメが同じ匹数であるとする」場合の 2 種の仮定が存在している．これらの仮定は与えられた数量関係によってどちらを使用するか異なっているため，個々の問題を解く際に道具的な理解では不十分で問題の数量関係から解法を導く関係的理解が促進できると考えられる．

4.4 問題外の構造

演習において，外的理解の促進を取り入れるためには問題外の構造を定義しておく必要がある．前節で述べたそれぞれの問題には，同じ表内には未知数が等しく，数量関係が異なるという関係があり，異なる表内には未知数は異なるが数量関係が等しいという問題が存在する．つまり問題の未知数，数量関係のどちらかを変更することで異なる問題が作成できる．したがっ

て問題内構造の共通点と差分で問題間の関係を結ぶことができる.

未知数が
匹数and匹数

数量関係	問題の名称
AX + BY = C AX − BY = D	和差算
AX + BY = C X + Y = D	鶴亀算
AX + BY = C X − Y = D	未定義
AX − BY = C X + Y = D	弁償算
AX − BY = C X − Y = D	差集め算
X + Y = C X − Y = D	和差算
AX + BY = C DX + EY = F	未定義
AX + BY = C DX − EY = F	未定義

未知数が
足の本数and足の本数

数量関係	問題の名称
AX + BY = C AX − BY = D	和差算
AX + BY = C X + Y = D	消去算
AX + BY = C X − Y = D	未定義
AX − BY = C X + Y = D	未定義
AX − BY = C X − Y = D	未定義
X + Y = C X − Y = D	和差算
AX + BY = C DX + EY = F	消去算
AX + BY = C DX − EY = F	未定義

未知数が
匹数and足の本数

数量関係	問題の名称
AX + BY = C AX − BY = D	和差算

図6：問題のパターン

5. まとめと今後の課題

本研究では，算数三角ブロックモデルに，特殊概念を導入することで，一般的な算数文章題と特殊問題との接続，および中学数学における連立方程式への接続を可能にする算数の問題の構造定義を行った．構造定義では，問題内の定義と問題間の定義を行うことで算数においての関係的理解と外的理解を促進することが可能であると考えられる.

今後の課題としては，定義を行った構造を用いることで演習システムの設計・開発を行い，システムを用いた活動が可能であるかどうか検証すると共に今回行ったモデルの正当性も測る必要がある.

参考文献

［Brown 74］Brown, S. I, “Musing on Multiplication, Mathematics Teacher”, No. 69, pp.26-30.(1974).

[Carbonell 70] Carbonell, J. R.: Ai in CAI: an artificial intelligence approach to computer-assisted instruction. IEEE Transaction on Man- Machine Systems, Vol.11, No.4, pp.190-202(1970).

［Hirashima 90］ Hirashima, T. Nakamura, Y., Ikeda, M., Mizoguchi, R.: A cognitive model for ITS, Proc. of ARCE, 141-147(1990).

［平嶋 92］平嶋宗，中村祐一，池田満，溝口理一郎，豊田順一, ITS を指向した問題解決モデル MIPS, 人工知能学会誌 7 (3), 475-486(1992).

[平嶋 13]平嶋宗，学習課題の内容分析とそれに基づく学習支援システムの設計・開発：算数を事例として，教育システム情報学会誌，Vol.30, No.1, pp.8-19(2013).

[平嶋 15] 平嶋宗，「学習課題」中心の学習研究 ―情報構造としての学習課題の再定義と構造操作としての学習活動の設計― , 人工知能学会誌，Vol.39,No.3,pp.277-280(2015).

[Hirashima 15] Tsukasa Hirashima, Yusuke Hayashi, Sho Yamamoto, Kazuhisa Maeda , Bridging Model between Problem and Solution Representations in Arithmetic/Mathematics Word, Proc. of ICCE2015, 9-18(2015).

[Mayer 92] Mary Hegarty，Richard E.Mayer，and Carolyn E.Green，“Comparison of Arithmetic Word Problems: Evidence From Students，” Eye Fixations，Journal of Educational Psychology，Vol.84，No.1，76-84(1992)

［文部科学省 03］ “「学校教育に関する意識調査」（中間報告）”, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/004/siryo/03091801/005/001.htm

［文部科学省 13］“初等中等教育分科会（第 80 回） 配付資料 2 小中連携、一貫教育に関する主な意見等の整理 ”, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryo/attach/1325893.htm

[Polya 54] George Polya, “いかにして問題をとくか” 柿内賢信訳, 丸善, (1954)

[坂本 93] 坂本美紀, “算数文章題の解決過程における誤りの研究”, 発達心理学研究, 第 4 巻, 第 2 号, 117-125, 1993

[山本 15]山本晏宏，山元翔，林雄介，平嶋宗，”数量関係統合の外化システムを用いた発見的概念を必要とする算数文章題の構造共通性の認識支援の試み”, 2014 年度 JSiSE 学生研究発表会，pp.135-136,(2015).

[尾土井 13] 尾土井健太郎,山元翔,平嶋宗:“算数文章題の統合過程のモデル化とシステムによる外化支援の実現”,2012 年度 JSiSE 第 6 回研究会,(2013)

［Skemp 76］ Skemp, R, “Relational Understanding and Instrumental Understanding. Mathematics Teaching”, No.77, pp.20-26(1976).

［多鹿 95］ 多鹿秀継:“算数問題解決過程の分析”, 愛知教育大学研究報告, 44, pp. 157-167, (1995)

［竹内 14］竹内俊貴，古久保和仁，小田拳太，林雄介，平嶋宗：“発見的解法を必要とする算数文章題を対象とした数量関係的統合の外化支援”，JSiSE2013 年度第 6 回研究会，(2014).