

# モデルと Unsat Core を利用した MaxSAT ソルバーの試作

An Implementation of a MaxSAT Solver with Models and Unsat Cores

越村三幸

Miyuki Koshimura

九州大学 大学院システム情報科学研究所

Faculty of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

QMaxSAT is a typical satisfiability-based MaxSAT solver which solves a series of satisfiable instances until an unsatisfiable instance is generated. This paper introduces an unsatisfiability-based function into QMaxSAT in order to utilize its features. We evaluate the new QMaxSAT by submitting both old and new QMaxSATs to the 2015 Max-SAT Evaluation.

## 1. はじめに

命題論理の充足可能性判定問題 (SAT) は、人工知能および計算機工学における基本的な問題である。MaxSAT (Maximum satisfiability problem) は SAT を最適化問題に拡張したもので、SAT では解 (モデル) に優劣はないが MaxSAT にはあり、最適解が MaxSAT 解となる。

我々は MaxSAT ソルバー QMaxSAT[2] を開発している。QMaxSAT は SAT ソルバーを推論エンジンとして利用し、これを繰り返し呼ぶことによって MaxSAT 解を求めている。このような MaxSAT ソルバーを SAT-based と呼ぶ [1]。SAT-based ソルバーは、大きく二つに分けられる。一つは SAT モデルを利用するもの (以下 satisfiability-based)、もう一つは unsat core を利用するもの (以下 unsatisfiability-based) である。QMaxSAT は前者に属する。

Satisfiability-based / unsatisfiability-based ソルバーは充足可能 (satisfiable) / 充足不能 (unsatisfiable) SAT インスタンスを処理していく。各インスタンスは、その直前のインスタンスに基数制約を加えて生成される。計算は充足不能/充足可能なインスタンスが見つかるまで続く。そして、最後の充足可能インスタンスのモデルが MaxSAT 解となる。

QMaxSAT は、代表的な satisfiability-based ソルバーであるが、毎年開催される MaxSAT 評価会 MaxSAT Evaluation では、近年、unsatisfiability-based ソルバーが優勢である。そこで我々は、QMaxSAT の処理に比較的容易に導入でき、unsatisfiability-based の利点も享受できる手法の検討を行った。本稿では、その手法の紹介と評価について述べる。

## 2. QMaxSAT

MaxSAT では、問題はハード節とソフト節の集合として表される。ソフト節には重みがあり、重みは正整数で表される。MaxSAT の目的は、変数割り当ての中で、全てのハード節を満たし、かつ満たされるソフト節の重みの総和が最大となるものを見つけることである。本稿では、ソフト節  $C$  とその重み  $w$  のペアを括弧で囲って  $(C, w)$  と表す。

$\phi$  をハード節の集合  $H$  とソフト節の集合  $S$  からなる問題とする ( $\phi = H \cup S$ )。また、 $S$  は  $n$  個のソフト節  $(C_i, w_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) からなるものとする ( $S = \{(C_1, w_1), \dots, (C_n, w_n)\}$ )。

この時、 $n$  個の新しい変数<sup>\*1</sup>  $b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を導入して、新しい  $n$  個の節  $C_i \vee b_i$  を作り、その集合を  $S^b$  と標記する ( $S^b = \{C_1 \vee b_1, \dots, C_n \vee b_n\}$ )。  $H$  と  $S^b$  の節からなる節集合  $\phi^b (= H \cup S^b)$  のモデルの中で、 $\sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i$  を最小とするものが  $\phi$  の MaxSAT 解となる。

図 1 に提案する QMaxSAT 手続きを示す。1~3 行目で初期値の設定を行っている。3 行目の下界と上界は、求める解候補で満たされないソフト節の重みの総和の下界と上界のことで、下界は 0 に、上界はソフト節の重みの総和に 1 を加えたものに初期設定される。MaxSAT 解における満たされないソフト節の重みの和  $Ans$  は、 $L \leq Ans < U$  の範囲にある。SAT ソルバーの結果が充足可能であれば上界が、充足不能であれば下界が更新され、下界が上界に達すると手続きは終了し (4 行目)、最後の SAT 解が MaxSAT 解となる (20 行目)。

6 行目の `solve(A, ass)` が SAT 呼び出しで、 $A$  が充足可能性判定の対象となる節集合、`ass` が判定に用いる仮定 (assumption) で、仮定はリテラルの連言で与えられる。5 行目で仮定を設定しており、初期値は全ての阻止変数の否定の連言である。ここで、SAT ソルバーは充足可能性を判定するだけでなく、充足不能のときに、仮定の中で unsat core に含まれるリテラルの集合<sup>\*2</sup>を返す。多くの SAT ソルバーは、この機能を備えている。6 行目の `(rst, B1)` の `rst` が充足可能 (`sat`) か否 (`unsat`) かを示し、`unsat` の時には  $B_1$  が unsat core に含まれる仮定のリテラル集合を表す。このとき次式 (1) が成立つ。

$$A \wedge \bigwedge_{b_i \in B_1} \neg b_i \quad \vdash \quad \perp \quad (1)$$

SAT 呼出の結果が `sat` の時、8 行目から 11 行目が実行される。この場合、得られたモデル  $M_j$  が MaxSAT 解候補となるが、そこで各阻止変数  $b_i$  の真偽値を調べ、真となっている阻止変数に対応するソフト節の重みの総和を新しい上界とする (9 行目)。そして、基数制約  $\sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i < U$  を  $A$  に加える (11 行目)。基数制約については、加算  $\sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i$  を表す節集合を最初に作り  $A$  に加え (10 行目)、それ以降は、不等号  $<$  に関する制約を表す節集合を加えていく (11 行目)。

SAT 呼出の結果が `unsat` の時、13 行目から 17 行目が実行される。 $B_1$  が空であれば、現在の下界と上界の範囲には MaxSAT 解がない、ことになるので探索は打ち切られる (13 行目)。空で

連絡先: 越村三幸, 九州大学大学院システム情報科学研究所, 福岡市西区元岡 744, 092-802-3599

\*1 阻止変数と呼ぶ。

\*2 充足不能の導出に寄与したリテラルの集合

```

(1)  $A = \phi^b$ ;  $B = \{b_i \mid i = 1, \dots, n\}$ ; //  $\phi^b$ : 阻止変数を付加した問題,  $B$ : 阻止変数の集合
(2)  $j = 0$ ; // SAT 呼出の結果が sat となった回数. 以下,  $M_j$  は  $j$  番目に見つかったモデル.
(3)  $L = 0$ ;  $U = \sum_{i=1}^n w_i + 1$ ; //  $L$  (下界) と  $U$  (上界) の設定
(4) while ( $L < U$ ) { // 下界が上界を上回るまで探索する
(5)    $ass = \bigwedge_{b_i \in B} \neg b_i$ ; //  $B$  に含まれる全ての阻止変数を否定したものを仮定する
(6)    $(rst, B_1) = solve(A, ass)$ ; // SAT ソルバー呼出.  $rst$  は sat (isfiable) が unsat (isfiable) になる.
(7)   if ( $rst = sat$ ) { // satisfiable の場合
(8)      $j = j + 1$ ;
(9)      $U = \sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i$ ; // 見つかったモデル  $M_j$  で真となる阻止変数に対応するソフト節の重みの和
(10)    if ( $j = 1$ )  $A = A \cup Card$ ; //  $\sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i$  の SAT 符号化を  $A$  に加える
(11)     $A = A \cup Card^{<U}$ ; // 制約  $\sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i < U$  の付加
(12)  } else { // unsatisfiable の場合
(13)    if ( $B_1 = \emptyset$ ) break; //  $B_1$  は  $ass$  に含まれるリテラルの内, unsat core に含まれるリテラルの集合
(14)     $A = A \cup \{\bigvee_{b_i \in B_1} b_i\}$ ;  $B = B \setminus B_1$ ; // unsat core の削除
(15)     $min = B_1$  に含まれる阻止変数に対応するソフト節の重みの内, 最小の重み;
(16)     $L = L + min$ ; // 下界の更新
(17)    if ( $j > 0$ )  $A = A \cup Card^{\geq L}$ ; // 基数制約  $\sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i \geq L$  の付加
(18)  } // end of if
(19) } // end of while
(20) if ( $j > 0$ ) return  $M_j$ ;
(21) else return unsatisfiable;

```

図 1: QMaxSAT 手続き

ない場合, 式 (1) より  $A \vdash \bigvee_{b_i \in B_1} b_i$  が成立つから, 節  $\bigvee_{b_i \in B_1} b_i$  を  $A$  に加える. これにより unsat core の一つが削除されるので  $B$  を更新する (14 行目). また, core の削除により下界が「 $B_1$  に含まれる阻止変数に対応するソフト節の重みの内, 最小の重み」分増えるので, 下界を更新する (15, 16 行目). そして基数制約を更新する (17 行目).

以上が提案する QMaxSAT 手続きであるが, 従来の QMaxSAT 手続きはこれから下界と仮説に関する演算を除くと得られる. 具体的には次のように変更する.

- 3 行目を「 $U = \sum_{i=1}^n w_i + 1$ ;
- 4 行目を「while (1) {」
- 5, 6 行目を「 $rst = solve(A)$ ;
- 13~17 行目を「break;」

### 3. 性能評価

従来方式と提案方式の二つの QMaxSAT を MaxSAT 評価会 Max-SAT 2015<sup>\*3</sup> に提出し, 性能評価を行った. 評価会には全体で 37 のソルバーが提出され, 4273 問で評価が行われた. 評価会には Max-SAT, Partial Max-SAT (pms), Weighted Partial Max-SAT (wpms) の三つの部門 (category) があり, それぞれ, random, crafted, industrial の副部門からなる. その内, 本稿では pms の crafted (P-C) と industrial (P-I), wpms の crafted (W-C) と industrial (W-I) の四つの副部門の評価を示す.

表 1 に制限時間内 (1 問あたり 30 分) に解けた問題数を示す. 問題数欄はその部門で出題された問題数を示す. PC/PI/WC/WI は P-C/P-I/W-C/W-I 部門で 1 位<sup>\*4</sup> となったソルバーで, PC は Open-WBO-R, PI は WPM3-2015-co, WC は LMHS-C, WI は LMHS-I である.

\*3 <http://www.maxsat.udl.cat/15/>

\*4 ポートフォリオ型ソルバーを除く

表 1: QMaxSAT の評価 (解けた問題数)

部門	問題数	QMaxSAT		P		W	
		従来	提案	C	I	C	I
P-C	678	504	507	591	536	507	502
P-I	601	481	475	526	529	430	448
W-C	319	189	174	-	111	232	225
W-I	601	338	291	-	380	394	454
合計	2199	1512	1447	-	1556	1563	1629

表からわかるように, 従来方式が提案方式より全体として多くの問題を解いているが, 個々の問題セットで比べると幾つかの問題セットでは提案手法が優勢である. どのような場合に優勢がより詳しい比較が今後必要である.

### 4. おわりに

Satisfiability-based MaxSAT ソルバー QMaxSAT に, unsatisfiability-based の機能を導入し, 両者の利点を享受するソルバーの構築を目指した. しかし結果は, 狙い通りには unsatisfiability-based ソルバーの利点が取り入れられてないことを示している. 結果を分析して, 両者の利点を生かせる方式を検討したい.

### 参考文献

- [1] Carlos Ansótegui, Maria Luisa Bonet, and Jordi Levy. SAT-based MaxSAT algorithms. *Artificial Intelligence*, 196:77–105, 2013.
- [2] Miyuki Koshimura, Tong Zhang, Hiroshi Fujita, and Ryuzo Hasegawa. QMaxSAT: A Partial Max-SAT Solver. *Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation*, 8:95–100, 2012.