3I3-1

不公平性の指標に基づく分散制約最適化についての一検討

A Study on Distributed Constraint Optimization with Inequality Criteria

松井 俊浩　松尾 啓志
Toshihiro Matsui　Hiroshi Matsuo

名古屋工業大学
Nagoya Institute of Technology

Distributed Constraint Optimization Problem (DCOP) has been studied as a fundamental problem in multiagent systems. While traditional DCOPs are optimization problems on the summation of preferences of agents, extended classes of DCOPs with inequality have recently been studied. Criteria of inequality among agents are important in practical resource allocation. We study optimization criteria based on statistics, which cannot be easily decomposed for conventional solution methods. In particular, we investigate the optimization on Theil index. While the Theil index is a basic metric of inequality, there is a non-monotonicity on sub-problems. To address this issue, we evaluate lower bounds of Theil index and an asynchronous tree search method. We also compare the solutions with optimization criteria based on Theil index and leximin.

1. はじめに

分散制約最適化問題 (DCOP) はマルチエージェントシステム上の協調問題解決における基本的な問題として検討されている [Modi 05, Petcu 05, Mailler 04, Farinelli 08, Zivan 08]．DCOP では，マルチエージェントシステム上に分散して配置された制約最適化問題であり，エージェントは非集中的に協調し，最適解を得る．このような定式化を基礎として，センサネットワーク，電力スマートグリッド，会議スケジューリング支援などの資源割り当て問題などの適用が検討されている [Miller 12, Zhang 05, Ramchurn 10]．近年，各エージェントが異なる目的関数を持つように拡張された DCOP である非対称 DCOP [Grinshpoun 13] において，さらにエージェントの不平等性を扱う問題が提案されている [Netzer 11, Netzer 13a, Netzer 13b, Matsui 14, Matsui 15]．最適化の指標として，エージェント間の不公平性を扱う問題は，実際的な資源割り当てにおいて重要である．従来研究では，典型的な合計の最適化の他に，envy 最小化 [Netzer 13a, Netzer 13b], leximin 最大化 [Matsui 14, Matsui 15] および，合計とタイル尺度を組み合わせた指標の最適化 [Netzer 11] などが提案されている．このうち，[Netzer 11] で指標の一部として用いられているタイル尺度は，基本的な不公平性の尺度とされる．しかし，タイル尺度には部分問題について非単調性があり，従来の DCOP の厳密解法の枠組では問題の分解や枝刈りが容易では無く， [Netzer 11] では非厳密解法が示されている．

本研究では，タイル尺度の最適化を伴う非対称多目的 DCOP について検討する．タイル尺度は全てのエージェントの利益と個々の利益の比に基づくため，部分問題においても系全体の評価値の情報が必要となる．また，これにより部分問題について非単調性が生じるため，従来の単調性を前提とする厳密解法を容易に適用できない．そこで，基本的な木探索に基づく解法における，枝刈りのための下界値および，解法の効率の改善の可能性を評価する．また，タイル尺度に基づく最適化を，従来解法に適用可能な不公平性に関連する指標である lexmin による最適化と比較する．

連絡先: 松井 俊浩，名古屋工業大学，〒 466-8555 愛知県名古屋市昭和区御器所町，matsui.t@nitech.ac.jp

2. 背景

2.1 DCOP

分散制約最適化問題 (DCOP) はマルチエージェントシステム上に分散して配置された制約最適化問題である．各エージェントは，自身の状態や意思決定を表す変数を持つ．変数間の関係は関数により表現される．関数値の合計を最適化する，大域的な最適解を得ることが目的である．エージェントは非集中型の解法により，協調的に問題を解く．

2.2 エージェントの選好のための非対称多目的 DCOP

本研究では，各エージェントが自身の選好を表す一つの目的関数を持つ問題に注目する．この問題は非対称かつ多目的な DCOP (AMODCOP) として次のように定義される [Matsui 15].

Definition 1 (AMODCOP) *AMODCOP* は (A, X, D, F) により定義される．ここで，A はエージェントの集合，X は変数の集合，D は変数の値域の集合，F は目的関数の集合である．エージェント $a_i \in A$ は変数の集合 $X_i \subseteq X$ に関する自身の局所的な問題を持つ．ここで，$\exists(i,j)$ *s.t.* $i \neq j, X_i \cap X_j \neq \emptyset$ である．F は目的関数の集合であり，$a_i \in A$ についての全ての関数 $f_i(X_i)$ からなる．関数 $f_i(X_i)$: $D_{i_1} \times \cdots \times D_{i_k} \to \mathbb{R}_+$ はエージェント i についての $X_i = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ に関する評価値を表す．変数値の割り当て $\mathcal{A}$ について，大域的な目的関数 $\mathbf{F}(\mathcal{A})$ は $[f_1(\mathcal{A}_1), \cdots, f_{|A|}(\mathcal{A}_{|A|})]$ のようにベクトルにより定義される．ここで $\mathcal{A}_i$ は X_i へ写像された $\mathcal{A}$ の割り当てを表す．大域的な目的関数についてのある指標を最適化する割り当て $\mathcal{A}^*$ を求めることが目的である．

2.3 最適化の指標

古典的な最適化の指標である目的関数の合計は，個々のエージェントの利益の不公平性を考慮しない．多目的最適化問題では，目的関数値のベクトルに関する社会厚生関数やスカラ化関数による他の指標が提案されている [Sen 97a, Marler 04]．ソートされた目的値ベクトルについての辞書順序により定義される指標 leximin における最大化は，不公平性と目的値の最小値を改善する．[Matsui 14, Matsui 15] では, leximin を最適化の指標とする AMODCOP と解法が提案されている．

leximin を最大化する解はパレート最適性などの性質を満たす一方で，目的値ベクトルに含まれる最小値の影響を強く受ける．

また，leximin は不平等さの尺度の要件の幾つかを満たさず，特にエージェント数が異なる問題の解の間では不平等さを容易に比較できない．本研究では，最適化の指標として，基本的な不公平性の尺度であるタイル尺度 [Netzer 11, Sen 97b, Shorrocks 80] に注目する．

Definition 2 (Theil Index) n エージェントについて，タイル尺度 T は $\frac{1}{n}\sum_i \frac{v_i}{\bar{v}}\log\frac{v_i}{\bar{v}}$ により定義される．ここで，v_i はエージェント a_i の効用であり，$\bar{v}$ は全てのエージェントについての効用の平均値である．

タイル尺度は不平等さをエントロピーに反映し大小を逆転した量であり，$[0, \log n]$ の値を取る．全てのエージェントの効用が等しいとき，タイル尺度は 0 となり，最も不平等のとき $\log n$ となる．従って，タイル尺度を指標とする AMODCOP は最小化問題である．

3. 解法

3.1 基本的な手法

まず，基本的な木探索に基づく解法を示す. DCOP の完全な解法の多くは変数の半順序関係を与える擬似木を用いるが，タイル尺度のように，部分問題においても全ての目的関数値の合計が必要な場合には，複数の葉ノードがそのような合計を知ることができないため，一般の擬似木を直接的に用いることはできない．従って，ここではエージェント/変数の全順序に基づき木探索を行う．ここでは変数と関数についての次数が最大のエージェントを優先して順序付けする．エージェントの順序に基づいて，エージェント間の親子関係が定義される．非対称 DCOP ではエージェントは自身の関数を評価する．そのため，上位のエージェントは自身の関数と関係する下位のエージェントの変数の割り当てを知る必要がある．そこで，[Matsui 14, Matsui 15] と類似する手法により，変数値の意思決定者をその変数と関係する関数を持つ最上位のエージェントに移す．エージェント a_i が意思決定する変数の集合を $X_i^{own} \subseteq X$ により表す.

木探索では 2 種類のメッセージ ASSIGN および FEEDBACK を用いる．探索は根のエージェントから開始され，ASSIGN メッセージによりトップダウンに割り当てが伝達される．葉のエージェントは，ASSIGN メッセージを受信したとき，完全な割り当てについてのタイル尺度を計算し，最良の割り当てを保存する．そして，葉のエージェントは FEEDBACK メッセージを親のエージェントに送る．FEEDBACK メッセージを受信したエージェントは自身が意思決定する変数の他の割り当てを選択し，ASSIGN メッセージを送信する. 他の割り当てが無ければ，親に FEEDBACK メッセージを送信する．また，FEEDBACK メッセージに最良解を保存するフラグを設け，各エージェントは自変数の最良解を保存する．全ての完全な割り当てを探索し，根のエージェントまでバックトラックしたとき，探索は終了する．

3.2 枝刈り

タイル尺度における枝刈りのための下界を適用する．2 種類の下界を検討する．

3.2.1 各エージェントについての項の下界

タイル尺度は各エージェント a_i についての項 $\frac{v_i}{\bar{v}}\log\frac{v_i}{\bar{v}}$ の合計からなる．しかし，3.1 節で述べたように，葉のエージェントのみが $\bar{v}$ を計算できる．この制限を軽減するために，$\frac{v_i}{\bar{v}}\log\frac{v_i}{\bar{v}}$ の境界を導入する．$\frac{v_i}{\bar{v}}$ の下界 $lb(\frac{v_i}{\bar{v}})$ が与えられるとき，$x\log x$ の性質により，$\frac{v_i}{\bar{v}}\log\frac{v_i}{\bar{v}}$ の下界を次式のように計算できる．

$$lb(\frac{v_i}{\bar{v}}\log\frac{v_i}{\bar{v}}) = \begin{cases} -\frac{1}{e} & \text{if } lb(\frac{v_i}{\bar{v}}) \leq \frac{1}{e} \quad \text{(a)} \\ lb(\frac{v_i}{\bar{v}})\log lb(\frac{v_i}{\bar{v}}) & \text{otherwise} \quad \text{(b)} \end{cases} \tag{1}$$

$x\log x$ は下に凸であり，$x=\frac{1}{e}$ のとき最小値 $-\frac{1}{e}$ となる．場合 (a) では，最小値を経由する可能性があるため，下界は $-\frac{1}{e}$ に制限される．

$\frac{v_i}{\bar{v}}$ の境界を用いるためには，各 f_i の値域の知識が必要である．そのため，ボトムアップな前処理により，各エージェント a_i は下位エージェントの集合 $succ(a_i)$ についての各 f_j の最大値 $f_j^\top$ を収集する．木探索において，エージェント a_i が上位エージェントの集合 $pred(a_i)$ についての目的値のベクトル v_h を受信したとき，エージェントは $\frac{v_i}{\bar{v}}$ の下界を次式のように計算できる．

$$lb(\frac{v_i}{\bar{v}}) = \frac{f_i}{\sum_{a_h\in pred(a_i)} v_h + f_i + \sum_{a_j\in succ(a_j)} f_j^\top} \tag{2}$$

各エージェントは，最大値 $f_j^\top$ からなるベクトルと同時に，最小値 $f_j^\perp$ からなるベクトルも同時に収集できる．下位のエージェント a_j についての v_j が不明のとき，その下界は次のように計算できる．

$$lb(\frac{v_j}{\bar{v}}) = \frac{f_j^\perp}{\sum_{a_h\in pred(a_i)} v_h + f_i + \sum_{a_j\in succ(a_j)} f_j^\top} \tag{3}$$

タイル尺度の値域は $[0, \log n]$ であるが，この下界は平均値の整合性を緩和するため，$\sum_i lb(\frac{v_i}{\bar{v}}\log\frac{v_i}{\bar{v}})$ は負値を取りうる．

3.2.2 タイル尺度の分解による下界

タイル尺度は，グループ i ごとの要素数 n_i，平均 $\overline{v}_i$，および部分タイル尺度 T_i により，次式に示すように分解できる [Shorrocks 80].

$$T = \sum_i \left(\frac{n_i\overline{v}_i}{n\overline{v}}T_i + \frac{n_i\overline{v}_i}{n\overline{v}}\log\frac{\overline{v}_i}{\overline{v}}\right) \tag{4}$$

T をグループ 1 と 2 に分解し，グループ 1 を木探索において変数値の割り当てが展開された部分問題，グループ 2 を未展開の部分問題とする．また，n が既知であるとする．このとき，グループ 1 についての各要素は既知である．グループ 2 の n_2 も既知となる．これらにより，未知の要素は $\overline{v}_2$，T_2 および，$\overline{v}_2$ の関数である $\overline{v}$ となる．$\overline{v}_2$ と T_2 の関係を緩和し，$T_2 \geq 0$ により，$\overline{v}_2$ の関数である次式の下界を得る．

$$T \geq lb(T) = \frac{n_1\overline{v}_1}{n\overline{v}}T_1 + \frac{n_1\overline{v}_1}{n\overline{v}}\log\frac{\overline{v}_1}{\overline{v}} + \frac{n_2\overline{v}_2}{n\overline{v}}\log\frac{\overline{v}_2}{\overline{v}} \tag{5}$$

この関数は下に凸であり，$\overline{v}_2 = \overline{v}_1 e^{T_1}$ のとき最小となる．さらに，$\overline{v}_2$ の上下界値を，3.2.1 節と同様の前処理により集計した最大，最小値のベクトルから得ることができる．$\overline{v}_2$ が取りうる値の区間を $[\overline{v}_2^\perp, \overline{v}_2^\top]$ とすると，下界値を与える $\overline{v}_2$ の値 $\overline{v}_2^{lb}$ は

$$\overline{v}_2^{lb} = \max(\min(\overline{v}_2^\top, \overline{v}_1 e^{T_1}), \overline{v}_2^\perp) \tag{6}$$

となる．

3.3 探索における非同期な情報の更新

基本的な木探索に，非同期的に情報を更新する枠組を適用する．変数の半順序を表す擬似木に基づく，従来の DCOP の厳密解法では，問題が複数の部分木に分解されるとき，非同期的な探索により部分問題の探索が並行する機会があるが，ここではエージェント/変数の全順序に基づく線形なグラフ上の探索を用いるため，非同期な情報の更新は直ちに探索の効率化にはつながらないと考えられる．後述する ASSIGN メッセージのショートカットによる情報の更新を随時行うための基礎とする．

非同期な情報の更新では，基本的には，各エージェントは常に ASSIGN/FEEDBACK メッセージを送受する．情報の更新が無い場合には，メッセージの送受を省略することは可能であるが，簡単のために ASSIGN/FEEDBAK メッセージは常に送受することとした．

各エージェント a_i は，自身が意思決定する変数 X_i^{own} について，子のエージェントから受信したタイル尺度の下界値を管理する．この情報は，親のエージェントから受信する上位エージェントによる現在の変数値の割り当てと関連付けられ，上位エージェントの意思決定と整合する期間は保持される．これらの情報により，a_i は X_i^{own} についての割り当てを維持するか，次の値に変更するか否かを管理する．また，子のエージェントから受信したフラグに応じて最良解を保存する．さらに，親のエージェントにタイル尺度の下界値と，現在の割り当てを最良解として保存するか否かのフラグを伝搬する．

木探索においては任意の探索戦略が可能であるが，解の評価値にある種の多峰性があると予想されるため，基本的には変数については最良優先よりも深さ優先が適切であると考えられる．X_i^{own} における変数値の組の順序については，発見的方法として，上位からエージェント a_i までの評価値の分散が小さいものを優先して選択することとした．

3.4 メッセージのショートカット

木探索における解の展開を効率化するために，ASSIGN メッセージの情報の一部をショートカットする．すなわち，ASGSC メッセージを導入し，変数値の割り当てを上位から，関連する下位のエージェントに直接伝達する．ASGSC メッセージに含まれる変数値の組は，各下位エージェントの評価関数に関連するものに制限する．この知識は前処理に基づく．

これにより，下位の各エージェントは，自身の関数値の上下界値を速やかに計算して狭める機会を得る．ASGSC メッセージにより伝達される割り当ては，従来の ASSIGN メッセージにより伝達される割り当てとは別の情報として扱う．同様に，ASGSC メッセージを根拠とする関数値の上下界値を従来の探索における付加的な情報として扱う．

ASGSC メッセージに基づく情報は，FEEDBACK メッセージにピギーバックされ，上位に伝達される．ASGSC メッセージによる現在の割り当てが，従来の ASSIGN メッセージによる割り当てと矛盾しないとき，ASGSC メッセージを根拠とする関数値の上下界値を採用できる．このときのタイル尺度の下界値が従来の値よりも大きければ，タイル尺度の下界を狭めることができる．

従来の DCOP の非同期的な厳密解法と異なる注意点は，展開済みの部分問題と，未展開の部分問題との境界を越えて，ショートカットにより変数値の割り当てのみを直接更新すると，上位エージェントの評価値と整合しなくなり，全てのエージェントの評価値を必要とするタイル尺度の根拠が損なわれることである．ここでは簡単のために，展開済/未展開の部分の境界を固定し，探索における順序で中間のエージェントとした．中間のエージェントとその上位のエージェントのみが ASGSC メッセージを送信する．また，FEEDBACK メッセージにより送信される，ASGSC メッセージに基づく情報は，中間のエージェントとその上位のエージェントでは無視される．FEEDBACK メッセージの再送により，ASGSC メッセージに基づく情報は，中間よりも下位のエージェントでは，いずれ採用されうる．ASGSC メッセージは割り当てが変化したときのみ送信されることとした．

表 1: Computational cost and number of messages($a = 2$)

n	alg.	mcyc	slv. ratio	ncst [s]	ASG	ASGSC	FDBK
10	b	65399	1	0.14	32700	0	32700
	l	45484	1	1.99	409321	0	409312
	lsc	37438	1	3.33	336902	365	336893
	t	944	1	0.04	8463	0	8454
	tsc	851	1	0.08	7620	137	7611
12	b	100000	0	0.26	50005	0	49995
	l	100000	0	5.97	1099945	0	1099934
	lsc	99622	0.05	11.97	1095785	465	1095774
	t	3591	1	0.22	39445	0	39434
	tsc	2617	1	0.33	28734	344	28723
15	t	6808	1	0.62	95218	0	95204
	tsc	6525	1	1.13	91256	816	91242

表 2: Computational cost and number of messages($a = 3$)

n	alg.	mcyc	slv. ratio	ncst [s]	ASG	ASGSC	FDBK
10	b	94461	0.2	0.16	47234	0	47228
	l	89468	0.3	4.86	805175	0	805166
	lsc	88605	0.4	10.21	797405	1003	797396
	t	3386	1	0.19	30442	0	30433
	tsc	2658	1	0.32	23886	661	23877
12	b	100000	0	0.21	50004	0	49996
	l	100000	0	7.24	1099945	0	1099934
	lsc	100000	0	15.47	1099945	909	1099934
	t	11366	1	0.88	124968	0	124957
	tsc	8640	1	1.32	94987	2602	94976
15	t	46939	0.8	5.18	657054	0	657040
	tsc	37796	0.9	8.76	529056	6643	529042

4. 評価

提案手法を実験により評価した．変数と関数を各一つずつ持つ n エージェントからなる問題を用いた．関数の arity a を 2 または 3 とした. 関数値は一様分布に基づく $[1, 10]$ の整数値とした．例題 20 個の結果を平均した．

次の解法を比較した．

- **b**: ブルートフォースによる解法. 深さ優先探索とし，X_i^{own} における変数値の組の順序は既定の辞書順とした．
- **l**: 非同期な情報の更新を用いる解法．各エージェントについての項の下界に基づく枝刈りを用いた．
- **lsc**: l にメッセージのショートカットを適用した解法.
- **t**: 非同期な情報の更新を用いる解法．タイル尺度の分解に基づく下界を枝刈りに用いた．
- **tsc**: t にメッセージのショートカットを適用した解法.

表 1 および 2 に結果を示す．ここでは，同期したメッセージ交換の反復回数であるメッセージサイクル数 (mcyc)，エージェント内の処理の並行を考慮した実計算時間の合計 (ncst), 総メッセージ数 (ASG, ASGSC, FDBK) を評価した．ただし，現在の結果では，b 以外の解法の ncst には解法ではない検証のための処理時間が比較的多く含まれる．mcyc のカットオフを

表 3: Comparisons on criteria($n = 12$)

a	opt.	theil	sum	min
2	leximin	0.015	101	6.0
	theil	0.012	94	5.9
3	leximin	0.010	102	6.7
	theil	0.007	95	6.4

10 万回とした．カットオフまでに解を得た例題の割合を slv. ratio として示した．

これらの結果では，下界のギャップが比較的狭い t*の方が，l*よりも枝刈りが効果的であった．また，メッセージのショートカットによる効果は得られたが，その程度は枝刈りと比較して小さく，検討の余地があると考えられる．関数の arity a とともに探索に要する計算コストは増加した．ncst については，枝刈りやショートカットメッセージのための計算コストが無視できない場合があり，ここでは無視されているメッセージ通信時間とのトレードオフが検討事項となりうる．

表 3 にタイル尺度および leximin を指標とする最適化の結果を示す．leximin の最適化には [Matsui 15] の手法を用いた．タイル尺度による最適化は最小値に影響されないため，leximin よりも不公平さが少ない．この結果では，同一のタイル尺度におけるタイブレークは探索順序に依存しているが，タイブレークにおいて合計値や最小値の最大化を導入する余地がある．

5. おわりに

本研究では，不公平性の指標に基づく分散制約最適化問題の一例として，タイル尺度の最適化を伴う非対称多目的 DCOP について検討した．系全体の利益と個々の利益の比を最適化の指標に用いるタイル尺度のような解法の場合に問題となる，部分問題についての非単調性を扱う解法において，タイル尺度における枝刈りのための下界値および，解法の効率の改善の可能性を評価した．また，タイル尺度および lexmin を指標とする最適化の結果を比較した．他の指標との併用や解法の改良による枝刈りの改善，系の効率性と不公平性に関する指標とのトレードオフなどが今後の課題である．

参考文献

[Farinelli 08] Farinelli, A., Rogers, A., Petcu, A., and Jennings, N. R.: Decentralised coordination of low-power embedded devices using the max-sum algorithm, in *7th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pp. 639–646 (2008)

[Grinshpoun 13] Grinshpoun, T., Grubshtein, A., Zivan, R., Netzer, A., and Meisels, A.: Asymmetric Distributed Constraint Optimization Problems., *Journal of Artificial Intelligence Research*, Vol. 47, pp. 613–647 (2013)

[Mailler 04] Mailler, R. and Lesser, V.: Solving distributed constraint optimization problems using cooperative mediation, in *AAMAS04*, pp. 438–445 (2004)

[Marler 04] Marler, R. T. and Arora, J. S.: Survey of multi-objective optimization methods for engineering, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 26, pp. 369–395 (2004)

[Matsui 14] Matsui, T., Silaghi, M., Hirayama, K., Yokoo, M., and Matsuo, H.: Leximin Multiple Objective Optimization for Preferences of Agents, in *17th International Conference on Principles and Practice of Multi-Agent Systems*, pp. 423–438 (2014)

[Matsui 15] Matsui, T., Silaghi, M., Okimoto, T., Hirayama, K., Yokoo, M., and Matsuo, H.: Leximin Asymmetric Multiple Objective DCOP on Factor Graph, in *18th International Conference on Principles and Practice of Multi-Agent Systems*, pp. 134–151 (2015)

[Miller 12] Miller, S., Ramchurn, S. D., and Rogers, A.: Optimal decentralised dispatch of embedded generation in the smart grid, in *11th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, Vol. 1, pp. 281–288 (2012)

[Modi 05] Modi, P. J., Shen, W., Tambe, M., and Yokoo, M.: Adopt: Asynchronous distributed constraint optimization with quality guarantees, *Artificial Intelligence*, Vol. 161, No. 1-2, pp. 149–180 (2005)

[Netzer 11] Netzer, A. and Meisels, A.: SOCIAL DCOP - Social Choice in Distributed Constraints Optimization, in *5th International Symposium on Intelligent Distributed Computing*, pp. 35–47 (2011)

[Netzer 13a] Netzer, A. and Meisels, A.: Distributed Envy Minimization for Resource Allocation, in *5th International Conference on Agents and Artificial Intelligence*, Vol. 1, pp. 15–24 (2013)

[Netzer 13b] Netzer, A. and Meisels, A.: Distributed Local Search for Minimizing Envy, in *2013 IEEE/WIC/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology*, pp. 53–58 (2013)

[Petcu 05] Petcu, A. and Faltings, B.: A Scalable Method for Multiagent Constraint Optimization, in *19th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 266–271 (2005)

[Ramchurn 10] Ramchurn, S. D., Farinelli, A., Macarthur, K. S., and Jennings, N. R.: Decentralized Coordination in RoboCup Rescue, Vol. 53, No. 9, pp. 1447–1461 (2010)

[Sen 97a] Sen, A. K.: *Choice, Welfare and Measurement*, Harvard University Press (1997)

[Sen 97b] Sen, A. K. and Foster, J. E.: *On Economic Inequality: Enlarged Edition*, Oxford University Press (1997)

[Shorrocks 80] Shorrocks, A. F.: The Class of Additively Decomposable Inequality Measures, *Econometrica*, Vol. 48, No. 3, pp. 613–625 (1980)

[Zhang 05] Zhang, W., Wang, G., Xing, Z., and Wittenburg, L.: Distributed stochastic search and distributed breakout: properties, comparison and applications to constraint optimization problems in sensor networks, *Artificial Intelligence*, Vol. 161, No. 1-2, pp. 55–87 (2005)

[Zivan 08] Zivan, R.: Anytime Local Search for Distributed Constraint Optimization, in *Twenty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pp. 393–398 (2008)