

# マルコフ確率場のハイパーパラメータ推定に対する ダウンサンプリングの影響

Effects of downsampling on hyperparameter estimation for Markov random field

坂本浩隆\*<sup>1</sup>      中西（大野）義典\*<sup>1\*2</sup>      岡田真人\*<sup>1\*3</sup>  
Hirotaka Sakamoto      Yoshinori Nakanishi-Ohno      Masato Okada

\*<sup>1</sup>東京大学 大学院新領域創成科学研究科  
Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

\*<sup>2</sup>日本学術振興会 特別研究員  
Research Fellow of Japan Society for the Promotion of Science

\*<sup>3</sup>理化学研究所 脳科学総合研究センター  
RIKEN Brain Science Institute

We investigate effects which downsampling has on latent-variable estimation from image data. Downsampling is essential for imaging techniques since spatially continuous objects are recorded as discrete data. In this study, first, we formulate a generative model and a cognitive one of imaging processes with downsampling by Markov random field models. Next, based on the cognitive model, we explain a method of hyperparameter estimation in the framework of Bayesian inference. Then, we conduct numerical simulations to examine Bayesian posterior distribution and indicate that downsampling causes characteristic biases. Finally, we discuss the biases focusing on the relation between the generative and cognitive models.

## 1. 序論

自然科学の幅広い分野で、観測技術の進歩により様々な画像データが得られている。本研究では、拡散係数のような潜在変数を画像データから推定する場合に、空間的にダウンサンプリングをして得られた画像データを用いるとどのような影響が生じるかを調べる。

画像処理によく用いられるマルコフ確率場 (MRF) モデル [Geman 84, Pryce 95, Tanaka 02] は、拡散方程式と対応することが指摘されている [Nakanishi 14]。ここでは、与えられた画像データを用いて MRF モデルのハイパーパラメータを推定すれば、拡散係数に関する情報を得られるということが報告されている。

画像の観測の際に問題となるのは、実際の拡散は連続空間上で起こる現象である一方で、画像データとして観測可能なのは離散的な情報であるという点である。したがって MRF モデルのハイパーパラメータを推定する際に、ダウンサンプリングをして得られた画像データを用いることにより生じる影響を調べることは重要である。

## 2. ダウンサンプリングの定式化

原画像と観測過程とを MRF モデルで表現し、ダウンサンプリングを定式化する。はじめにダウンサンプリングを考慮した観測画像の生成モデルを説明し、次に画像処理に用いる認識モデルについて説明する。

生成モデルについて述べる。画像の次元を  $d$  とする。原画像 1 辺あたりの画素数を  $n$  とすると、その総画素数は  $N = n^d$  と表される。各画素の画像上の場所を  $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_d\}$  ( $i_j = 1, \dots, n$ ) のようなベクトルで表す。原画像  $\mathbf{u} = \{u_{\mathbf{i}}\}$  は、確率分布、

$$p(\mathbf{u}|a) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2a} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})} (u_{\mathbf{i}} - u_{\mathbf{j}})^2 \right], \quad (1)$$

にしたがって生成されるものとする。 $\sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})}$  は、すべての隣接画素組  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  について和をとることを意味する。解析を容易にするため、周期的境界条件を考える。ハイパーパラメータ  $a$  が原画像の滑らかさを表し、これは拡散係数に対応する [Nakanishi 14]。続いて、観測過程はダウンサンプリングとノイズの影響を考慮して定式化する。サンプリングの粗さ、つまり観測画像の隣接画素間の距離を  $r$  で表す。観測画像を  $\mathbf{v} = \{v_{\mathbf{i}}\}$  とする。観測ノイズとしてガウスノイズを考えると、観測画像は確率分布、

$$p(\mathbf{v}|\mathbf{u}, b) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2b} \sum_{\mathbf{i}} (v_{\mathbf{i}} - u_{r\mathbf{i}})^2 \right], \quad (2)$$

により生成される。 $b$  はノイズの分散を表すハイパーパラメータである。

認識モデルについて述べる。観測画像の総画素数が  $N'$  であるとき、認識モデルにおいては間引かれた画素の存在は想定されず、原画像の総画素数も同じく  $N'$  であると認識する。これは、原画像  $\mathbf{u}'$  は次の確率分布、

$$p'(\mathbf{u}'|a') \propto \exp \left[ -\frac{1}{2a'} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j})} r^d \left( \frac{u'_{\mathbf{i}} - u'_{\mathbf{j}}}{r} \right)^2 \right], \quad (3)$$

に従うという認識のもと、推定することを意味する。MRF モデルと拡散方程式との対応を考慮し [Nakanishi 14]、サンプリングの粗さ  $r$  により補正する。また各画素に加わる観測ノイズはガウスノイズであるとし、観測画像は確率分布、

$$p'(\mathbf{v}'|\mathbf{u}', b') \propto \exp \left[ -\frac{1}{2b'} \sum_{\mathbf{i}} (v'_{\mathbf{i}} - u'_{\mathbf{i}})^2 \right], \quad (4)$$

に従うと認識する。ハイパーパラメータに関する事前知識はないものと考え、その事前分布は一様分布により与える。

## 3. ハイパーパラメータ推定

生成モデルから観測画像が与えられた時、認識モデルにベイジスの定理を適用してハイパーパラメータを推定する [Bishop 06]。

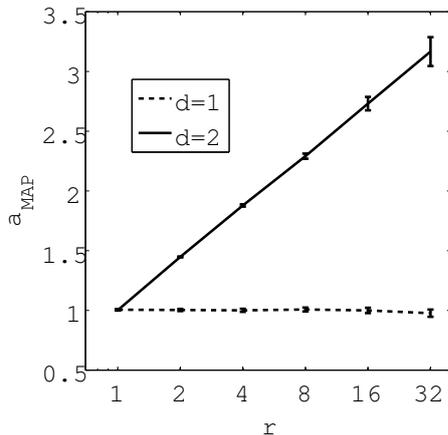


図 1: 100 組の異なるデータセットに対する  $a$  の MAP 推定値の平均.  $T = 8$ . ハイパーパラメータの真値は  $(a_0, b_0) = (1, 0.1)$ .  $d = 1$  のとき  $n = 1024$ .  $d = 2$  のとき  $n = 128$ .

$T$  枚の画像  $\{\mathbf{v}^t\} = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^T)$  が観測された時, ハイパーパラメータの事後分布はベイズの定理より,

$$p'(a', b' | \{\mathbf{v}^t\}) \propto \int d\mathbf{u}' \left( \prod_{t=1}^T p'(\mathbf{v}^t | \mathbf{u}', b') \right) p'(\mathbf{u}' | a'), \quad (5)$$

と与えられる. ここで  $T$  枚の観測画像が同一原画像を独立に観測して得られたとする. 事後分布は離散フーリエ変換とガウス積分とを用いて解析的に求まり,

$$p'(a', b' | \{\mathbf{v}^t\}) \propto \prod_k \left\{ (2\pi b')^{-\frac{T}{2}} (2\pi a')^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{T}{b'} + \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{a'^2} r^{d-2}}} \exp \left[ -\frac{T}{2b'} \left( \tilde{V}_{\mathbf{k}}^{(2)} - \frac{\frac{T}{b'}}{\frac{T}{b'} + \frac{\lambda_{\mathbf{k}}}{a'^2} r^{d-2}} \left( \tilde{V}_{\mathbf{k}}^{(1)} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad (6)$$

により与えられる. ここで,

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}}^{(1)} = \left| \frac{1}{T} \sum_t \tilde{v}_{\mathbf{k}}^t \right|, \quad \lambda_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^d \left( 2 - 2 \cos \frac{2\pi k_j}{n'} \right),$$

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}}^{(2)} = \frac{1}{T} \sum_t |\tilde{v}_{\mathbf{k}}^t|^2, \quad \tilde{v}_{\mathbf{k}}^t = \frac{1}{\sqrt{N'}} \sum_{\mathbf{i}} v_{\mathbf{i}}^t \exp \frac{2\pi i(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k})}{n'},$$

である.  $i$  は虚数単位である.

## 4. 数値実験

ハイパーパラメータの最大事後確率 (MAP) 推定値について調べる. ハイパーパラメータ  $(a, b)$  の MAP 推定値は, 式 (6) を最大化することにより得られる. まず原画像 1 枚から得られる観測画像の組からハイパーパラメータの MAP 推定値を求める. これを 100 回行った MAP 推定値の平均値を, 図 1 に示す. エラーバーは平均値の標準偏差により定めた. 1 次元画像ではサンプリングを粗くしても, 平均的に  $a$  の MAP 推定値は真値と近い値をとる. したがって, ダウンサンプリングがハイパーパラメータの MAP 推定値に生じさせるバイアスは十分に小さい. 2 次元画像では, サンプリングを粗くするとハイパーパラメータ  $a$  は真値より大きく推定され, また真値との差も系統的に大きくなる.  $b$  の推定に関しては, 1 次元, 2 次元とも特徴的なバイアスは生じなかった.

## 5. 議論

数値実験の結果から, 画像データから MRF モデルのハイパーパラメータを通じて拡散係数を推定する際, 1 次元画像では可能な限り解像度の高い画像から推定すれば信頼性を担保しつつバイアスも生じないが, 2 次元画像では複数の解像度で観測しそれらの推定結果を統合する必要があると分かる.

ハイパーパラメータ  $a$  に関して, 画像の次元によりその影響が異なって現れることは興味深い. 生成モデルに対するダウンサンプリングは, モデルの周辺化によって表現される. 1 次元の生成モデルを周辺化すると, 対応する認識モデルと一致する. 一方, 2 次元の生成モデルの周辺化を行うと, 相互作用が増えグラフ構造は複雑に変化する. 結果として, 2 次元の周辺化した生成モデルと認識モデルは一致しない. この 1 次元と 2 次元における生成モデルと認識モデルとの異同が, 推定におけるバイアスの有無の原因と考えられる.

## 6. 結論

MRF モデルのハイパーパラメータの推定に, ダウンサンプリングが与える影響を数値実験から検討した. 1 次元画像から推定した結果, 拡散係数に対応する  $a$  の推定値はバイアスを持たなかった. 一方 2 次元画像から推定した結果, 推定値のバイアスはダウンサンプリングに対し系統的に大きくなった. 結果から, 1 次元の画像を用いた推定では推定値をそのまま信用することができるが, 2 次元の画像を用いた推定では異なる解像度の画像から得た推定値を統合する必要があることが分かった. 推定におけるバイアスの傾向を, 生成モデルと認識モデルの異同から説明した.

## 謝辞

本研究は, 科学研究費補助金, 特別研究員奨励費 (課題番号: 13J04920, 中西), 基盤研究 (B) (課題番号: 25280090, 岡田), 新学術領域研究 (課題番号: 25120009, 岡田) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [Geman 84] Geman, S. and Geman, D.: Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.PAMI-6, pp.721–741 (1984).
- [Pryce 95] Pryce, J.M. and Bruce, A.D.: Statistical mechanics of image restoration, J. Phys. A: Mathematical and General, vol.28, no.3, pp.511–532 (1995).
- [Tanaka 02] Tanaka, K.: Statistical-mechanical approach to image processing, J. Phys. A: Mathematical and General, vol.35, no.37, pp.R81–R150 (2002).
- [Nakanishi 14] Nakanishi-Ohno, Y., Nagata, K., Shouno, H. and Okada, M.: Distribution estimation of hyperparameters in Markov random field models, J. Phys. A: Mathematical and Theoretical. vol.47, no.4, pp.045001-1–045001-14 (2014).
- [Bishop 06] Bishop, C.M.: *Pattern Recognition and Machine Learning*, (New York: Springer) (2006).