4D1-2

個別下限制約付きタイプ優先マッチング問題

Strategy-proof matching with individual minimum quotas and soft bounds for type

濱田 直斗 倉田 涼史 後藤 誠大 横尾 真
Naoto Hamada Ryoji Kurata Masahiro Goto Makoto Yokoo

九州大学 システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

The theory of matching has been extensively developed for markets in which the agent (student/schools, hospitals/residents, workers/firms) have individual maximum quotas, i.e., the number of student assigned to a school cannot exceed a certain limit. In many real-world markets, however, individual minimum quotas are imposed. Furthermore, based on the idea of affirmative action, target quotas may also be relevant, which are quotas of students with specific type that a school is supposed to accept. In this paper, we develop Priority List based Deferred Acceptance mechanism with Target Quotas (PLDA-TQ) that can handle these constraints. We show that PLDA-TQ is strategy-proof and obtain the student-optimal matching within all *stable* matchings in this setting. We also show computer simulation results, which illustrate that the PLDA-TQ outperforms an artificial cap DA mechanism.

1. 序論

学生と学校，労働者と企業のように，2 種類のエージェント間の望ましい組合せを求める問題をマッチング問題と呼ぶ．この問題は盛んに研究されており，マッチング理論として確立している．文献 [Roth 90] には，マッチング理論の分野における文献の多くの結果が幅広くまとめられている．マッチング問題には，各学校に割り当てられる学生数の限度といった，個別上限が存在する．

しかしながら，現実のマッチング問題においては，割当に関してより一般的な制約が設けられることが多い．例えば，ハンガリーの大学入試では，学校ごとに最低限割り当てるべき学生数が設けられている [Biro 10]．このような個別下限は，ある学校に学生の割当が偏ったり，ある学校に学生が一人も入学しないことを防ぐ役割を持つため，しばしば研究対象とされる．

学生を公立の学校に割り当てる学校選択問題では，障害を持つ学生を優先して入学させる配慮が導入されている．また，企業の雇用においても，採用されにくい女性のための特別枠が用意されうる．このようなアファーマティブ・アクションの考えにより，社会状況・経済状況の観点でバランスよく割り当てられることが要求されるため，タイプ上限やタイプ下限といった制約も存在しうる．本論文は学生と学校間のマッチングを扱い，各学校が特定のタイプに対し優遇措置を取る状況，即ち，タイプ下限が存在する状況を考察する．

タイプを考慮するマッチング問題においては様々な既存研究が存在する．Kojima et al. は，学生が minority/majority という 2 種類のタイプを持つモデルを考察し，majority をもつ学生について必ず満たすべきハードな上限を設けると，minority をもつ学生が割り当てられにくくなることを示した [Kojima 12]．一方 Hafalir et al. は，minority をもつ学生について可能ならば満たすべきソフトな下限を設けることで，この欠点を回避できることを示した [Hafalir 13]．また，Ehlers et al. は，ソフトなタイプ上限・タイプ下限が存在するモデルにおいて，望ましい性質である安定性を満たす，戦略的操作不可能なメカニズムを提案した [Ehlers 14]．しかしながら，このモデルでは個別下限は考慮されていない．

本論文では，Ehlers et al. のモデルのソフトなタイプ上限をなくし，新たに個別下限を加えた，個別下限制約付きタイプ優先マッチング問題を考える．タイプ上限は特定のタイプが偏って割り当てられることを防ぐが，この働きはタイプ下限がまかなうため，本論文は Ehlers et al. のモデルに個別下限を加えた問題を扱うといえる．まず，この拡張を加えたモデルにおいて新たな安定性を定義する．次に，プライオリティーリスト（学生と学校の全ての組を順序付けるリスト）に基づくタイプ優先枠を考慮した受け入れ保留メカニズム（Priority List based Deferred Acceptance mechanism with Target Quotas, PLDA-TQ）を提案する．さらに，PLDA-TQ は新たな安定性を満たしつつ学生側にとって最も好ましい結果を出力する，戦略的操作不可能なメカニズムであることを示す．

2. モデル

学生と学校間の個別下限制約付きタイプ優先マッチング問題は $(S, C, T, \tau, X, \succ_S, \succ_C, q_C, p_C, p_{C,T})$ の組で定義される．$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ は n 人の学生の集合，$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ は m 個の学校の集合，$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ は k 種類のタイプの集合である．$\tau : S \to T$ はタイプ関数であり，$\tau(s)$ は学生 s が持つタイプを返す．$X = S \times C$ は契約の集合であり，契約 $(s, c) \in X$ は学生 s が学校 c に割り当てられることを意味する．$X' \subseteq X$ となる X' について，X'_s は $\{(s, c) \in X' | c \in C\}$ を，X'_c は $\{(s, c) \in X' | s \in S\}$ を，$X'_{c,t}$ は $\{(s, c) \in X' | s \in S, t = \tau(s)\}$ を意味する．$\succ_S = (\succ_{s_1}, \ldots, \succ_{s_n})$ は学生が持つ選好順序であり，$\succ_s$ は学生 s にとっての学校に対する厳密な選好を意味する．たとえば，学生 s が厳密に学校 c' よりも学校 c を好む場合，$(s, c) \succ_s (s, c')$ と表す．$\succ_C = (\succ_{c_1}, \ldots, \succ_{c_m})$ は学校が持つ優先順序であり，$\succ_c$ は学校 c にとっての学生に対する厳密な選好を意味する．たとえば，学校 c が厳密に学生 s' よりも学生 s を好む場合，$(s, c) \succ_c (s', c)$ と表す．$q_C = (q_{c_1}, \ldots, q_{c_m})$ は個別上限のベクトルであり，q_c は学校 c の上限を意味する．$p_C = (p_{c_1}, \ldots, p_{c_m})$ は個別下限のベクトルであり，p_c は学校 c の下限を意味する．$p_{C,T} = (p_{c_1,T}, \ldots, p_{c_m,T})(p_{c,T} =$

連絡先: 濱田直斗，九州大学大学院システム情報科学府，812-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，nhamada@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

$(p_{c,t_1}, \ldots, p_{c,t_k}))$ はタイプ下限のベクトルであり，$p_{c,t}$ は学校 c のタイプ t に関する下限を意味する．

学生は必ず 1 つの任意のタイプ $t \in T$ を持つとする．さらに，任意の c について $\sum_{t \in T} p_{c,t} \leq q_c$ かつ $p_c \leq q_c$，即ち，個別下限・タイプ下限が個別上限に違反することはないとする．また，学生数 n について $\sum_{c \in C} p_c \leq n \leq \sum_{c \in C} q_c$，即ち，学生数が個別上限・個別下限に違反することはないとする．

本論文では，全ての学校はある組織あるいは組合に属し，それを通して，各学生と各学校間の契約に対する優先順序についての全学校の合意が成されていると仮定する．その合意事項に基づき，$X' \subseteq X$ 上の厳密な優先順序である**プライオリティーリスト（PL）** $\succ_{PL}$ が設定されるとする．PL は学校の優先順序 $\succ_C$ を反映する．任意の学生 $s, s' \in S$ と任意の学校 $c \in C$ に対して，$\succ_{PL}$ は $(s,c) \succ_c (s',c)$ のとき，かつそのときに限り，$(s,c) \succ_{PL} (s',c)$ が成り立つとする．PL を生成する自然かつ簡単な方法の一例として，$\succ_C$ と学校間でのタイブレークの順序を用いる方法がある．例えば，タイブレークの順序を $c_1 \to c_2 \to \cdots \to c_m$ とする．この順序を元に $\succ_{PL}$ を以下のように定める．任意の $s, s' \in S$ と任意の $c_i, c_j \in C$ に対し $(s, c_i) \succ_{PL} (s', c_j)$ が成り立つのは，$\succ_c$ における s の順位を $rank_c(s)$ と表すと，(i) $rank_{c_i}(s) < rank_{c_j}(s')$ または (ii) $rank_{c_i}(s) = rank_{c_j}(s')$ かつ $i < j$ のいずれかが成立するときである．

任意の $s \in S$ と任意の $c \in C$ について $|X'_s| = 1$ かつ $p_c \leq |X'_c| \leq q_c$ が成り立つとき，X' は**実現可能**であるという．とりわけ，任意の $c \in C$ について $p_c \leq |X'_c| \leq q_c$ が成り立つとき，X' は**学校の観点で実現可能**であるという．実現可能な契約の集合を特に**マッチング**と呼ぶ [*1]．また，選好順序を入力としてマッチングを出力する手続きを，**メカニズム**と呼ぶ．

$\mathcal{X}$ をマッチングの集合とする．任意の $X'' \in \mathcal{X}$ と任意の $s \in S$ について $X'_s \succ_s X''_s$ または $X'_s = X''_s$ となるような $X' \in \mathcal{X}$ が存在するとき，X' は**学生最適**であるという．$X'_s \succ_s X''_s$ は，(i) 任意の $x', x'' \in X_s$ について $X'_s = \{x'\}, X''_s = \{x''\}$ かつ $x' \succ_s x''$ または (ii) 任意の $x' \in X_s$ について $X'_s = \{x'\}$ かつ $X''_s = \emptyset$ のいずれかが成り立つことを表す．

以下，メカニズムやマッチングに望まれる性質を定義する．

定義 1 (公平性) マッチング X' に対し，学生 s が他の学生 $s' \neq s$ に**妥当な不満を持つ**とは，$(s,c') \succ_s (s,c)$ となるような $(s,c), (s',c') \in X', (s,c') \in X \setminus X'(\tau(s) = t, \tau(s') = t')$ に関して以下のいずれかの条件が成立することである．

(i) $t = t'$ かつ $(s,c') \succ_{PL} (s',c')$

(ii) $t \neq t'$ かつ $|X'_{c',t}| < p_{c',t}$ かつ $|X'_{c',t'}| > p_{c',t'}$

(iii) $t \neq t'$ かつ $|X'_{c',t}| < p_{c',t}$ かつ $|X'_{c',t'}| \leq p_{c',t'}$ かつ $(s,c') \succ_{PL} (s',c')$

(iv) $t \neq t'$ かつ $|X'_{c',t}| \geq p_{c',t}$ かつ $|X'_{c',t'}| > p_{c',t'}$ かつ $(s,c') \succ_{PL} (s',c')$

マッチング X' が**公平性**を満たすとは，妥当な不満を持つ学生が存在しないことをいう．

定義 2 (非浪費性) マッチング X' に対し，学生 s が学校 c' に**タイプの観点で空きシートを要求する**とは，$(s,c') \succ_s (s,c), |X'_c| > p_c$ となるような $(s,c) \in X', (s,c') \in X \setminus X'(\tau(s) = t)$ に関して以下のいずれかの条件が成立することである．

(i) $|X'_{c',t}| < p_{c',t}$ かつ $(s,c') \succ_{PL} (s,c)$

(ii) $|X'_{c',t}| < p_{c',t}$ かつ $|X'_{c,t}| > p_{c,t}$

(iii) $|X'_{c'}| < q_{c'}$ かつ $|X'_{c,t}| > p_{c,t}$ かつ $(s,c') \succ_{PL} (s,c)$

マッチング X' が**非浪費性**を満たすとは，タイプの観点で空きシートを要求する学生が存在しないことをいう．

定義 3 (安定性) マッチング X' が**安定性**を満たすとは，X' が公平性と非浪費性を満たすことである．メカニズムが安定性を満たすとは，そのメカニズムが常に安定性を満たすマッチングを出力することである．

定義 4 (戦略的操作不可能) メカニズムが**戦略的操作不可能**であるとは，そのメカニズムにおいてどの学生も他の学生の申告に関わらず，自身の選好順序を偽って申告する誘因を持たないことである．

3. Priority List based Deferred Acceptance mechanism with Target Quotas (PLDA-TQ)

PLDA-TQ と呼ばれる，安定性を満たす戦略的操作不可能なメカニズムを提案する．

PLDA-TQ は選択関数 $Ch_S : 2^X \to 2^X$ と $Ch_C : 2^X \to 2^X$ で定義される．Ch_S は学生側の選択関数であり，$Ch_S(X') := \bigcup_{s \in S} Ch_s(X')$ である．任意の学生 s の選択関数 $Ch_s(X')$ は，X'_s の中で s にとって最も好ましい契約を唯一の要素として持つ集合を返す関数とする．ただし，$X'_s = \emptyset$ の場合は $Ch_s(X') = \emptyset$ とする．

定義 5 (学校側の選択関数 $Ch_C(X')$)

Step 1: $Y' := \emptyset$ とする．

Step 2: X' をリストとし，PL に従い X' に含まれる契約をソートする．

Step 3: $i = 1$ から $|X'|$ の順に，X' に含まれる i 番目の契約 $(s,c)(\tau(s) = t)$ に関して，$|\{Y' \cup \{(s,c)\}\}_{c,t}| \leq p_{c,t}$ かつ $\sum_{c \in C} \max(p_c, |\{Y' \cup \{(s,c)\}\}_c|) \leq n$ ならば，Y' に (s,c) を追加する．

Step 4: $X' := X' \setminus Y'$ とし，$i = 1$ から $|X'|$ の順に，X' に含まれる i 番目の契約 $(s,c)(\tau(s) = t)$ に関して，$|\{Y' \cup \{(s,c)\}\}_c| \leq q_c$ かつ $\sum_{c \in C} \max(p_c, |\{Y' \cup \{(s,c)\}\}_c|) \leq n$ ならば，Y' に (s,c) を追加する．

Step 5: Y' を出力する．

定義 6 (PLDA-TQ) $X_S := X$ とし，以下の処理を実行する．

(1) $X' := Ch_S(X_S)$ とする．

(2) $X'' := Ch_C(X')$ とする．

(3) もし $X' = X''$ ならば，X' を出力する．そうでなければ，$X_S := X_S \setminus \{X' \setminus Ch_C(X')\}$ とし，(1) に戻る．

*1 マッチング理論の慣習上，単に $X' \subseteq X$ となる X' をマッチングと呼ぶこともある．

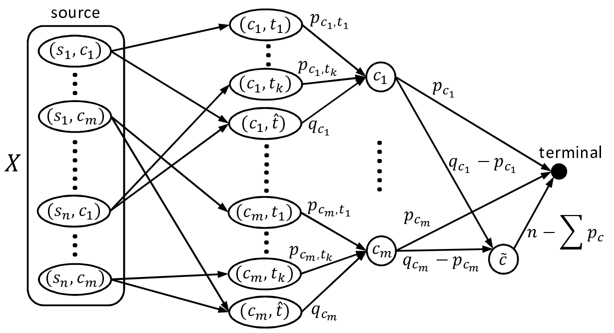

図 1: ネットワークフロー

$|X_S|$ は単調に減少するため，PLDA-TQ は有限回の繰り返しで終了する．ゆえに，PLDA-TQ は n と m に関する多項式時間で終了する．

PLDA-TQ は，文献 [Hatfield 05] において導入されている the Generalized Gale-Shapley メカニズム（GGS）の一種である．本文献では，Ch_C がいくつかの条件を満たす場合に，GGS が得るマッチングが以下に示す Hatfield and Milgorm stability （**HM 安定性**）を満たすことを示している．

定義 7 (HM 安定性) マッチング X' が **HM 安定性**を満たすとは，以下の両方の条件が成立することである．

(i) $X' = Ch_S(X') = Ch_C(X')$

(ii) $x \in Ch_S(X' \cup \{x\})$ かつ $x \in Ch_C(X' \cup \{x\})$ を満たす $x \in X \setminus X'$ が存在しない

PLDA-TQ について，以下の定理が成り立つ．

定理 1 PLDA-TQ は戦略的操作不可能であり，安定性を満たすマッチングの中で学生最適なマッチングを常に出力する．

証明 1 文献 [Kojima 14] は，以下の 2 つの条件が成立すれば，GGS が戦略的操作不可能であり，HM 安定性を満たすマッチングの中で学生最適なマッチングを得ることを示している．

(I) 学校の観点で実現可能なマッチングおよびその部分集合の族が，ネットワークフロー問題の解 *2 の集合と対応する．

(II) あるマッチング $X' \subseteq X$ と学校の評価関数 f について，$Ch_C(X') = \underset{X'' \subseteq X'}{\arg\max} f(X'')$ が成り立つ．

図 1 は 2 章で述べた問題をネットワークフローとして表したものである．弧の傍に記されている記号はその弧の容量であり，記号が傍に記されていない弧の容量は全て 1 とする．source は X であり，X 上の契約 (s, c) には頂点 $(c, \tau(s))$ と頂点 $(c, \hat{t})$ への容量 1 の弧が存在する．(図 1 においては，$\tau(s_1) = t_1, \tau(s_n) = t_k$ と仮定している）ここで，$\hat{t}$ は任意の $t \in T$ として扱うことができるタイプとする．頂点 c に到達した契約をなるべく多く terminal に流す場合，p_c の容量以内で流れる契約は terminal へ，流れない契約は $q_c - p_c$ の容量以内で頂点 $\tilde{c}$ に流れる．$\tilde{c}$ に到達した契約は $n - \sum p_c$ の容量以内で terminal に流れるため，結果的に terminal には n 個以下の契約が流れる．ゆえに，図 1 のようなネットワークフロー問題の解の集合は学校の観点で実現可能なマッチングおよびその部分集合の族と対応するため，(I) が成立する．

*2　容量を満たす範囲で source から terminal に同時に到達可能な契約の集合が解であり，空集合も解の 1 つである．

(II) は，本論文の Ch_C を導くことの出来る f を以下のように定義することで成立する．準備として，X 上の契約 (s, c) を $(s, c, \tau(s)), (s, c, \hat{t})$ という 2 つの契約に拡張し，拡張した契約の集合 $\{(s, c, t) | s \in S, c \in C, t \in \{\tau(s), \hat{t}\}\}$ を Y とする．また，学校の優先順序に $\hat{t}$ を追加する．方法は $\hat{t}$ に関する学生が全体の後になるように，即ち，$(s, c) \succ_c (s', c)$ に対して $(s, c, \tau(s)) \succ_c (s', c, \tau(s')) \succ_c (s, c, \hat{t}) \succ_c (s', c, \hat{t})$ となるように追加する．この変更を基に，$Y' \subseteq Y$ 上の PL を生成する．このとき，学生の選好順序にも $\hat{t}$ を追加する. 方法は $\hat{t}$ に関する学校がその学校の後になるように，即ち，$(s, c) \succ_s (s, c')$ に対して $(s, c, \tau(s)) \succ_s (s, c, \hat{t}) \succ_s (s, c', \tau(s)) \succ_s (s, c', \hat{t})$ となるように追加する．次に，任意の $(s, c, t) \in Y$ において関数 $g : Y \to \mathbb{R}$ を $g((s, c, t)) = 2^{n \cdot m \cdot k - i}$ と定義する．ここで $(s, c, t) \in Y$ は $\succ_{PL}$ の順で i 番目の契約である．関数 g を用いて，関数 $f : 2^Y \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(Y') = \begin{cases} \sum_{(s,c,t) \in Y'} g((s, c, t)) & (Y' \text{が実現可能}) \\ -\infty & (otherwise) \end{cases}$$

これらより，GGS の一種である PLDA-TQ は戦略的操作不可能であり，HM 安定性を満たすマッチングの中で学生最適なマッチングを常に出力する．

一方，安定性と HM 安定性は同値である．詳しい証明は割愛するが，PLDA-TQ の出力 X' について「X' は HM 安定性を満たさないとき，かつそのときに限り，X' は安定性を満たさない」という対偶が成り立つことから示される．

以上のことから，定理 1 を得る．　□

次に，PLDA-TQ の動作例を示す．

例 1 4 人の学生 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$，3 つの学校 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$，2 つのタイプ $T = \{t_1, t_2\}$ が存在する場合を考える．学生のタイプについて $\tau(s_1) = \tau(s_2) = \tau(s_4) = t_1, \tau(s_3) = t_2$ とする．個別上限について $q_{c_1} = 1, q_{c_2} = q_{c_3} = 4$ とする．個別下限について $p_{c_1} = 0, p_{c_2} = p_{c_3} = 1$ とする．タイプ下限について $p_{c_1,t_2} = 1$ とし，残りは全て 0 とする．学校が持つ優先順序は共通して $(s_1, c) \succ_c (s_2, c) \succ_c (s_3, c) \succ_c (s_4, c)$ とする．s_4 の持つ選好順序は $(s_4, c_2) \succ_{s_4} (s_4, c_3) \succ_{s_4} (s_4, c_1)$ とし，他の学生は共通して $(s, c_1) \succ_s (s, c_2) \succ_s (s, c_3)$ とする．$\succ_{PL}$ は 2 章で示した $\succ_C$ とタイプブレークの順序を用いる方法によって生成されるものとする．ただし，タイプブレークの順序は $c_1 \to c_2 \to c_3$ とする．

1 回目は，各学生は X における契約の中で最も選好の高い学校に関する契約を選択する．つまり，s_1, s_2, s_3 は c_1 を，s_4 は c_2 を希望する．学生側から選択された契約は PL に従って並べられ，その順番で拒否されるか否かを判定する．この結果，s_1, s_2 が拒否される．2 回目は，各学生は学校側から拒否されていない契約の中で最も選好の高い学校に関する契約を選択する．よって，先ほど拒否された s_1, s_2 以外はそのままの学校を希望し，s_1, s_2 は c_2 を希望する．学生側から選択された契約について判定を行うと，s_4 が拒否される．以降，同様の処理を行うと，3 回目の X' と X'' は以下のようになる．

$$X' = X'' = \{(s_1, c_2), (s_2, c_2), (s_3, c_1), (s_4, c_3)\}$$

このとき $X' = X''$ であるため，メカニズムは X' を出力し終了する．

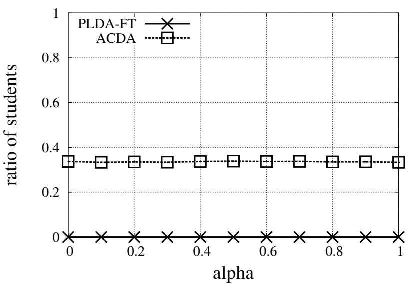

図 2: 妥当な不満を持つ学生の割合

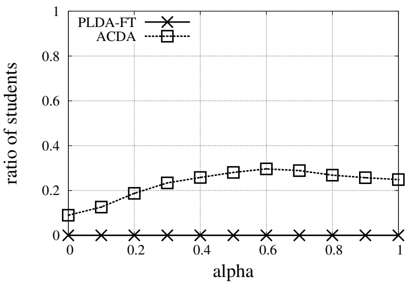

図 3: タイプの観点で空きシートを要求する学生の割合

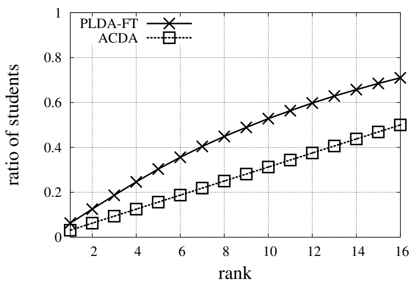

図 4: 効率性における累積頻度分布関数

4. 評価

本章では PLDA-TQ の評価を行う．ここでは，学生数 n を 512，学校数 m を 32，タイプの種類の数 k を 4 と設定する．また，各学校に関する個別上限を $q_c = 32$，個別下限を $p_c = 8$ とし，各学校と各タイプの組に関するタイプ下限を $p_{c,t} = 2$ とする．

各学生の選好順序 $\succ_s$ は，各学校に対する評価値を生成し，その評価値に基づいて順序を定める．学生の各学校に対する評価値は以下のように決定する．まず，全ての学生で共通のベクトル u_{com} を $[0,1]^m$ から一様分布により生成する．次に，個別のベクトル u_s を同様に $[0,1]^m$ から一様分布により生成する．さらに，これらを用いて各学校に対する s の評価値を，パラメータ $\alpha \in [0,1]$ を用いて $\alpha u_{com} + (1-\alpha)u_s$ で与える．α の値が大きいほど，学生同士の選好の相関が強くなる．各学校の優先順序 $\succ_c$ は一様分布により生成し，$\succ_{PL}$ はタイブレークの順序 $c_1 \to c_2 \to \cdots \to c_m$ と $\succ_C$ によって 2 章で示した方法で生成される．各パラメータ設定に関して 100 個の問題例を生成し，各評価値に対して 100 問の平均をとる．

各実験において，比較対象として人為的なキャップを加えた受け入れ保留メカニズム (Artificial Cap Deferred Acceptance mechanism，ACDA) を用いる．ACDA では，全ての個別上限・個別下限に違反することのないように，各学校の各タイプに関する割り当てに人為的な上限 4 を与えている．

図 2 に各 α の値における妥当な不満を持つ学生の割合を表す．ACDA は妥当な不満を持つ学生が常に 35%程度存在するが，PLDA-TQ は公平性を満たすため常に 0%である．

図 3 に各 α の値におけるタイプの観点で空きシートを要求する学生の割合を表す．ACDA はタイプの観点で空きシートを要求する学生が多いときで 30%程度存在するが，PLDA-TQ は非浪費性を満たすため常に 0%である．

図 4 に 2 つのメカニズムについて，i 番目，もしくはそれ以上に高い順位を持つ学校に割り当てられた学生数の平均の累積密度分布を用いて，$\alpha = 1$ のときの学生の満足度を示している．グラフの値が急増している方が学生の満足度における効率性が高い．つまり，PLDA-TQ は明らかに ACDA より効率的である．

実験の結果，公平性，非浪費性，効率性に関して PLDA-TQ は ACDA よりも明らかに優れているといえる．

5. 結論

本論文では，Ehlers et al. のモデルの拡張である個別下限が存在するタイプ優先マッチング問題において，その問題を解くメカニズム PLDA-TQ を提案した．また，PLDA-TQ は戦略的操作不可能であり，安定性を満たしつつ学生最適な結果を常に出力することを証明した．

今後の研究課題として，タイプ下限に加えてタイプ上限も考慮しつつ個別上限・個別下限を満たす，戦略的操作不可能なメカニズムの提案が考えられる．

謝辞

本研究は JSPS 基盤研究 (S) (課題番号 24220003) の助成を受けました．ここに深く感謝いたします．

参考文献

[Biro 10] Biro, P., Fleiner, T., Irving, R., and Manlove, D.: The College Admissions Problem with Lower and Common Quotas, *Theoretical Computer Science*, Vol. 411, No. 34-36, pp. 3136–3153 (2010)

[Ehlers 14] Ehlers, L., Hafalir, I. E., Yenmez, M. B., and Yildirim, M. A.: School Choice with Controlled Choice Constraints: Hard Bounds versus Soft Bounds, *Journal of Economic Theory*, Vol. 153, pp. 648—683 (2014)

[Hafalir 13] Hafalir, I. E., Yenmez, M. B., and Yildirim, M. A.: Effective affirmative action in school choice, *Theoretical Economics*, Vol. 8, No. 2, pp. 325–363 (2013)

[Hatfield 05] Hatfield, J. W. and Milgrom, P. R.: Matching with Contracts, *American Economic Review*, Vol. 95, No. 4, pp. 913–935 (2005)

[Kojima 12] Kojima, F.: School choice: Impossibilities for affirmative action, *Games and Economic Behavior*, Vol. 75, No. 2, pp. 685–693 (2012)

[Kojima 14] Kojima, F., Tamura, A., and Yokoo, M.: Designing Matching Mechanisms under Constraints: An Approach from Discrete Convex Analysis (2014), mimeo (the latest version is available at http://mpra.ub.uni-muenchen.de/56189)

[Roth 90] Roth, A. E. and Sotomayor, M. A. O.: *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis (Econometric Society Monographs)*, Cambridge University Press. (1990)