

# 進化計算を用いた エッシャー風タイリングアートデザインに関する研究

## Escher-like Tiling Art Design by Evolutionary Computation

木場 仁美\*<sup>1</sup>    水野 一徳\*<sup>2</sup>    小野 智司\*<sup>1</sup>  
Hitomi Koba    Kazunori Mizuno    Satoshi Ono

\*<sup>1</sup>鹿児島大学 理工学研究科 情報生体システム工学専攻

Department of Information Science and Biomedical Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University

\*<sup>2</sup>拓殖大学 工学部 情報工学科

Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Takushoku University

A tiling is a collection of one or several shape tiles that cover the plane without any gaps and overlaps. Due to hard constraints of the tiling, it is difficult to manually construct a tile shape which satisfies all the constraints and is sufficiently similar to the given desirable shape. Although the previous work produces a method for tiling shape design, this method requires user's effort to find a good input point set on the given desirable shape. This paper proposes a method for Escher-like tiling design, which selects an appropriate input point set and tiling pattern by global search and designs a detailed tile shape by the previous method as local search. Experimental results have shown that the proposed method designs tile shapes which are similar to input shapes without user fatigue for adjusting the input point set.

### 1. はじめに

タイリングとは、平面を隙間および重複を生じることなく充填させるように、有限種類の図形を連続的に敷き詰める行為、および、そのように図形を敷き詰められた平面のことをいう。オランダの画家 M.C. Escher (エッシャー) の作品の中で、タイリングアートと呼ばれるものがある。エッシャーのタイリングアートに見られる一つ一つのタイルは、とかげや、魚など、単体でも絵として意味があるといった特徴がある。タイルを平行移動、回転、鏡映により複製することで平面を隙間なく埋められるような、起伏に富んだ複雑な形状のタイルが見事にデザインされている。このようなアートを制作するには、対応する辺の形状が隙間なく一致するように絵の輪郭を決定しなければならないため、試行錯誤が必要となる。また、タイリングは数学的な側面が大きく、繰り返し模様の法則や性質を分類する方法などについて、深く研究されている [Grunbaum 87]。

タイリング可能な形状をデザインすることの難しさは、タイリングアートの制作を支援するアプリケーション\*<sup>1</sup> \*<sup>2</sup> を利用することで実感できる。これらは、輪郭 (タイル内部も含む) が描画される際に、対応する輪郭を同時に変形して、タイル形状のデザインを支援するが、タイリング可能な制約のもとに2カ所以上の形状の変形を同時に考慮し、意図する図形に似せることは極めて難しい。

本研究では、与えられた目標図形に類似し、かつ、タイリング可能なタイル形状を最適化により設計する方式を提案する。提案方式は、先行研究 [Koizumi 09] においてユーザの試行錯誤を要求していた入力点群の決定のプロセスに着目し、目標図形を構成する点群からの適切な点集合 (代表点群) の選択およびタイリングパターンの適切な選択を大域的な最適化により行う。また、先行研究 [Koizumi 09] の手法を局所探索として利

用することで、大域的探索によって得られた代表点群から詳細なタイル形状を導出する。これにより、先行研究の問題点である入力点群の試行錯誤的な選択を解決し、また、メタヒューリスティクスを用いた手法 [Kaplan 00] の問題点である大規模な探索を回避することができる。

### 2. タイリングに関する基礎事項

タイリングは一般的に、テセレーション、平面の正則分割とも呼ばれている。また、タイリングを構成している図形をタイルという。タイルの輪郭において、2つの隣り合うタイルが共有している輪郭部分をタイリング辺、3つ以上のタイルが交わって出来る点をタイリング頂点という。

1種類の図形で平面を充填するタイリングは Isohedral タイリング、2種類の図形で用いるタイリングを Multihedral タイリングと呼ぶ [Grunbaum 87]。Isohedral タイリングは、1種類のみのタイルによるものであるため、最適化のモデルを比較的単純な構造である単目的問題として構築できる。また、異なる複数のタイルを合わせて1つのタイルと見なすことで、Multihedral タイリングも Isohedral タイリングとなる [Kaplan 00] ことから、汎用的に用いることも可能である。以上の理由より、本研究では Isohedral タイリングのみを考えることとする。

Isohedral タイリングは、タイリング辺の形状の法則によって93種類のタイリングパターンに分類される [Grunbaum 87]。これらの分類は IH01...IH93 の記号で表すことができ、本稿ではこのタイリングパターンを IH タイプと呼ぶ。これによりタイルの境界に施すことのできる変形の制約が決定する。IH07 と IH28 によるタイリングの例を図1、図2に示す。IH07 は六角形を、IH28 は五角形を基本多角形とし、回転と平行移動によって複製を生成することで平面を充填する。また、IH02 など、鏡像反転を含む IH タイプも存在する。

タイルの形状の制約は強力であり、隣り合う辺の凹凸を考慮して形状を決定する必要があるため、人手でエッシャー風タイリングアートを制作することは困難である。Kaplan は、この間

連絡先: 木場 仁美, sc110028@ibe.kagoshima-u.ac.jp

\*<sup>1</sup> Spiegelkustenaar (MIRROR ARTIST)

<http://web.inter.nl.net/hcc/Hans.Kuiper/domususa.htm>

\*<sup>2</sup> Amazograph

<https://itunes.apple.com/jp/app/amazograph/id586076398?mt=8>

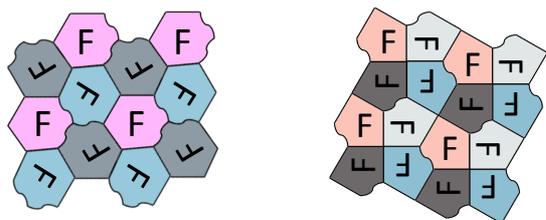


図 1: IH タイプの例 (IH07) 図 2: IH タイプの例 (IH28)

題を Escher の名前と作品にちなんだ Escherization Problem として定義している [Kaplan 00]. Escherization Problem とは、ある図形  $W$  が与えられたとき、

1. 図形  $U$  はできるだけ  $W$  に近い形である
  2. 図形  $U$  は平面を隙間なく敷き詰めることができる
- という 2 つの条件を満たす図形  $U$  を見つける問題である。

### 3. 関連研究

#### 3.1 行列計算を用いた解析的手法

小泉らは、Escherization Problem を最小化問題として定式化し、任意の目標図形  $W$  を  $n$  角形で近似し、座標行列  $w$  から、タイルングが可能な図形  $U$  の座標行列  $u$  を求める解析的な手法を提案している [Koizumi 09].

$W$  の境界上に反時計回りに並んだ  $n$  個の点の列  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  を考え、 $W$  を  $n$  角形で近似する。  $U$  も同様に  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  と考える。これらの座標を一列に並べてできる  $2n$  次元のベクトルを  $u$  とする。図形  $W$  に対しても同様に、座標を縦ベクトル  $w$  として計算を行う。

$U$  がタイルング可能であることは、 $u$  を用いて

$$Au = 0 \quad (1)$$

と表す。  $A$  はタイルング可能であるための制約であり、行列の要素は IH タイプによって変化する。例として、IH07 における制約の表現方法を以下に示す。IH07 は、タイルング辺が 6 のため、 $n$  を 6 の倍数で  $n = 6m$  とする。タイルング辺を構成するそれぞれの点を、タイルング頂点を中心とする時計回り 120 度回転 (反時計回り 240 度回転) によって、一方のタイルング辺と形状が一致する関係を以下のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x_{2m-i} - x_m \\ y_{2m-i} - y_m \end{pmatrix} = R(240) \begin{pmatrix} x_i - x_m \\ y_i - y_m \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3)$$

ここで  $R(240)$  は  $2 \times 2$  の回転行列である。これらの方程式は合計  $2m$  個となり、IH07 ではこのようなタイルング辺が 3 組存在するため合計  $6m$  個の方程式で表される。これらをまとめて IH07 の制約は  $n$  行、 $2n$  列の定数ベクトル  $A$  で表現でき、方程式 (1) でタイルング可能かどうかを表すことができる。

入力された目標図形  $W$  に類似するタイル形状  $U$  を生成するために、 $U$  と  $W$  の点を 1 対 1 に対応付ける。この 2 点のユークリッド距離から 2 つの図形の形状差を算出する。  $Q_i$  の座標を  $(x_i, y_i)$ 、  $P_i$  の座標を  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  と置き、形状差  $F_L$  は次のように表現・変形できる。

$$F_L = \sum_{i=1}^n \{(x_i - \bar{x}_i)^2 + (y_i - \bar{y}_i)^2\} \quad (4)$$

$$= (u - w)^t \cdot (u - w) \quad (5)$$

この  $F_L$  ができるだけ小さくなるようにする。方程式 (1) の解空間の次元を  $k$  とした場合、この解空間を張る正規直交基底を並べてできる行列を

$$G = (g_1, g_2, \dots, g_k) \quad (6)$$

と表す。このとき、 $u$  は  $k$  次元の変数ベクトル  $z$  を用いて

$$u = Gz \quad (7)$$

と表せる。これが方程式 (1) の解の一般形である。これより、

$$F_L = (Gz - w)^t \cdot (Gz - w) \quad (8)$$

となる。  $F_L$  を最小にする  $z$  は

$$z = G^t w \quad (9)$$

と表すことができる。以上より、最終的に  $u$  は  $w$  を用いた式

$$u = GG^t w \quad (10)$$

で求めることができる。

これを、  $P_i$  と  $Q_i$  は 1 対 1 で対応するための  $n$  パターン全てにおける  $F_L$  を算出し、最小のものが最適なタイルとなる。

このように、行列計算を用いた解析的な手法であるため、効率的にタイルの自動生成を行うことができ、良質な解も多く確認されている。一方、目標図形の形状が同一でも、使用する座標の個数や間隔等の変化により得られる解の品質が変化してしまう (図 3)。このため、入力点集合を試行錯誤的に選択する必要がある。

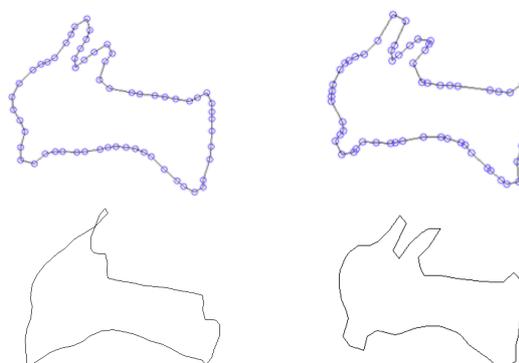


図 3: 解析的手法 [Koizumi 09] における目標図形 (上) を構成する点による生成されるタイル (下) の違い

#### 3.2 メタヒューリスティクスによる手法

Kaplan は焼きなまし法 (Simulated Annealing : SA) を用いた手法を提案している [Kaplan 00]. Isohedral タイルングの 93 パターンをもとに基本図形を与え、これを初期図形として、形状をランダムな値によって変化させ、評価する。評価が上がる場合は変化を受け入れ、評価が下がる場合は、温度パラメータ  $T$  による確率によって変化を受け入れるか受け入れないかを判別する。この処理を繰り返し、入力図形に対して、近い形状のタイルを生成する。この手法により凸に近い入力図形に対して、良質な解の生成が数値実験により示されている。しかし、辺変形の探索空間が膨大であることや、SA の特性上図形間のデータ交換が不可能なために、入力図形によっては良質な解に収束しなかったり、探索時間が非常に大きくなる。

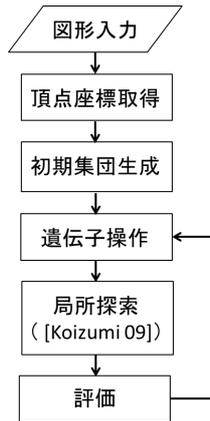


図 4: 提案手法の処理手順

対話型遺伝的アルゴリズム (Interactive Genetic Algorithm: IGA) を用いた手法も提案されている [Ono 14b, Ono 14a]. 行列計算に基づく解析的手法による手法 [Koizumi 09] と、入力図形の一部をタイリング辺として利用したランダム生成により初期図形を作り、辺の形状を設計変数として変形を繰り返すことで、最適化を行う。また、ユーザによる入力図形の再描画も可能である。このため多様性に富んだタイルを排出でき、入力図形の描画を繰り返す中で発見的にユーザの嗜好に合うタイルを見つけられることが可能であるが、探索空間が膨大なため、初期個体の 1 つである解析的手法による解やその一部を変形した解のみが得られることがある。

## 4. 提案手法

### 4.1 概要

本研究では、小泉らの解析的手法 [Koizumi 09] の目標図形の構成する点の試行錯誤と、メタヒューリスティクスを用いた手法 [Kaplan 00, Ono 14b, Ono 14a] の収束の遅さを解決する手法を提案する。提案手法は、遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm: GA) [Goldberg 89, 伊庭 94] を用いた大域的探索のなかに、小泉らによる解析的手法 [Koizumi 09] を局所探索として組み込んだ構造となっている (図 4)。大域的探索 (GA) では、局所探索で良質なタイルを生成できるような代表点集合 (局所探索における入力点群) および IH タイプを探索する。局所探索によって得られたタイルをフィードバックとして取得し、その適応度より選択、交叉などの遺伝子操作を行う。このプロセスを繰り返すことで、良質な解 (タイル) に収束していく。

上記のような、進化計算による大域的探索と、対象問題において有効な局所探索とを統合した探索モデルは、Memetic Algorithm (MA) と呼ばれており [Moscato 92, Radcliffe 94, Moscato 99], 提案手法も MA と同様の考え方に基づく方式である\*3。

解析的手法が持つ高速かつ安定したタイル生成性能と、GA が持つ多様な解候補の生成の特性とにより、ユーザによる試行錯誤を必要とせず、かつ、実用的な時間内にタイリング可能な図形を得ることができる。

\*3 一般の MA では、大域的探索および局所探索で同一の問題を解くが、提案手法では大域的探索と局所探索で設計変数が異なる。また、提案手法では、大域的探索における解から適応度を評価することができない。

### 4.2 個体表現 (設計変数)

従来手法 [Koizumi 09] を用いてタイルを生成するために、ユーザが描画した目標形状から点群を生成して与える必要があるが、先行研究ではユーザによる試行錯誤によって入力点群 (代表点群に相当) を決定している。また、先行研究では全ての IH タイプを全探索している。本研究では上記の 2 つのタスクを組み合わせ最適化問題として考え、GA の設計変数として代表点群および IH タイプを扱う。

代表点群は、所与の目標形状から抽出した  $N$  個の点群の中から選択された  $n$  個の点群とする。ここで、 $N$  個の点群は、点間の距離や曲率に注目した決定的な方式で抽出する ( $N$  角形に近似する)。すなわち、代表点群に対応する設計変数は長さ  $N$  のバイナリ列で表すことができる。また、利用可能な IH タイプの総数  $N_T$  に応じた長さ  $\lceil \log_2 N_T \rceil$  のバイナリ列を用いて、IH タイプを設計変数として表現する。

### 4.3 目的関数

提案手法における目的関数は、目標図形と出力タイルの形状の差異とする。先行研究 [Koizumi 09] では、2 つの図形の近さを表す指標は、対応する頂点間の距離をもとに定義される。提案手法では、比較する図形間で頂点数が異なることがあるため、目的関数  $F$  は以下のように定義する。

$$F = F_1 + \frac{N}{n} F_2 \quad (11)$$

ここで、 $F_1, F_2$  は 2 形状間の類似度であり、 $N$  個の頂点を持った目標図形  $\mathbf{W}_N$  の座標ベクトル  $\mathbf{u} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ ,  $n$  個の頂点を持った生成されたタイル  $\mathbf{U}$  の座標ベクトル  $\mathbf{w} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{x}_N, \bar{y}_N)$  を用いて以下のように定義する。

$$F_1 = \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i - x_i)^2 + (\bar{y}_i - y_i)^2 \quad (12)$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - x_k)^2 + (\bar{y}_i - y_k)^2 \quad (13)$$

$F_1$  は、目標図形  $\mathbf{W}_N$  の各頂点からみた、タイル  $\mathbf{U}$  の最近傍な線分上の点を取り、座標間の距離を 2 乗した和とする。 $(x_i, y_i)$  は、 $\mathbf{U}$  における  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  との最近傍な線分上の点を示す。

また逆方向からも考え、 $F_2$  はタイル  $\mathbf{U}$  の各頂点からみた、目標図形  $\mathbf{W}_N$  最近傍頂点を取り、座標間の距離を 2 乗した和とする。 $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$  は、 $\mathbf{W}_N$  における  $(x_i, y_i)$  との最近傍点を示す。

### 4.4 交叉, 選択, 突然変異

本研究で用いる GA は、一般的なバイナリ型の GA [Goldberg 89, 伊庭 94] であり、一様交叉を用い、突然変異はランダムに遺伝子を選択して反転させる。また、IH タイプによって「点の数が基本多角形の辺数の倍数でなければならない」などの制約があることから、選択された点の総数  $n$  が常に制約を満たす倍数値となるよう修復操作を行う。生存選択は、親と子と比較して適応度が優れた方を残すように行う。

## 5. 実行例

図 5 を目標図形として提案手法と先行研究 [Koizumi 09] との比較を行った。50 世代分の探索が終了した時点における GA の最良解を図 6 に、先行研究の解を図 7 に示す。これより、先

行研究では目標図形と大きく異なるタイルが生成された場合においても、提案手法では目標図形に近いタイルが得られた。提案手法は、目標図形から代表点を選出する際に、タイリングに不利な突起などの一部の形状を無視した代表点群を用いることで、結果として目標図形に近い良好なタイルを生成できたと考える。また、目標図形 (b) においては、先行研究と提案手法で、解の IH パターンが異なっている。これは目標図形を構成する点が変わったことにより、最適な IH パターンも変化し、より良好な解が見つけれられたと考える。得られたタイルより、エッシャー風タイリングアートを制作した例を図 8、図 9 に示す。

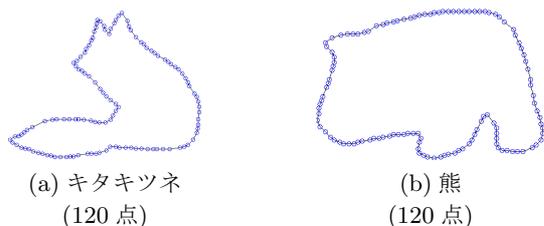


図 5: 目標図形

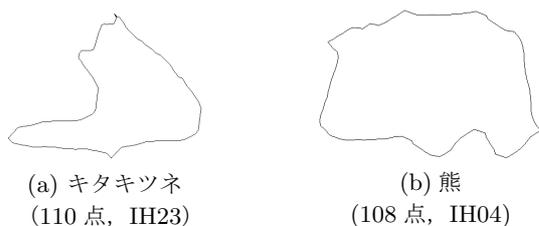


図 6: 本手法によって得られたタイル (GA50 世代)

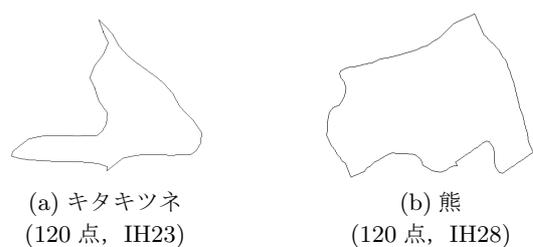


図 7: 先行研究 [Koizumi 09] によって得られたタイル

## 6. おわりに

本研究では、GA による代表点群および IH タイプの選択を行う大域的探索と、解析的演算によるタイル図形決定を行う局所探索とを統合した手法により、所与の形状に類似するタイリング可能な図形を自動生成する手法を提案した。実験結果より、先行研究 [Koizumi 09] が目標図形に類似するタイルを生成できない場合であっても、提案手法は目標図形に近いタイルを生成できることを確認した。

今後は、多点探索である GA の特性に着目した複数のタイル図形の提示方法や、多様性を維持することでユーザの発想を支援するシステムの実現を検討する。また、特徴的な輪郭の部

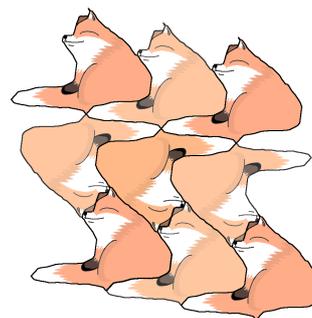


図 8: キタキツネのタイリングアート

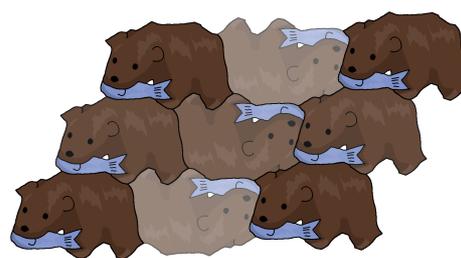


図 9: 熊のタイリングアート

分形状に注目した類似性評価方法や、ユーザの嗜好を反映したタイル図形の生成方法を検討する。

## 参考文献

- [Goldberg 89] Goldberg, D.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning* (1989)
- [Grunbaum 87] Grunbaum, B. and Shephard., G. C.: *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman, New York (1987)
- [Kaplan 00] Kaplan, C. S. and H.Salesin, D.: Escherization, Proceedings of SIGGRAPH, pp. 499–510 (2000)
- [Koizumi 09] Koizumi, H. and Sugihara, K.: Computer-aided design of Escher-like tiling, *NICOGRAPH Paper Contest* (2009)
- [Moscato 92] Moscato, P. and Tinetti, : FBleending heuristics with a population-based approach: A memetic algorithm for the traveling salesman problem, *Universidad Nacional de La Plata*, pp. 92–12 (1992)
- [Moscato 99] Moscato, P.: Memetic algorithms: a short introduction, *New ideas in optimization*, pp. 219–234 (1999)
- [Ono 14a] Ono, S., Kisanuki, M., Machii, H., and Mizuno, K.: Creation Support for Escher-Like Tiling Patterns by Interactive Genetic Algorithms, in *SIGGRAPH Asia* (2014)
- [Ono 14b] Ono, S., Kisanuki, M., Machii, H., and Mizuno, K.: Figure Pattern Creation Support for Escher-Like Tiling by Interactive Genetic Algorithms, Vol. 1 of *Proceedings in Adaptation, Learning and Optimization, 18th Asia Pacific Symposium on Intelligent and Evolutionary Systems*, pp. 421–432 (2014)
- [Radcliffe 94] Radcliffe, N. J. and Surry, P. D.: Formal Memetic Algorithms Lecture Notes in Computer Science 865 (Evolutionary Computing), *Springer-Verlag*, pp. 250–263 (1994)
- [伊庭 94] 伊庭 斉志: 遺伝的アルゴリズムの基礎—GA の謎を解く, オーム社 (1994)