2J1-4

2人ラウンド制 Item Picking Game の解析

Analysis of Two-Player Round System Item Picking Games

富永 優仁 Yuto Tominaga　苑田 尭久 Akihisa Sonoda　東藤 大樹 Taiki Todo　横尾 真 Makoto Yokoo

九州大学 大学院システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering at Kyushu University

There exist several alternative rules for allocating indivisible goods to agents. (e.g., allocating rookies to sports teams). In one rule, which is used in major professional sports leagues' drafts in the USA, agents (teams) take turns to pick items (players) according to a predefined sequence of the agents. Previous works examine computational complexity of agent's decision making in this rule. This paper examines another rule based on lotteries, which is used in the Japanese professional baseball league's draft. We showed that if there are only 2 agents, deciding whether a set of items can be obtained certainly or possibly for an agent can be computed in polynomial time assuming the possible actions of the other agent are known.

1. 序論

複数のアイテム（非分割財）を複数のエージェントに割り当てる問題は広く研究されている問題の 1 つである．割当を簡単に決定する方法として，事前に公開されたエージェントの順番 (シークエンス: sequence) に従って各エージェントがアイテムを獲得する方法がある．この方法はスポーツリーグのドラフト制度でしばしば採用され，現在は Sequential Allocation（SA）という名前で幅広く研究されている．

エージェントが 2 人の場合で自分が相手の単純な戦略を完全に知っている仮定のもと，ある財の集合（バンドル）を獲得する戦略が存在するかを多項式時間で判定できることが既に示されている [Bouveret 11]．また，同じ仮定のもとで，加法的な選好における効用値を最大化する戦略が多項式時間で計算できることも示されている [Bouveret 14]．さらに，エージェントが 2 人の場合において，部分ゲーム完全ナッシュ均衡が多項式時間で計算できることも示されている [Kalinowski 13b]．また，社会福祉（social welfare）を最大化する順番についても研究がされている [Kalinowski 13a]．

一方，抽選を用いて割当を決める方法も存在する．これはエージェントが同時に希望を言い，希望が被った場合は公平な抽選により誰に割り当てるか決定する方法であり，日本のプロ野球におけるドラフト会議（新人選手選択会議）で（1 順目のみだが）採用されている [*1]．そこで本研究では，既存研究により SA において多項式時間で解けると示された問題が,（毎巡）抽選を用いる方法においても多項式時間で解けるかを議論する．特に本論文では，[Bouveret 11] や [Bouveret 14] が示した問題について議論する．

具体的には，まず，一般的なモデルとして 2 人ラウンド制（Round System）Item Picking Game（2-RSIP Game）を定義し，そのモデル内で SA や抽選を用いる方法をルールとして定義する．その後，エージェントが 2 人の場合，あるバンドルが確実に獲得できるか否か，または獲得できる可能性があるか否かが抽選を用いる方法においても多項式時間で判定可能であることを示す．さらに応用として，加法的な選好を持つエージェントがある戦略により獲得する効用の最低値や最高値について，それらの最大値が多項式時間で計算可能であることを示す．なお，紙面の都合上，証明は全て割愛する．

2. 2 人ラウンド制 Item Picking Game

本論文で扱う 2-RSIP Game のモデルを紹介する．このモデルは，2 人からなるエージェントの集合 $\mathcal{N} = \{A, B\}$，アイテムの集合 $\mathcal{O} = \{1, 2, ..., m\}$，そしてルール R の 3 つからなる．ただし，m は 2 の倍数と仮定し，$m = 2s$ とする．s は全ラウンド数である．R は割当方法を定めるもので，次の 2 つの特徴を持つ.（1）ラウンドごとに各エージェントに 1 つのアイテムを割り当てる.（2）エージェントに残っているアイテムから希望するアイテムを 1 つ宣言させ，希望したアイテムを宣言したエージェントに割り当てるかどうか判定することで割当を決定する．R への入力は，宣言されたエージェントの希望のみである．また，R に関わらず，割当の経過 (各ラウンドでどのエージェントにどのアイテムが割り当てられたか) を表すヒストリ $h : \mathcal{N} \times \{1, ..., s\} \to \{0\} \cup \mathcal{O}$（0 はその段階で未割当であることを表す) は常に公開される情報であるとする．2-RSIP Game における戦略とは，各ラウンドにおいて，与えられるヒストリなどの情報に対しどのアイテムを獲得するかを記述したものをいう．

2.1 本論文で取り扱うルール

本論文では Fixed Sequence Rule（FS Rule），Lottery Rule（L Rule），Random Sequence Rule（RS Rule）の 3 つのルールを扱う．

定義 1 (Fixed Sequence Rule（FS Rule）) FS Rule はラウンドごとに $\mathcal{N}$ の順列であるサブシークエンス（sub sequence）$\pi_1, ..., \pi_s$ を持ち，ゲーム開始前に全て公開する．ラウンド t では π_t の順に従って各エージェントは希望するアイテムを宣言し，そのアイテムを無条件に獲得する．

$\pi_1, ..., \pi_s$ を全てまとめたゲーム全体の順番をシークエンス π とし，FS Rule が扱えるシークエンスの集合を Π_{FS} とする．また，シークエンスやサブシークエンスはエージェントの記号を並べて表記する．例えば $\pi_1 = AB$ は，ラウンド 1 で

連絡先: 富永 優仁，九州大学大学院システム情報科学府，〒812-0395，福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，tominaga@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

*1 新人選手選択会議規約 2010 年度版第 9 条による．

は A が最初に希望を宣言し，その後に B が希望を宣言することを意味する．

FS Rule は扱えるシークエンスがラウンド制のものに限定されるが，エージェントが順番にアイテムを獲得する点において既存研究の SA と全く同じである．そのため，2-RSIP Game において，SA は FS Rule と対応する．例えば $m = 4$ の場合，$ABAB$ や $ABBA$ は Π_{FS} に含まれ，FS Rule で扱われるシークエンスだが，$AABB$ や $BAAA$ は Π_{FS} に含まれず，FS Rule では扱われない．しかし，これらのシークエンスは全て SA では扱われる．

定義 2 (Lottery Rule（L Rule）) L Rule は各ラウンドにおいて，最初に A, B 両方が希望を宣言する．2 人の希望が被っていなければ，各エージェントに希望したアイテムを無条件に割り当てる．2 人の希望が被っていれば公平な (A, B ともに 1/2 の確率で勝つ) 抽選によって 1 人の勝者を決め，その勝者に希望したアイテムを割り当てる．敗者は再び希望するアイテムを宣言し，そのアイテムを無条件に獲得する．

L Rule は本論文で解析するルールである．ただし，L Rule はエージェントの希望によって抽選の有無が決定するため，ゲームの展開が複雑である．また，L Rule はシークエンスの概念がないため，既存研究の結果を用いた解析が困難である．そこで，本論文では L Rule の解析を容易にするため，RS Rule を導入する．

定義 3 (Random Sequence Rule（RS Rule）) RS Rule は FS Rule と同様，ラウンドごとにサブシークエンス（sub sequence）$\pi_1, ..., \pi_s$ を持ち，ラウンド t では π_t の順に従って各エージェントは希望するアイテムを宣言し，そのアイテムを無条件に獲得する．ただし，π_t はラウンド t 開始時にはじめて公開される（エージェントは現時点よりも後のラウンドのサブシークエンスを見ることができない）．また，π_t が AB, BA となる確率はそれぞれ 1/2 であるとする．

RS Rule において，結果的に実現したゲーム全体の順番をシークエンスと呼ぶ．シークエンスは Π_{FS} の中から一様な確率で選ばれて実現する．RS Rule はシークエンスの概念があり，既存研究の結果を用いた解析が可能である．そこで本論文ではまず RS Rule を解析し，その結果をもとに L Rule を解析する．RS Rule により L Rule が解析可能になる理由は次の章で詳しく説明する．

2.2 仮定

本論文では，2-RSIP Game における A の戦略について議論する．ただし，[Bouveret 11, Bouveret 14] と同じ仮定をおく．具体的にはまず，A は B の戦略を完全に知っていると仮定する．さらに，B がとる戦略は単純で決定的な戦略（simple deterministic strategy）であると仮定する．具体的には，B は $\mathcal{O}$ に関して定義されたある狭義全順序 $\rhd_B$（優先順序と呼ぶ）を持ち，B は残っているアイテムのうち $\rhd_B$ で最上位にあるアイテムを常に選択すると仮定する．$\rhd_B$ を与えると B の単純で決定的な戦略は一意に定まる．そして，A は $\rhd_B$ を知った上で行動する．

以上の仮定をおいた 2-RSIP Game は $(\mathcal{O}, R, \rhd_B)$ で定義できる．ここで，3 つのルールによる 2-RSIP Game をそれぞれ 2-FS Game，2-L Game，2-RS Game と呼ぶ．また，B の優先順序に関しては，例えば $1 \rhd_B 2 \rhd_B 3$ を $\rhd_B$: 1 2 3 と略記する．

2.3 A の戦略の表現

A の戦略を σ_A で表す．また，決定的な戦略のみを対象として議論する．

今回扱う 3 つのルールにおいて，σ_A が決定的であれば，σ_A を木構造で表すことができる．どのルールも，根にはゲーム開始前の状態を表す $\bullet$ をおく．根以外の深さ t の頂点には，ラウンド t の結果を記述する．これはタプル (i, j) で表記し，ラウンド t に A が i，B が j を獲得したことを表す．ここで，葉以外の頂点を分岐点と呼ぶ．

FS Rule の場合，確率的に定まる要素がないため，分岐を含まない一直線の木となる（各分岐点が持つ子は 1 つ）．

L Rule の場合，深さ $t-1 (1 \leq t \leq s)$ の分岐点を $\circ$ とすると，$\circ$ が持つ子の数はラウンド t で抽選が発生するか否かで変わる．抽選が発生しなかった場合，$\circ$ の子は 1 つで，その枝にはラベル NC（No Conflict）をつける．抽選が発生した場合，$\circ$ の子は 2 つで，2 つの枝にはそれぞれラベル Win，Lose をつける．A が抽選で勝った場合の行動は Win の枝の先に，A が抽選で負けた場合の行動は Lose の枝の先に記述する．ルールより，Win，Lose の枝に進む確率はそれぞれ 1/2 である．

RS Rule の場合，深さ $t-1$ の分岐点を $\circ$ とすると，普通 $\circ$ は 2 つの子を持つ．それぞれの枝にはラベル AB，BA がついており，$\pi_t = AB$ の場合の行動は AB の枝の先に，$\pi_t = BA$ の場合の行動は BA の枝の先に記述する．ルールより，AB，BA の枝に進む確率はそれぞれ 1/2 である．また，RS Rule の場合は戦略の表現を簡略化できる．分岐点 $\circ$ の 2 つの子をそれぞれ根とする 2 つの部分木が完全に等しい場合，1 つの部分木にまとめられる．部分木を 1 つにまとめた場合，$\circ$ と部分木の根の間の枝にはラベル AL（ALways）をつける．また，これ以上部分木をまとめられない表現を最簡表現と呼ぶ．

例 1 $m = 6, \rhd_B: 4\ 2\ 1\ 6\ 3\ 5$ の 2-RSIP Game において，L Rule での A の戦略の例を図 1 に，RS Rule での A の戦略の例を図 2 に示す．

図 1 については，各ラウンドでの結果に従って根から順に辿ると結果が得られる．ラウンド 1 では抽選を行わずに A が 2，B が 4 を獲得する．分岐が発生するラウンド 2 では，A は最初に Win の枝に進むことを試みる．すると，A は最初に 1 を希望することになるが，B の希望と被るため抽選が発生する．そこで A が勝つと A は 1，B は 6 を獲得し，A が負けると A は 3，B は 1 を獲得する．ラウンド 3 についても同様に解釈する．

図 2 については，各ラウンドでのサブシークエンスに従って根から順に辿ると結果が得られる．例えば $\pi = ABABBA$ が実現した場合，A は $\{2, 1, 5\}$，B は $\{4, 6, 3\}$ を獲得する．また，図 2 を最簡表現にすると図 3 のようになる．図 1 と図 3 を比較すると，ラベルが異なるだけで木の構造自体は等しい．

2.4 A が獲得するバンドルの数学的表現

一般の 2-RSIP Game において，(FS-Rule の場合は決定的であるが) A が獲得するバンドルは確率的に定まる．そこで，確率的に定まるバンドル（財の集合）を数学的に表現する．

通常，確率的な現象を議論する際，確率変数（random variable）を考えることが多い．確率変数は，根源事象全体の集合（標本空間: sample space）Ω から実数全体 $\mathbb{R}$ への関数 *2 で表される．

一般の 2-RSIP Game において，A が獲得するバンドルは，標本空間から $2^{\mathcal{O}}$ への関数として与えられる．そこで，この関

*2 正確には可測関数である．

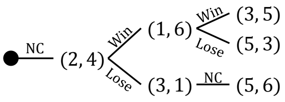

図 1: L Rule における戦略例

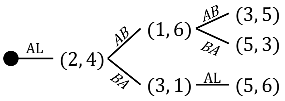

図 3: 図 2 の最簡表現

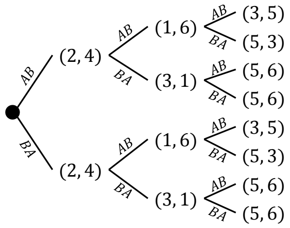

図 2: RS Rule における戦略例

数を O_A で表す．このように，確率的に定まる集合のことを確率集合（random set）と呼ぶ．σ_A を 1 つに定めると O_A の分布は一意に定まるため，A が戦略 σ_A をとったときの確率集合を $O_A(\sigma_A)$ で表す．また，σ_A によってあるバンドル X が獲得できる確率を $\Pr[X \subseteq O_A(\sigma_A)]$ で表す．

3. 2-RS Game と 2-L Game との関係

本章では，同じ $\mathcal{O}, \rhd_B$ を持つ 2-RS Game と 2-L Game の比較を行い，2-RS Game を解析する理由について述べる．

2-RS Game において A がとりうる全ての戦略の集合を Σ_A^{RS}，2-L Game において A がとりうる全ての戦略の集合を Σ_A^L とする．そして，Σ_A^{RS} に属す戦略のうち，ある種の一貫性を持つ戦略のクラス Σ_A^{RSC} を定義する．

定義 4 (クラス Σ_A^{RSC}) Σ_A^{RS} のうち，以下の条件を満たす戦略の集合を Σ_A^{RSC} とする．

最簡表現において，任意の分岐点を $\circ$（深さ $t-1(1 \leq t \leq s)$）とすると，$\circ$ は以下の 2 つのうちどちらか 1 つを満たす．

Type 1 $\circ$ の子が 1 つのみ（分岐しない）．つまり，π_t によらず常に決まったアイテムを獲得し，その後の行動も π_t によらない．

Type 2 $\circ$ の子が 2 つの場合．AB，BA の枝の先にある頂点をそれぞれ $(i_{AB}, j_{AB}), (i_{BA}, j_{BA})$ とすると，$i_{AB} = j_{BA}(\neq j_{AB})$ を満たす．つまり，$\pi_t = AB$ のときに A が獲得するアイテムは，$\pi_t = BA$ だと B に取られてしまうアイテムである．その場合のみ，$\circ$ の子が 2 つである．

Σ_A^{RSC} と Σ_A^L の関係について，以下の定理を示した．

定理 1 全単射 $\delta : \Sigma_A^{RSC} \to \Sigma_A^L$ が存在し，δ は以下を満たす．

任意の $\sigma_A^{RSC} \in \Sigma_A^{RSC}$ の木構造表現を最簡表現にして，そこに出現するラベルを 表 1 に従って書き換えた木構造表現は，$\sigma_A^L = \delta(\sigma_A^{RSC})$ の木構造表現である．さらに，$O_A(\sigma_A^{RSC})$ と $O_A(\sigma_A^L)$ の分布は等しい．

定理 1 は，Σ_A^{RSC} と Σ_A^L の間に表 1 で示されるラベルの対応関係が存在し，ラベルの書き換えによって Σ_A^{RSC} に属す戦略と Σ_A^L に属す戦略とを相互に変換できることを示している．さらに，δ で関係付けられる 2 つの戦略は互いに模倣しあう関係であることも示している．

例えば，例 1 において，図 3 で示される RS Rule における戦略を σ_A とすると，σ_A は Σ_A^{RSC} に属す．そして，図 1 で示される L Rule における戦略は $\delta(\sigma_A)$ である．

この全単射を用いることで，2-RS Game の解析の結果から 2-L Game を解析できる．

表 1: ラベルの対応関係

分岐の種類	Σ_A^{RSC} のラベル	Σ_A^L のラベル
分岐なし（**Type 1**）	AL	NC
分岐あり（**Type 2**）	AB	Win
	BA	Lose

4. 確実なバンドルと可能なバンドルの解析

2-FS Game や 2 人による SA（2-SA）では，A の戦略を定めると，A が獲得するバンドルは一意に定まる．シークエンスが π の 2-FS Game や 2-SA において，あるバンドル $X \in 2^{\mathcal{O}}$ に対し，A が X を獲得できる戦略が存在するならば，X は π で達成可能（achievable）であるという．

一方，2-RS Game や 2-L Game では，A の戦略を定めても，A が獲得するバンドルは確率的に定まる．そこで本章では，2-RS Game や 2-L Game において「達成可能」の度合いを表す 2 つの概念を定義する．

確実なバンドル（certain bundle） あるバンドル $X \in 2^{\mathcal{O}}$ に対し，$\Pr[X \subseteq O_A(\sigma_A)] = 1$ を満たす戦略 σ_A が存在するならば，X を確実なバンドルと呼ぶ．

可能なバンドル（possible bundle） あるバンドル $X \in 2^{\mathcal{O}}$ に対し，$\Pr[X \subseteq O_A(\sigma_A)] > 0$ を満たす戦略 σ_A が存在するならば，X を可能なバンドルと呼ぶ．

そして，確実なバンドルか否か，または可能なバンドルか否かを判定する問題の計算困難性について議論する．ただし，本章における 2-FS Game，2-RS Game，2-L Game は同じ $\mathcal{O}, \rhd_B$ を持つものとする．

4.1 確実なバンドル

まず，確実なバンドルであるかが多項式時間で判定できることを示す．$\pi_{worst} = BABA...$ の 2-FS Game で達成可能なバンドルの集合を $\mathcal{X}_{worst}$ とする．

最初に，[Bouveret 11] の結果を用いて，2-RS Game において確実なバンドルであるための必要十分条件を示した．

定理 2 2-RS Game において，あるバンドル X が確実なバンドルであるための必要十分条件は $X \in \mathcal{X}_{worst}$ である．

[Bouveret 11] より，あるバンドル X が $X \in \mathcal{X}_{worst}$ を満たすかは多項式時間で判定できる．これと 定理 2 より 命題 1 を得る．

命題 1 2-RS Game において，あるバンドルが確実なバンドルであるかは多項式時間で判定できる．

続いて，2-L Game において確実なバンドルであるための必要十分条件を示した．

定理 3 2-L Game において X が確実なバンドルであるための必要十分条件は，2-RS Game において X が確実なバンドルであることである．

2-RS Game において任意の確実なバンドル X に対し，$\Pr[X \subseteq O_A(\sigma_{A_{C(X)}}^{RSC})] = 1$ を満たす $\sigma_{A_{C(X)}}^{RSC} \in \Sigma_A^{RSC}$ が存在することを示せるので，その $\sigma_{A_{C(X)}}^{RSC}$ と 定理 1 を用いて 定理 3 が示せる．

命題 1 と定理 3 より命題 2 を得る．

命題 2 2-L Game において，あるバンドルが確実なバンドルであるかは多項式時間で判定できる．

以上により，2-RS Game，2-L Game において，あるバンドルが確実なバンドルであるかが多項式時間で判定できることを示した．

4.2 可能なバンドル

説明は省略するが，可能なバンドルについても 4.1 節 と同様の流れで以下の定理や命題を示せる．ただし，$\pi_{best} = ABAB...$ の 2-FS Game で達成可能なバンドルの集合を $\mathcal{X}_{best}$ とする．

定理 4 2-RS Game において，あるバンドル X が可能なバンドルであるための必要十分条件は $X \in \mathcal{X}_{best}$ である．

命題 3 2-RS Game において，あるバンドルが可能なバンドルであるかは多項式時間で判定できる．

定理 5 2-L Game において X が可能なバンドルであるための必要十分条件は，2-RS Game において X が可能なバンドルであることである．

命題 4 2-L Game において，あるバンドルが可能なバンドルであるかは多項式時間で判定できる．

以上により，2-RS Game，2-L Game において，あるバンドルが可能なバンドルであるかも多項式時間で判定できることを示した．

5. 応用例: 加法的な選好を持つエージェント

これまでの議論を A に加法的な選好を持たせた 2-RSIP Game のモデルに応用して議論する．この 2-RSIP Game は $(\mathcal{O}, R, \rhd_B, u_A)$ で定義できる．このモデルで新しく追加された $u_A : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^+$ は，A の加法的な選好を表す効用関数である．加法的な選好であるので，バンドル $X \in 2^{\mathcal{O}}$ が持つ効用値（A が X を獲得した場合に A が獲得する効用値）は $\Sigma_{i \in X} u_A(i)$ である．

一般的に，2-RSIP Game において，A が獲得する効用値は確率的に定まる．そのため，A が獲得する効用値に関する確率変数を U_A とおく．U_A の分布は A の戦略 σ_A が定まると一意に定まる．従って，σ_A によって A が獲得する効用値を表す確率変数を $U_A(\sigma_A)$ で表す．

$U_A(\sigma_A)$ が実現しうる値のうち，最も小さな値を最低効用値（minimum utility）$\mathrm{Min}[U_A(\sigma_A)] = \min\{x | \Pr[U_A(\sigma_A) = x] > 0\}$ と呼び，最も大きな値を最高効用値（maximum utility）$\mathrm{Max}[U_A(\sigma_A)] = \max\{x | \Pr[U_A(\sigma_A) = x] > 0\}$ と呼ぶ．ここでは，この最低効用値や最高効用値の最大値について議論する．また，本章において，2-RS Game と 2-L Game は同じ $\mathcal{O}, \rhd_B, u_A$ を持つものとする．

$\mathcal{X}_{worst}$ のうち，効用値が最も高いバンドルを X_w とし，X_w が持つ効用値を u_w とする．また，$\mathcal{X}_{best}$ のうち，効用値が最も高いバンドルを X_b とし，X_b が持つ効用値を u_b とする．前章で示した結果や u_A の性質を用いて，次の定理を示した．

定理 6 2-RS Game や 2-L Game において，最低効用値 $\mathrm{Min}[U_A]$ の最大値は u_w，最高効用値 $\mathrm{Max}[U_A]$ の最大値は u_b である．

さらに，[Bouveret 14] より，u_w や u_b は多項式時間で計算できるため，次の命題を得る．

命題 5 2-RS Game や 2-L Game において，最低効用値 $\mathrm{Min}[U_A]$ や 最高効用値 $\mathrm{Max}[U_A]$ の最大値は多項式時間で計算可能である．

6. 結論

本論文では RS Rule や L Rule といった，乱数（抽選）を用いる割当方法の解析を行った．その結果，2 人の場合でかつ，自分が相手の単純な戦略を完全に知っている仮定のもとでは，あるバンドルが獲得できるか判定する問題が乱数を用いた方法においても多項式時間で判定できることを示した．また，加法的な選好について，最低効用値や最高効用値の最大値も多項式時間で計算できることを示した．

今後の課題としては，加法的な選好に関しては効用値の期待値の最大値を求める問題の計算困難性について調べることが挙げられる．また，本論文では 2 人の場合に限定していたため，一般の人数の場合での計算困難性について調べることも挙げられる．

謝辞

本研究は JSPS 基盤研究 (S) (課題番号 24220003) の助成を受けました．ここに深く感謝いたします．

参考文献

[Bouveret 11] Bouveret, S. and Lang, J.: A general elicitation-free protocol for allocating indivisible goods, in *Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-11)* (2011)

[Bouveret 14] Bouveret, S. and Lang, J.: Manipulating picking sequences, in *Proceedings of the 21st European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'14)*, IOS Press (2014)

[Kalinowski 13a] Kalinowski, T., Narodytska, N., and Walsh, T.: A social welfare optimal sequential allocation procedure, in *Proceedings of the Twenty-Third international joint conference on Artificial Intelligence (IJCAI-13)*, pp. 227–233AAAI Press (2013)

[Kalinowski 13b] Kalinowski, T., Narodytska, N., Walsh, T., and Xia, L.: Strategic Behavior when Allocating Indivisible Goods Sequentially., in *Proceedings of the Twenty-Seventh AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-13)* (2013)