2J1-3

物々交換モデルにおける財の非対称性

A Note on Asymmetry in Multiple Objects Exchange

孫 兆鴻　東藤 大樹　横尾 真
Zhaohong Sun　Taiki Todo　Makoto Yokoo

九州大学大学院システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

In this paper we study the exchange of indivisible objects where agents' possible preferences over the objects are strict and share a common structure among all of them, which represents a certain level of asymmetry among objects. A typical example of such an exchange model is a re-scheduling of tasks over several processors, since all task owners are naturally assumed to prefer that their tasks are assigned to fast processors rather than slow ones. We focus on designing exchange rules (a.k.a. mechanisms) that simultaneously satisfy individual rationality, Pareto efficiency, and strategy-proofness. We first provide a general impossibility result for agents' preferences that are determined in an additive manner, and then show an existence of such an exchange rule for further restricted preferences.

1. はじめに

物々交換は，ゲーム理論／メカニズムデザインにおける重要な数理モデルの 1 つで，近年では人工知能や理論計算機科学の分野でも盛んに研究が行われている．最もよく知られた応用事例は，米国における腎移植ネットワークである [5]．その他にも，大学における学生向け居住施設の割当 [1] や空港における離発着権の割当 [7] など，様々な応用事例が存在する．

Shapley ら [8] が提起したハウジングマーケット問題（housing market problem）は，物々交換モデルにおいて最も基本的な問題である．ハウジングマーケット問題では，各参加者が部屋などの非分割財を 1 つだけ所持しており，貨幣によるやり取りを行うことなく財を交換する．参加者が非分割財に対して表明可能な選好順序が厳密 (strict) なものに制限されている場合，よく知られたトップトレーディングサイクル（top trading cycles, TTC）方式は，個人合理性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満足する唯一の物々交換方式となる [3]．参加者の表明可能な選好順序が無差別性が含む場合の研究も行われており，上記 3 性質を同時に満足する物々交換方式やそのクラスが提案されている [6]．

一方，Sönmez [9] は各参加者が 1 つ以上の非分割財を所持する一般の物々交換モデルでは，参加者の表明可能な選好順序がある 2 つの仮定を満たす限り，上記 3 性質を同時に満足する物々交換方式は存在しないことが知られている．その 2 つの仮定は，直感的には次のように説明される：

仮定 1 予め保持している非分割財の集合（バンドル）は，他の任意のバンドルと比較して無差別とならない

仮定 2 与えられた 1 つの表明可能な選好順序に対し，非分割財の名前の入れ替えを行って構築される選好も，同様に表明可能である

Sönmez による不可能性定理は，参加者の表明可能な選好順序がこれらの 2 つの仮定を満足しつつ，より制限されている環境へも拡張されており [4, 2, 10]．各参加者が 1 つ以上の非分割財を所持する場合の物々交換の困難性を示している．

本論文では，Sönmez が導入した仮定 2 が成立しない環境における物々交換を考える．具体的には，交換されるいくつかの非分割財の間に明らかな優劣関係が存在し，その優劣関係を維持する選好順序のみが表明可能となる場合を考える．例えば，参加者 i の所持する財 a が，参加者 j の所持する財 b よりも明らかに優れており，全ての参加者が財 a を財 b よりも好むような場合である．この場合，バンドル間の選好順序についても同様に，任意の非分割財の集合（バンドル）C に対して，全ての参加者が $C \cup \{a\}$ を $C \cup \{b\}$ よりも好むと仮定する．著者らの知る限り，このような選好順序の制限は従来研究されていない．しかしながら，参加者の選好順序がこのような構造を持つと仮定することは比較的自然であると考える．例えば，最新のノート PC とその型落ちのモデルがある場合に，サイズや環境性能などが同じであるならば，全ての参加者が最新のノート PC を好むと仮定するのは自然である．

本論文では，参加者の表明可能な選好順序の集合を，非分割財の集合上の非反射的かつ推移的な二項関係から構築する．ある与えられた二項関係が，全ての参加者が共有する非分割財の間の優劣関係を表現する．また，与えられた二項関係から選好順序の集合を構築するとき，加法的拡張 (additive extension) と辞書式順序的拡張 (lexicographic extension) という 2 つの手法を用いる．まず，選好順序の集合が加法的拡張によって構築される場合には，任意の与えられた二項関係から構築される選好順序の集合に対して，3 性質を同時に満たす物々交換方式が存在しないことを示す．次に，選好順序の集合が辞書式順序的拡張によって構築される場合に，3 性質を同時に満たす物々交換方式が存在する例を示す．

本論文の構成を以下に示す．まず 2 章で，本論文で扱う物々交換モデルについて説明を行う．3 章では，非分割財の集合上の二項関係を定義し，加法的拡張と辞書式順序的拡張について説明する．4 章では，加法的拡張の下での不可能性について述べる．5 章では，辞書式順序的拡張の下で 3 性質を同時に満足する物々交換方式を説明する．6 章で今後の課題を示す．

連絡先: 九州大学大学院システム情報科学府，819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，092-802-3576，sun@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

2. モデル

本研究で扱う物々交換のモデルを以下に記す．マーケットに存在する非分割財の集合を K，参加者の集合を $N=\{1,\ldots,n\}$ とする．各参加者 $i\in N$ には，非分割財 K の部分集合として初期保有財 $w_i\subseteq K$ が与えられる．各財はそれぞれ異なると仮定し，任意の参加者 $i,j(\neq i)\in N$ について $w_i\cap w_j=\varnothing$，$\bigcup_{i\in N}w_i=K$ とする．また，参加者全員の初期保有財をリスト $w=(w_i)_{i\in N}$ で表現する．

参加者全員に対するすべての実現可能な財の割当を $\mathcal{X}_N$ とする．ある実現可能な割当をリスト $x=(x_i)_{i\in N}\in\mathcal{X}_N$ で表現する．また，実現可能な割当 x において，参加者 $i\in N$ に割り当てられる財の集合は x_i で表される．このとき，任意の参加者 $i,j(\neq i)\in N$ について $x_i\cap x_j=\varnothing$，$\bigcup_{i\in N}x_i=K$ とする．明らかに，任意の初期保有財のリスト w は，ひとつの実現可能な財の割当とみなすことができ，$w\in\mathcal{X}_N$ である．

各参加者 $i\in N$ は，財の集合 K の任意の部分集合に対して選好順序 R_i を持つ．R_i は完全性を満たし，反射的かつ推移的であるものとする．与えられた選好順序 R_i について，任意の財の部分集合 $L,L'\subseteq K$ に関して，LR_iL' は L を L' 以上に好むことを意味し，LP_iL' は L を L' よりも厳密に好むことを意味する．また，$\mathscr{R}$ を任意の表明可能な選好順序の集合とし，参加者全員の選好順序の組をリスト $R=(R_i)_{i\in N}\in\mathscr{R}^n$ で表現する．さらに，特定の参加者 $i\in N$ の選好順序を除いた選好順序のリストを $R_{-i}=(R_j)_{j\in N\setminus\{i\}}\in\mathscr{R}^{n-1}$ と表現する．

物々交換方式 $\varphi:\mathscr{R}^n\to\mathcal{X}_N$ は，選好順序のリスト $R\in\mathscr{R}^n$ から，実現可能な割当 $\varphi(R)\in\mathcal{X}_N$ を返す関数である．物々交換方式 φ による参加者 $i\in N$ に対する（選好順序のリスト R のもとで）財の割当を $\varphi_i(R)$ と表現する．ここで，物々交換方式が満足すべき性質として，個人合理性，パレート効率性，および耐戦略性を定義する．

定義 1 (個人合理性)**.** 物々交換方式 φ が個人合理性を満たすとは，$\forall N,\forall K,\forall i\in N$ および $\forall R\in\mathscr{R}^n$ について，$\varphi_i(R)R_iw_i$ が成立することである．

個人合理性を満足する物々交換方式においては，参加者が自身の選好について正直な申告を行う限り，その参加者の効用（嬉しさ）が減少しないことが保証される．このため，各参加者は，個人合理性を満足する物々交換方式による物々交換マーケットに参加する誘因を持つといえる．

定義 2 (パレート効率性)**.** 選好リスト R が与えられたときに，割当 $y\in\mathcal{X}_N$ が割当 $x\in\mathcal{X}_N$ をパレート支配するとは，$\forall i\in N$，$y_iR_ix_i$ かつ $\exists j\in N$，$y_jP_jx_j$ が成立することをいう．$\forall N$，$\forall K$，$\forall R\in\mathscr{R}^n$ について，どのような割当 $y\in\mathcal{X}_N$ に対しても物々交換方式 $\varphi(R)$ がパレート支配されないとき，φ はパレート効率性を満たすという．

すなわち，パレート効率的な割当の下では，誰か一人の嬉しさを上昇させるためには，少なくとも別の一人の嬉しさを減少させなければならない．この意味で，パレート効率的な物々交換は社会的に望ましい割当を実現するといえる．

定義 3 (耐戦略性)**.** $\forall N$，$\forall K$，$\forall R\in\mathscr{R}^n$，$\forall i\in N$，$\forall R'_i\in\mathscr{R}$ について $\varphi_i(R)R_i\varphi_i(R'_i,R_{-i})$ を満たすとき，物々交換方式 φ は耐戦略性を満たすという．

耐戦略性を満たす物々交換方式のもとでは，すべての参加者は自身の選好順序を正直に表明することが支配戦略となる．

3. 選好の構築

本章では，非分割財の集合上の二項関係について説明し，与えられた二項関係から各参加者の選好順序を構築する 2 つの手法を定義する．非分割財の集合 K 上の厳密かつ推移的な二項関係を $\rhd$ で表す．また，任意の 2 つの財 $a,b\in K$ について，$a\rhd b$ と表現した場合には $(a,b)\in\rhd$ であることを意味する．ここで，$\rhd$ は必ずしも完全 (complete) でないことに注意されたい．

選好順序の集合を構築するために，まずは準備として，与えられた二項関係 $\rhd$ から財の全順序 $\succ$ を導出する方法を述べる．集合 $\mathscr{S}_\rhd$ を，二項関係 $\rhd$ を保持する任意の全順序の集合と定義する．ここで，全順序 $\succ$ が二項関係 $\rhd$ を保持するとは，任意の $a,b\in K$ に関して，$(a,b)\in K$ であるならば必ず，全順序 $\succ$ において a が b よりも前に現れることを意味する．またこのとき，$a\succ b$ と表す．二項関係が任意の参加者間で共有されるのに対し，全順序は各参加者がそれぞれ所有する．すなわち，各参加者 $i\in N$ はそれぞれ，与えられた二項関係 $\rhd$ を保持する全順序 $\succ_i\in\mathscr{S}_\rhd$ を所有する．

各参加者の選好順序 R_i は，上記の通り定めた財の全順序 $\succ_i$ から，下記の 2 通りの方法で構築される．

定義 4 (加法的拡張)**.** ある与えられた二項関係 $\rhd$ と全順序 $\succ_i\in\mathscr{S}_\rhd$ について，任意の $a,b\in K$ に関して $a\succ_i b$ ならば $v_i(a)>v_i(b)$ となるような価値関数 $v_i:K\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を任意に定義する．選好順序 R_i は以下で定義される：

$$\forall L,L'\subseteq K,LR_iL'\Leftrightarrow\bigcup_{a\in L}v_i(a)\geq\bigcup_{b\in L'}v_i(b)$$

定義 5 (辞書式順序的拡張)**.** ある与えられた二項関係 $\rhd$ と全順序 $\succ_i\in\mathscr{S}_\rhd$ について，任意の $a\in K$ に関して $u_i(a)>\sum_{b;a\succ_i b}u_i(b)$ となるような価値関数 $u_i:K\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を任意に定義する．選好順序 R_i は以下で定義される：

$$\forall L,L'\subseteq K,LR_iL'\Leftrightarrow\bigcup_{a\in L}u_i(a)\geq\bigcup_{b\in L'}u_i(b)$$

明らかに，辞書式順序的拡張は加法的拡張の特殊ケースである．実際，加法的拡張の定義における価値関数 v_i を，辞書式順序的拡張で用いた価値関数 u_i で置き換えることで，両者の定義は一致する．以下の例で，上記の選好順序の構築手法を具体的に説明する．

例 1. *2* 人の参加者 $N=\{1,2\}$ が存在し，それぞれの初期保有財がリスト $w=(w_1,w_2)=(\{a,b\},c)$ で与えられる状況を考える．今，二項関係が $\rhd=\{(a,b)\}$ で与えられているとする．例えば参加者 *1* は，$\rhd$ に違反しない全順序として $a\succ_1 c\succ_1 b$ を所有する．また，参加者 *2* は $c\succ_1 a\succ_1 b$ を所有する．このとき，参加者 *1* の選好順序が加法的拡張で構築されるとすると，例えば

$$\{abc\}P_1\{ac\}P_1\{ab\}P_1\{a\}P_1\{bc\}P_1\{c\}P_1\{b\}P_1\varnothing$$

のような選好順序が表明可能である．一方，参加者 *2* の選好順序が辞書式順序的拡張で構築されるとすると，

$$\{abc\}P_1\{ac\}P_1\{bc\}P_1\{c\}P_1\{ab\}P_1\{a\}P_1\{b\}P_1\varnothing$$

のみが表明可能な選好順序となる．

このとき，辞書式順序的拡張による選好順序の構築は与えられた全順序に対して一意に定まるが，各参加者は任意の（二項関係を保持する）全順序を所有可能である点に注意されたい．すなわち，選好順序が辞書式順序的拡張によって定まる環境においても，各参加者は虚偽の選好順序の表明が依然として可能であり，物々交換方式が耐戦略性を満足するか否かの議論を省略することはできない．

4. 加法的拡張の場合

本章では，選好順序が加法的拡張によって構築される場合に，自明な場合をのぞいて 3 性質を同時に満足する物々交換方式が存在しないことを示す．

定理 1. 参加者が *2* 人以上，それぞれの参加者が非分割財を *2* つ以上所有する物々交換を考える．このとき，各参加者の選好順序が加法的拡張によって構築される場合には，任意の二項関係に関して，個人合理性，パレート効率性，および耐戦略性を同時に満足する物々交換方式は存在しない．

証明. 一般性を失うことなく，参加者 2 人，非分割財 4 つの以下の物々交換を考える：$N = \{1, 2\}$, $w = (w_1, w_2) = (\{a, b\}, \{c, d\})$. また，二項関係が $c \rhd a \rhd b \rhd d$ が以下で与えられているとする．このとき，各参加者の選好順序を，以下を満たす価値関数を用いた加法的拡張によって構築する：

$$v_1(c) = 15, v_1(a) = 9, v_1(b) = 4, v_1(d) = 3$$

$$v_2(c) = 10, v_2(a) = 8, v_2(b) = 5, v_2(d) = 1$$

これらの価値関数の下で，パレート効率的かつ個人合理的な割当は，次の x と y の 2 つのみである：

$$x = (x_1, x_2) = (\{c, d\}, \{a, b\})$$

$$y = (x_1, x_2) = (\{c\}, \{a, b, d\})$$

今，3 性質を満たす物々交換方式によって x が生じたと仮定する．このとき，参加者 2 が以下の虚偽の価値関数 v'_2 を表明すると，x は個人合理性を満足しなくなるため，可能な割当は y のみとなる：

$$v'_2(c) = 10, v'_2(a) = 8, v'_2(b) = 2.5, v_2(d) = 1$$

よって，参加者 2 はこの虚偽表明によってより好ましいバンドルを獲得することになり，耐戦略性に違反する．

次に，3 性質を満たす物々交換方式によって y が生じたと仮定する．このとき，参加者 1 が以下の虚偽の価値関数 v'_1 を表明すると，y は個人合理性を満足しなくなるため，可能な割当は x のみとなる：

$$v_1(c) = 11, v_1(a) = 9, v_1(b) = 4, v_1(d) = 3$$

よって，参加者 2 はこの虚偽表明によってより好ましいバンドルを獲得することになり，耐戦略性に違反する．

すなわち，パレート効率性と個人合理性を同時に満足する物々交換方式は，耐戦略性を満足することはできない．この議論は任意の二項関係 $\rhd$ について拡張できる． □

この結果は，Konishi ら [2] による不可能性定理の拡張と捉えることができる．Konishi らは，二項関係を導入せず，より多くの選好順序が表明可能である環境において，3 性質を同時に満足する物々交換方式が存在しないことを示した．上記の我々の定理は，二項関係を導入し，表明可能な選好順序が制限された環境においても，依然として 3 性質を同時に満足する物々交換方式が存在しないことを示している．

5. 辞書式順序的拡張の場合

本章では，選好順序が辞書式順序的拡張によって構築される場合に，3 性質を同時に満足する物々交換方式が存在可能な二項関係の例を示す．具体的には，K の m-分割 $(H_1, \ldots, H_m)$ が存在し，以下の 2 条件を満足する二項関係を考える．

1. $\forall i \in N$, $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$, $|H_k \cap w_i| \leq 1$
2. $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$, $a \in H_k$, $\forall l > k$, $\forall b \in H_l$, $a \rhd b$

直感的には，財がいくつかの階層に分かれ，上の階層の財は下の階層の任意の財よりも優れており，各参加者は各階層から高々一つの財を所有しているようなケースを記述している．紙幅の都合上，下記の定理の証明は省略する．

定理 2. 各参加者の選好順序が辞書式順序的拡張によって構築される場合，上記の条件を満たす二項関係に関して，各階層に *TTC* 方式を適用することで，個人合理性，パレート効率性，および耐戦略性を同時に満足可能である．

6. おわりに

本論文では，物々交換のケーススタディの 1 つとして，各参加者の表明可能な選好が制限され，各財が非対称な関係を持つ場合を考察した．これは，これまで議論されてきた様々なケーススタディとは異なるアプローチである．今後は，3 性質を同時に満足する物々交換方式の存在を保証するための，選好順序に関する必要十分条件を導出する予定である．

参考文献

[1] A. Abdulkadiroğlu and T. Sönmez. House allocation with existing tenants. *J. Econ. Theory*, 88(2):233 – 260, 1999.

[2] H. Konishi, T. Quint, and J. Wako. On the shapley-scarf economy: the case of multiple types of indivisible goods. *J. Math. Econ.*, 35(1):1 – 15, 2001.

[3] J. Ma. Strategy-proofness and the strict core in a market with indivisibilities. *Int. J. Game Theory*, 23(1):75–83, 1994.

[4] S. Pápai. Strategyproof exchange of indivisible goods. *J. Math. Econ.*, 39(8):931 – 959, 2003.

[5] A. E. Roth, T. Sönmez, and M. U. Ünver. Kidney exchange. *Q. J. Econ.*, 119(2):457–488, May 2004.

[6] D. Saban and J. Sethuraman. House allocation with indifferences: A generalization and a unified view. In *ACM-EC*, pages 803–820, 2013.

[7] J. Schummer and R. V. Vohra. Assignment of arrival slots. *AEJ-Micro.*, 5(2):164–85, 2013.

[8] L. Shapley and H. Scarf. On cores and indivisibility. *J. Math. Econ.*, 1(1):23–37, 1974.

[9] T. Sönmez. Strategy-proofness and essentially single-valued cores. *Econometrica*, 67(3):677–689, 1999.

[10] T. Todo, H. Sun, and M. Yokoo. Strategyproof exchange with multiple private endowments. In *AAAI*, pages 805–811, 2014.