2J1-1

# 戦略的操作不可能なケーキ分割メカニズムの提案

Proposing Strategy-proof Cake Cutting Mechanisms

伊原 尚正 Takamasa Ihara　鶴田 俊佑 Shunsuke Tsuruta　東藤 大樹 Taiki Todo　櫻井 祐子 Yuko Sakurai　横尾 真 Makoto Yokoo

九州大学大学院システム情報科学府
ISEE, Kyushu University

The cake-cutting problem has been considered one of the traditional computational problems. Various cake-cutting rules have been proposed to guarantee desirable properties such as proportionality, envy-freeness, and Pareto efficiency (PE). In the existing works, they have not studied the manipulation of a participant's declaration. However, Chen et al. [2013] recently proposed a strategy-proof (SP) mechanism when an agent's utility is additive. In this paper, we develop a class of SP mechanisms when an agent has an all-or-nothing utility. The SP mechanism with PE is the serial dictatorship mechanism, but finding the Pareto efficient allocation is NP-hard. Thus, we propose a SP mechanism that determines an allocation which is close to Pareto efficiency in polynomial time.

## 1. 序論

メカニズムデザインは複数のエージェントが行う集団意思決定のルールの設計を行うことである．研究はミクロ経済学とゲーム理論の一分野で行われており，各エージェントが自己の利益を追求すると社会的な利益が最大になるといった望ましい性質を満たすルールの提案が望まれている [Sakai 08]．また近年，メカニズムデザインに着目した研究が人工知能／マルチエージェントシステムの分野でも盛んである．

メカニズムデザインの適用範囲として，公平分割問題の 1 つであるケーキ分割問題におけるメカニズムデザインが挙げられる [Robertson 98]．ケーキ分割問題とは，区間によって各参加者の評価が異なり任意の点で分割が可能な財（オンラインで共有される計算資源の利用時間や土地など）をどのように分割して割り当てるかを考える問題である [Gamow 58]．その問題において，参加者のケーキに対する評価値の申告をもとにケーキを分割して，参加者にどの部分を割り当てるか決定するメカニズムをケーキ分割メカニズムと呼ぶ．

従来のケーキ分割問題は経済学や数学の分野で主に議論されており，財を参加者にどのように公平かつ効率的に分割するかに主眼がおかれていた．そのため参加者が虚偽の評価値を申告して，財の割り当てられる量を増やそうとする操作である戦略的操作は考慮されていなかった．近年，計算機科学のメカニズムデザインの分野では戦略的操作不可能性を満たすケーキ分割メカニズムの提案が盛んに行われている．

しかしながら，それらのメカニズムにはある種の問題がある．それは割り当てられた財の量の総和で参加者の効用が決定しており，参加者が任意の一定以上の割当を望む場合は考慮されていないことである．具体的な例を挙げると，非常に大きな計算プログラムを実行させせるために連続して 3 時間の計算資源を使いたいとする．このとき，1 日のうちに 3 回に分けて 1 時間ずつの計算資源の利用時間を得られたとしてもプログラムを実行することはできないため効用は得られない．以上のような現実的な選好を持つ場合に既存のメカニズムでは対応できない．よって，このような場合でも動作するメカニズムを考察し，提案する必要性がある．

そこで本論文ではケーキ分割問題において参加者が任意の一定区間以上の割当を望む場合を対象として議論を行う．初めに，本論文で議論する効用のもとで比例配分性を満たすメカニズムは存在しないことを示す．さらに，パレート効率性と非羨望性の両方を満たすメカニズムは存在しないことを示す．次に，2 つの不可能性より比例配分性と非羨望性を諦めて，パレート効率性を満たす戦略的操作不可能なメカニズムを提案するが，パレート効率的な割当決定問題は NP 困難であることを示す．そこで，多項式時間で割当を決定することを保証する戦略的操作不可能なケーキ分割メカニズムの提案を行う．最後に計算機実験により提案したメカニズムの割当に対する評価を行う．

連絡先: 伊原尚正，九州大学，福岡県福岡市西区元岡 744 番地，812-0395，(092)802-3576，ihara@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

## 2. 準備

本章ではケーキ分割モデルの紹介と，ケーキ分割問題におけるメカニズムが満たすべき性質の定義を行う．新しく提案する効用以外の定義は Chen et al. [Chen 13] のモデルを参考にする．

$n\ (\geq 2)$ 人の参加者の集合を $N = \{1, \ldots, n\}$ とする．参加者で分割する財を区間 $[0, 1]$ で表す．参加者には $[0, 1]$ の部分区間 $I$ の有限集合 $X$ が割り当てられる．閉区間 $I = [x, y]$ $(y \geq x)$ の長さを $\mathrm{len}(I) = y - x$ とし，$I$ が開区間及び半開区間の場合も同様とする．

割り当てられた区間を入力として，効用を出力する関数を効用関数とする．参加者が申告可能な財に対する効用関数の集合を $\mathcal{V}$ とする．参加者 $i \in N$ は効用関数 $V_i \in \mathcal{V}$ を持つ．参加者 $i$ の効用関数 $V_i$ はタプル $(s_i, e_i, z_i) \in [0, 1]^3$ を用いて表される．$s_i$ は参加者 $i$ が欲しがる区間の始点，$e_i$ は参加者 $i$ が欲しがる区間の終点（$e_i > s_i$），$z_i$ は参加者 $i$ が欲しがる区間の中で連続して欲しい長さ（$e_i - s_i \geq z_i$）を示す．また，$V_i([a, b])$ を，参加者 $i$ が区間 $[a, b]$ を得たときの効用とする．効用関数は $\forall i \in N, \forall V_i \in \mathcal{V}$ に対して次の 2 性質を満たす．

**非原子性** $\forall x \in [0, 1]$ に対して $V_i([x, x]) = 0$

**正規性** $V_i([0, 1]) = 1$

また，参加者集合 $N$ が持つ効用関数の組を $V = (V_j)_{j \in N} \in \mathcal{V}^n$ として，参加者集合 $N$ から参加者 $i$ を除いた集合が持つ効用関数の組を $V_{-i} = (V_j)_{j \in N \setminus \{i\}} \in \mathcal{V}^{n-1}$ とする．

また参加者 $i$ の評価区間を $r_i = [s_i, e_i]$ と定める．本論文で扱う効用関数を以下のように定義する．

**定義 1 (0-1 効用)** 参加者 $i$ が財 $X$ を受け取ったときの効用は次のようになる．

$$V_i(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists I \in X \text{ s.t. len}(I \cap r_i) \geq z_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

参加者 $i$ に対する割当を $A_i \subseteq [0,1]$ とし，$A = (A_i)_{i \in N}$ とする．$A$ が任意の $i, j (\neq i) \in N$ に対して $A_i \cap A_j = \emptyset$ を満たしていれば，$A$ は可能な割当であるという．可能な割当の集合を $\mathcal{A}$ とする．

メカニズム $f$ を $f : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{A}$ とする．効用関数の組 $V$ が与えられたときの参加者 $i$ への割当は $f_i(V)$ と表され，メカニズムは $f = (f_j)_{j \in N}$ と表すことができる．

次に，ケーキ分割メカニズムにおいて望ましい 4 つの性質（比例配分性・非羨望性・パレート効率性・戦略的操作不可能性）を定義する．

**定義 2 (比例配分性)** メカニズム $f$ が比例配分性を満たすとは，$\forall i \in N$，$\forall V \in \mathcal{V}^n$ に対して，$V_i(f_i(V)) \geq \frac{1}{n}$ を満たすことである．

比例配分性はメカニズムが財を $n$ 人に分割して割り当てるときに，任意の参加者の効用が $n$ 分の 1 以上となることを保証する性質である．

**定義 3 (非羨望性)** メカニズム $f$ が非羨望性を満たすとは，$\forall i, j (\neq i) \in N$，$\forall V_i \in \mathcal{V}$ に対して，$V_i(f_i(V)) \geq V_i(f_j(V))$ を満たすことである．

非羨望性を満たすメカニズムは，参加者が他の参加者と割当を交換したとしても元々の割当と比較して効用が増加しないことを保証する．

**定義 4 (パレート効率性)** メカニズム $f$ がパレート効率性を満たすとは，$\forall i \in N$，$\exists j \in N$，$\forall V \in \mathcal{V}^n$，$\forall A' \in \mathcal{A}$ に対して，$V_i(f_i(V)) \leq V_i(A'_i)$ と $V_j(f_j(V)) < V_j(A'_j)$ の両方を同時に満たさないことである．

メカニズムがパレート効率性を満たしているとき，ある参加者の効用を上げるために割当を変更させたとき，割当の変更によって他の参加者の効用が必ず減少してしまう．

**定義 5 (戦略的操作不可能性)** メカニズム $f$ が戦略的操作不可能であるとは，$\forall i \in N$, $\forall V_{-i} \in \mathcal{V}^{n-1}$, $\forall V_i \in \mathcal{V}$, $\forall V'_i \in \mathcal{V}$ に対して，$V_i(f_i(V_i, V_{-i})) \geq V_i(f_i(V'_i, V_{-i}))$ を満たすことである．

メカニズムが戦略的操作不可能性を満たしているとき，参加者は虚偽の効用関数をメカニズムに申告する誘因を持たない．

## 3.　不可能性定理

本章では戦略的操作不可能性の議論を行う前に，0-1 効用のもとで，ケーキ分割メカニズムにおける望ましい性質を達成することができるか議論する．

初めに 0-1 効用のもとでは，比例配分性を満たすメカニズムが存在しないことを示す．

**命題 1** 0-1 効用のもとでは，比例配分性を満たすメカニズムは存在しない．

**証明** 参加者集合 $N = \{i, j\}$ に対して，各参加者が次のような条件で効用を持つとする．

**参加者 $i$:** $s_i = 0, e_i = 1, z_i = 1$

**参加者 $j$:** $s_j = 0, e_j = 1, z_j = 1$

参加者 $i, j$ はいずれも区間 $[0,1]$ を割り当てられなければ効用は 0 である．複数の参加者に重複する区間を割り当てることはできないので，少なくとも参加者 1 人の効用は 0 になる．以上より 0-1 効用のもとで，比例配分性を満たすメカニズムは存在しない． □

次にパレート効率性と非羨望性を同時に満たすメカニズムが存在しないことを示す．

**命題 2** 0-1 効用のもとでは，パレート効率性かつ非羨望性を満たすメカニズムは存在しない．

**証明**

参加者集合 $N = \{i, j\}$ に対して，各参加者が次のような条件で効用を持つとする．

**参加者 $i$:** $s_i = 0, e_i = 1, z_i = 1$

**参加者 $j$:** $s_j = 0, e_j = 1, z_j = 1$

2 人の参加者に対する割当を場合分けして考える．

**Case 1:** $i$ に $[0,1]$ を割り当て，$j$ には何も割り当てない場合を考える．このとき参加者 $j$ の効用は 0 である．しかしながら，参加者 $i$ と割当を交換することで効用を 1 に増加させることができる．この場合は非羨望性を満たさない．また，$i$ と $j$ を入れ替えたとしても一般性は失われない．

**Case 2:** Case 1 以外の割当を行う場合を考える．参加者 $i, j$ の効用は共に 0 となる．このとき 1 人の参加者に [0,1] をすべて割り当てることで，もう 1 人の効用を減少させずに効用を増加させることができる．よって，パレート効率性を満たさない．

以上より 0-1 効用のもとで，パレート効率性と非羨望性を満たすメカニズムは存在しない． □

本論文ではなるべく多くの参加者に財の割り当てを行うことを目的として，戦略的操作不可能性を満たすメカニズムの中でも，パレート効率性を満たすメカニズムに着目して議論を行う．次章ではメカニズムを提案し，提案メカニズムが満たす性質の証明を行う．

## 4.　戦略的操作不可能かつパレート効率的なメカニズム

本章では戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たす Serial Dictatorship メカニズムを提案する．また，提案メカニズムの計算量に関しても言及する．

**定義 6 (Serial Dictatorship メカニズム)** Serial Dictatorship メカニズムは以下の動作に従う．

1. 参加者集合 $N$ に含まれる参加者を任意の方法で順番付けし，決定した順番の最初の参加者を「独裁者」とする．

2. 「独裁者」に選ばれた参加者と既に割当を受け取れることが確定している参加者全員の効用が 1 となるような割当が存在するか否かの判定が行われる．存在するならば「独裁者」が自身にとって効用が 1 となる割当を受け取れることが確定する（最初の「独裁者」は必ず効用が 1 となる割当を受け取れると判定される）．

3. 判定が終了すると，次の順番の参加者が「独裁者」になり，2 と同様の操作を全ての参加者に対して行う．

4. 全ての参加者に対して判定が行われた後，割当を受け取れることが確定した参加者全員の効用が 1 となるような割当をメカニズムが出力する．

Serial Dictatorship メカニズムは戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たすことを示す．

**定理 1** Serial Dictatorship メカニズムは戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たす．

**証明** Serial Dictatorship メカニズムは，自分の後に「独裁者」になった参加者の申告によって割当が受け取れるか，受け取れないかは変わらないことが保証されている．そのため，各参加者が「独裁者」に選択されたときの申告のみに着目して，2 つの性質の証明を行う．

(i) 初めにメカニズムが戦略的操作不可能性を満たすことを示す．参加者が選好を正直に申告した場合，自身の効用が 1 となるならば，虚偽の申告を行う誘因は存在しない．そうでない場合は，前までの参加者への割当が保証されているので，虚偽の申告をしても効用が 1 となるような割当は得られない．よって，虚偽の申告をする誘因は存在しない．以上より，任意の順番で「独裁者」になる参加者にとって虚偽申告を行う誘因が存在しないので，メカニズムは戦略的操作不可能性を満たす．

(ii) 次にメカニズムがパレート効率性を満たすことを示す．ある参加者が効用が 1 となる割当を得られなかったとき，その区間は先に「独裁者」に選ばれた他の参加者に割り当てられている．よって，どの参加者も他の参加者の効用を減少させること無しに自身の効用を増加させることができないので，メカニズムはパレート効率性を満たす．

(i) と (ii) より，Serial Dictatorship メカニズムは戦略的操作不可能性とパレート効率性を満たす． □

## 5. 計算量の考察

本章では，Serial Dictatorship メカニズムの計算量について考察を行う．前章で証明したように Serial Dictatorship メカニズムはパレート効率性を満たす．しかしながら 0-1 効用のもとでは，パレート効率性を満たす割当を発見することが NP 困難であることを示す．

**定理 2** パレート効率性を満たす割当を発見することが可能ならば，参加者全員の効用が 1 となる割当があるか判定可能である．

**証明** パレート効率性を満たす割当が与えられたとき，参加者全員の効用が 1 となっていたならば，参加者全員の効用が 1 となる割当が存在する．効用が 1 でない参加者が存在したならば，パレート効率性の定義より他の参加者の効用を下げることなくその参加者の効用を上げることができないので，参加者全員の効用が 1 となる割当は存在しない． □

そこで，参加者全員の効用が 1 となる割当があるか判定する問題の計算量について考える．

**定理 3** 参加者全員の効用が 1 となる割当があるか判定する問題は NP 完全である．

定理 3 の詳しい証明は紙幅の都合上割愛するが，NP 完全問題であるスケジューリング問題から帰着させることで行う．スケジューリング問題が NP 完全であることは，論文 [Garey 77] にて示されている．

定理 3 より，以下の系が導出される．

**系 1** Serial Dictatorship メカニズムが割当を発見する問題は NP 困難である．

本章で提案した Serial Dictatorship メカニズムはパレート効率性を満たしているため，系 1 より多項式時間で動作しない．そこで次章ではパレート効率性を緩和して，多項式時間で動作する戦略的操作不可能なメカニズムを提案する．

## 6. 多項式時間で動作する戦略的操作不可能なメカニズム

本章では多項式時間で動作する戦略的操作不可能な，Serial Dictatorship based Flexible Allocation（SDFA）メカニズムを提案する．また，$Y$ を既に割り当てることが確定した参加者の順序とし，$|Y|$ を $Y$ の人数とする．アルゴリズムの動作は Serial Dictatorship メカニズムに似ているが，割当の順序 $Y$ を固定しているため計算量を抑えている．

**定義 7 (SDFA メカニズム)** SDFA メカニズムは以下の動作に従う．

- 1 番目の参加者を $Y$ の 1 番目に加え，2 人目の参加者に移る．
- 2 人目以降の参加者 $m$ について，$1 \leq x \leq |Y|+1$ に対し，$Y$ の $x$ 番目に $m$ を挿入した順序 $Y_x$ を考える．
- $Y_x$ の中に $Y_x$ に含まれる参加者全員の 1 となるような割当が可能な $Y_x$ があるならば，$Y = Y_x$ として次の参加者に移る．
- そのような $Y_x$ が存在しなければ，$Y$ は更新せず，次の参加者に移る．
- 最後の参加者まで判定が終わったら，ケーキを順序 $Y$ で割り当てた割当を出力する．

**定理 4** SDFA メカニズムは戦略的操作不可能性を満たす．

定理 4 の証明は，定理 1 と同様の方針で証明できるため割愛する．

SDFA メカニズムの計算量について考察を行う．このメカニズムでは 1 人目の参加者から $n$ 人目の参加者まで判定を行う．1 人の参加者に対して判定する $Z_x$ は最大 $n$ 通りである．また，ある $Z_x$ に対して全員の利得が 1 になる割当が存在する

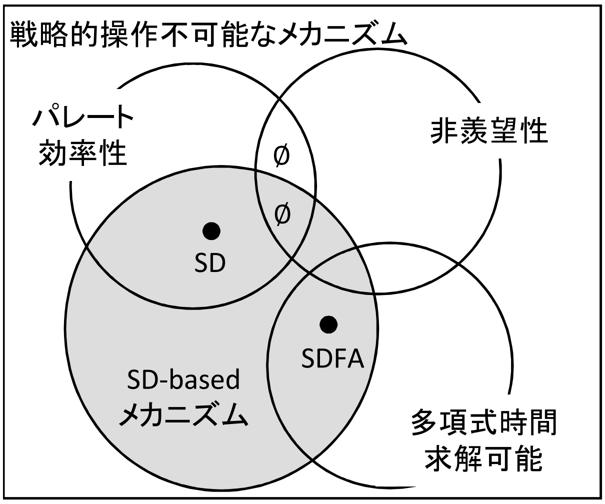


図 1: 提案メカニズムの関係

かの判定にかかる時間は $O(n)$ である． よって，SDFA メカニズム全体の計算量は $O(n^3)$ である．

図 1 に本研究で提案する SD-based メカニズムの性質に関する関係を示す．ここで，SD-based メカニズムは [Abdulkadirouglu 98] の Serial Dictatorship を参考にしたもので，参加者に厳密な順序を付け，「各参加者は許可された割当（最初は全ての可能な割当）の中で，自身の効用が最大となる割当だけを許可し，次の参加者に移る」という操作を繰り返し，割当を決定するメカニズムの集合である．SD（Serial Dictatorship）メカニズムはパレート効率性を満たすが，多項式時間で求解できない．一方，SDFA メカニズムはパレート効率性を緩和しているが，多項式時間で求解できる．

本章では SDFA メカニズムを提案したが，Serial Dictatorship メカニズムと比較してどれくらいの割当が保証されているのか議論できていない．そこで，次章では計算機実験を行い，Serial Dictatorship メカニズムと SDFA メカニズムの割当を比較し，性能評価を行う．

## 7. 計算機実験

本章では計算機実験で，提案メカニズムを効用が 1 となる割当を得ることができた参加者の人数（割り当て可能人数）の観点で比較して，メカニズムの性能評価を行う．本実験では参加者人数 $n$ を $n = 5, 10, \ldots, 30$ とした．また，参加者 $i$ が欲しがる区間の始点 $s_i$ は $[0, 0.99]$，終点 $e_i$ は $[0.01, 1]$，参加者 $i$ が連続して欲しい長さ $z_i$ は $[0.01, 1]$ でそれぞれ一様ランダムに生成した．ただし，$e_i \leq s_i$ の場合，$z_i > e_i - s_i$ の場合は再生成した．また，$s_i, e_i, z_i$ として生成されうる数値は $0, 0.01, 0.02, \ldots$ と 0.01 間隔である．各問題設定に対し 100 インスタンスを生成して，平均をとった．

参加者人数（横軸）と，割り当て可能人数（縦軸）の関係を図 2 に示す．ここで，Optimal は割り当て可能人数の理論的な最大値の平均である．SDFA メカニズムに対する Serial Dictatorship メカニズムでの割り当て可能人数の割合は参加者が $n = 20$ の場合に最小となるが，常に 97% 以上を保証する．また，参加者人数 $n$ を増加させていくと Serial Dictatorship メカニズム，SDFA メカニズムともに割り当て可能人数は収束しているので，$n$ を増やしても割合が大きく下がることはないと考えられる．

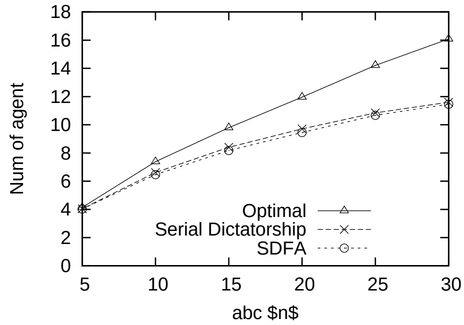


図 2: 参加者人数を変化させたときの割り当て可能人数の変化

## 8. 結論

本論文ではケーキ分割問題において参加者が任意の一定区間以上の割当を望む場合を対象として議論を行った．初めに，0-1 効用下での不可能性定理を示した．次に，パレート効率性を満たす戦略的操作不可能なメカニズムを提案し，パレート効率的な割当決定問題は NP 困難であることを示した．さらに，多項式時間で割当を決定する戦略的操作不可能なケーキ分割メカニズムの提案を行った．最後に計算機実験により提案したメカニズムの割当に対する評価を行った．

今後の方針としては，まず現在仮定している効用より複雑な効用におけるメカニズムの提案が挙げられる．具体的には計算資源の利用時間を得るときに，5 時間のうち少なくとも 3 時間の時間があれば嬉しいが，より長い時間があるとさらに嬉しい場合などの選好に対しても考察する必要がある．

## 謝辞

本研究は JSPS 基盤研究 (S) (課題番号 24220003) の助成を受けました．ここに深く感謝いたします．

## 参考文献

[Sakai 08] 坂井 豊貴, 藤中 裕二, 若山 琢磨．メカニズムデザイン―資源配分制度の設計とインセンティブ．ミネルヴァ書房, 2008.

[Robertson 98] Jack Robertson and William Webb. Cake-cutting algorithms: Be fair if you can. 1998.

[Gamow 58] George Gamow and Marvin Stern. *Puzzle-math*. Macmillan, 1958.

[Chen 13] Yiling Chen, John K Lai, David C Parkes, and Ariel D Procaccia. Truth, justice, and cake cutting. *Games and Economic Behavior*, Vol. 77, No. 1, pp. 284–297, 2013.

[Garey 77] Michael R Garey and David S. Johnson. Two-processor scheduling with start-times and deadlines. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 6, No. 3, pp. 416–426, 1977.

[Abdulkadirouglu 98] Abdulkadiroğlu, Atila and Sönmez, and Tayfun. Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems. *Econometrica*, pp. 689–701, 1998.