

## Max-SAT に対する非厳密解法を用いたラグランジュ分解・調整法

## Lagrangian Decomposition and Adjustment Method with Incomplete Solver for Max-SAT

花田 研太 <sup>\*1\*2</sup>

Kenta Hanada

平山 勝敏 <sup>\*1</sup>

Katsutoshi Hirayama

沖本 天太 <sup>\*1</sup>

Tenda Okimoto

<sup>\*1</sup>神戸大学大学院海事科学研究科

Graduate School of Maritime Sciences, Kobe University

<sup>\*2</sup>日本学術振興会特別研究員 (DC2)

JSPS Research Fellow (DC2)

Multi-MaxSAT is the weighted Max-SAT solver that is based on Lagrangian decomposition. It exploits an existing exact solver to solve subproblems within it. In this paper, we develop new algorithm by using an incomplete solver in order to solve the subproblems. In addition, we propose new heuristic algorithm to get the quasi-optimal value based on semi-Lagrangian relaxation method.

## 1. はじめに

充足可能性判定問題 (SAT 問題) は, 命題論理式が真となるような真偽値の割当てが存在するかどうか判定する問題である. 真か偽で表された論理変数をリテラルと呼び, リテラルの選言を節と呼ぶ. SAT 問題は標準連言形式で与えられ, 節の連言で表現される. 最大充足化問題 (Max-SAT 問題) は SAT 問題を最適化問題へ拡張した問題である. Max-SAT 問題の目的は, 偽となる節の総和を最小化することである. Max-SAT 問題には様々な派生があり, 偽となる節に重み付けをしてその総和を最小化する問題は重み付き Max-SAT 問題, 必ず満たさなければならない節 (ハード節) が存在する場合は部分 Max-SAT 問題, その両者が存在する場合は重み付き部分 Max-SAT 問題と呼ばれる.

Multi-MaxSAT は, 重み付き Max-SAT 問題に対するヒューリスティック解法である [黒田 09, 花田 13]. Multi-MaxSAT では, ラグランジュ分解というテクニックを用いて問題を分解し, 元の問題よりもサイズが小さい重み付き Max-SAT 問題を繰り返し解くことによって原問題の最適値を探索する. Multi-MaxSAT の特徴は, 0-1 整数計画問題からのアプローチであること, また, 原問題に対する下界値を与えることである.

既存の Multi-MaxSAT では, 部分問題の求解に厳密解法を用いていた. これは, 全ての部分問題の最適値の総和が原問題の下界値になるためである. しかし, 厳密解法を用いることは計算コストが非常に高く, Multi-MaxSAT の実行時間が非常に長くなるという問題点が存在した.

本研究では, Multi-MaxSAT をその他の厳密解法の前処理として利用するため, Multi-MaxSAT の高速化を目指す. 例えば, QMaxSAT[越村 11, Koshimura 12] や Open-WBO[Martins 14] といった線形/二分探索を行う SAT 型の厳密解法においては, どの値から探索を開始するかによって性能が左右されるが, 開始する値について下界値や上界値である保証は必要ない. 従って, Multi-MaxSAT によって最適値に近い値を導出し, その値から探索を開始すれば性能が向上することが期待される.

Multi-MaxSAT を高速化する手法として, 本研究では部分問題の求解に非厳密解法を用いることを検討する. また, 半ラ

グランジュ緩和法を導入することによって, 最適値に近い値を導出する新しい方法を提案する.

## 2. Multi-MaxSAT

Multi-MaxSAT は, 重み付き Max-SAT 問題に対するヒューリスティック解法である. 既存の Multi-MaxSAT は, 実行可能解を生成するアルゴリズムが部分 Max-SAT 問題および重み付き部分 Max-SAT 問題に対応していない. しかし, 本研究では実行可能解について考慮しないため, 重み付き部分 Max-SAT 問題を扱うことができる.

## 2.1 0-1 整数計画問題による一般的な定式化

重み付き部分 Max-SAT 問題を 0-1 整数計画問題として定式化すると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{j \in C_s} w_j (1 - y_j) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i) \geq y_j, \forall j \in C_s, \quad (1) \\ & \sum_{i \in L_j^+} x_i + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i) \geq 1, \forall j \in C_h, \quad (2) \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V, \\ & y_j \in \{0, 1\}, \forall j \in C. \end{aligned}$$

ここで,  $V = \{1, \dots, m\}$  は論理変数集合,  $C_s = \{1, \dots, n\}$  はソフト節集合,  $C_h = \{1, \dots, o\}$  はハード節集合,  $L_j^+ \subseteq V$  は節  $j \in C (= C_s \cup C_h)$  に含まれる論理変数のうち真のリテラルの集合,  $L_j^- \subseteq V$  は節  $j$  に含まれる論理変数のうち偽のリテラルの集合,  $w_j \in \mathbb{N}$  は節  $j$  が偽である場合にかかる重みである. また,  $x_i$  は論理変数  $i \in V$  が真のとき 1, そうでない場合は 0 に設定される決定変数,  $y_j$  は節  $j$  が真の場合に 1, そうでない場合は 0 に設定される決定変数である. 式 (1) はソフト節, 式 (2) はハード節を表す制約式である. この問題の最適値を  $Opt$  とする. なお, この問題は NP 困難であることが知られている. 以降, 紙面の都合上 0-1 制約を省略する.

## 2.2 Lagrange 分解法を用いた定式化

ラグランジュ分解では, 原問題を複数の部分問題に分割する. まず, 節集合を  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ) 分割する場合,  $A = \{1, \dots, k\}$  として重み付き部分 Max-SAT 問題を以下のように再定式化

連絡先: 花田研太, 神戸大学大学院海事科学研究科, 〒658-0022  
神戸市東灘区深江南町 5-1-1, kenta.hanada@stu.kobe-u.ac.jp

する.

$$\begin{aligned}
 \min. \quad & \sum_{j \in C_s} w_j (1 - y_j) \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i^a + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^a) \geq y_j, \forall j \in C_s^a, \forall a \in A, \\
 & \sum_{i \in L_j^+} x_i^a + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^a) \geq 1, \forall j \in C_h^a, \forall a \in A, \\
 & x_i^a = x_i^b, a < b, \forall a, b \in A, \forall i \in V_a \cap V_b. \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここで,  $x_i^a, x_i^b$  は部分問題  $a, b \in A$  が保持する論理変数  $i$  の決定変数,  $C_s^a$  は部分問題  $a$  が保持する部分 (問題) ソフト節集合,  $C_h^a$  は部分問題  $a$  が保持する部分 (問題) ハード節集合,  $V_a, V_b \subseteq V$  は, 添え字の部分問題に含まれる論理変数の集合である.  $\emptyset \neq C_s^a \cup C_h^a = C^a \subset C$  とし, 原問題のソフト節およびハード節はそれぞれいずれか 1 つの  $C^a$  に必ず属しているものとする. すなわち,  $C^a$  は互いに素な集合である. ただし,  $C_s^a = \emptyset$  または  $C_h^a = \emptyset$  は許容される. 式 (3) は, 部分問題間の変数の値を一致させる制約で, 一致制約と呼ばれる. ここで, 少なくとも 1 つ以上の一致制約が存在する論理変数を共有変数と呼ぶ. 2.1 節の定式化との違いは, 部分節集合毎に固有の決定変数を使用し, 部分節集合間に一致制約が存在することである.

部分節集合は互いに素なので, 一致制約を取り除けば部分問題毎に原問題を分解できる. そこで, 一致制約 (3) をラグランジュ緩和すると,

$$\begin{aligned}
 \min. \quad & \sum_{j \in C_s} w_j (1 - y_j) - \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \sum_{i \in V_a \cap V_b} \mu_i^{(a,b)} (x_i^a - x_i^b) \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i^a + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^a) \geq y_j, \forall j \in C_s^a, \forall a \in A, \\
 & \sum_{i \in L_j^+} x_i^a + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^a) \geq 1, \forall j \in C_h^a, \forall a \in A,
 \end{aligned}$$

となる. ここで,  $\mu_i^{(a,b)} \in \mathbb{R}$  は共有変数  $i$  における部分問題  $a, b$  間の一致制約に対するラグランジュ乗数である. また, ベクトルの要素として  $\mu_i^{(a,b)}$  がある順序で並んでいるラグランジュ乗数ベクトルを  $\mu$  と定義し,  $\mu$  のサイズを  $d$  とおく.

この問題の最適値  $L(\mu)$  は, 任意の  $\mu$  の下で原問題に対する下界を与える. 部分節集合毎に分解すると, 部分問題  $a$  は,

$$\begin{aligned}
 \min. \quad & \sum_{j \in C_s^a} w_j (1 - y_j) \\
 & - \sum_{i \in V_a} \left( \sum_{c \in A, \exists a \in V_c} \mu_i^{(c,a)} - \sum_{b \in A, \exists i \in V_b} \mu_i^{(a,b)} \right) x_i^a \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i^a + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^a) \geq y_j, \forall j \in C_s^a, \\
 & \sum_{i \in L_j^+} x_i^a + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^a) \geq 1, \forall j \in C_h^a,
 \end{aligned}$$

となる. この問題の最適値を  $L_a(\mu)$  とする.

良い下界値は原問題を解く上で重要な情報を与える. 最も良い下界値を得る問題をラグランジュ双対問題と呼び,

$$L(\mu^*) = \max_{\mu} L(\mu) = \max_{\mu} \sum_{a \in A} L_a(\mu),$$

という  $d$  次元実ベクトル空間上の無制約最大化問題となる.

ラグランジュ分解の特徴は, 元の問題の制約式が分解後の問題にもそのまま現れることである. 重み付き部分 Max-SAT 問題の場合, 分解した後の部分問題は, やはり重み付き部分 Max-SAT 問題となる. 従って, 部分問題は既存の重み付き部分 Max-SAT ソルバーを使って解くことができる. また, 部分問題は原問題に比べて問題のサイズが小さくなっているため, 原問題より高速に解けることが期待できる.

Multi-MaxSAT では, ラグランジュ双対問題を解くアルゴリズムとして, 劣勾配法, 切除平面法またはバンドル法を用いている. この 3 種類のアルゴリズムは, 全て劣勾配 (ベクトル) を利用している. 劣勾配ベクトルは, あるベクトル  $\mu_t$  において,

$$L(\mu) \leq L(\mu_t) - g^T(\mu - \mu_t), \forall \mu \in \mathbb{R}^d,$$

を満たすような  $g \in \mathbb{R}^d$  のことを指す. ラグランジュ緩和問題における劣勾配ベクトルの要素は, 緩和した制約式から計算できることが知られている. すなわち, Multi-MaxSAT における劣勾配ベクトルのある要素  $g_i^{(s,t)}$  は, あるベクトル  $\mu_t$  における部分問題  $a$  の変数  $i$  の最適解を  $\hat{x}_i^a$  とすると,

$$g_i^{(a,b)} = \hat{x}_i^a - \hat{x}_i^b,$$

となる.

劣勾配法は山登り法であるためラグランジュ双対問題の最適値を保証することはできないが, 切除平面法およびバンドル法はラグランジュ双対問題の最適値を与えることができる.

なお, 節集合分割の方法については [花田 13] の方法に従うものとする.

### 3. 非厳密解法を用いた Multi-MaxSAT

既存の Multi-MaxSAT では, 部分問題の求解に厳密解法を用いていた. これは, 全ての部分問題の最適値の総和が原問題の下界値になるためである. しかし, 厳密解法を用いることは計算コストが非常に高く, Multi-MaxSAT の実行時間が非常に長くなるという問題点が存在した.

そこで本研究では, 部分問題の求解に非厳密解法を用いることを検討する. また, 半ラグランジュ緩和法を導入することによって, 最適値に近い値を導出する新しい方法を提案する.

#### 3.1 $\epsilon$ 劣勾配

部分問題の求解に非厳密解法を用いた場合, あるベクトル  $\mu_t$  における部分問題  $a$  の変数  $i$  の実行可能解を  $\bar{x}_i^a$  とすると,

$$g_{\epsilon,i}^{(a,b)} = \bar{x}_i^a - \bar{x}_i^b,$$

は  $\epsilon$  劣勾配になることが知られている [Bertsekas 95]. すなわち, あるベクトル  $\mu_t$  において,

$$L(\mu) \leq L(\mu_t) - g_{\epsilon}(\mu_t)^T(\mu - \mu_t) + \epsilon \quad (4)$$

$$= L^{apx}(\mu_t) - g_{\epsilon}(\mu_t)^T(\mu - \mu_t) \quad (5)$$

を満たすような  $\epsilon$  劣勾配ベクトル  $g_{\epsilon} \in \mathbb{R}^d$  が存在する. ここで,  $L^{apx}(\mu_t)$  は非厳密解法によって得られた実行可能解を元に計算された目的関数値である. 従って, 部分問題の求解に非厳密解法を用いても, ラグランジュ双対問題に対する切除平面を構成できるため, 既存のアルゴリズムが利用可能である.

部分問題の求解に非厳密解法を用いることの欠点は, 原問題に対する下界値の保証を失うことである.  $L^{apx}(\mu)$  は原問題

題に対する下界値である保証はなく、ある  $\mu_t$  における下界値に対する上界値となる。すなわち、 $L(\mu) \leq L^{apx}(\mu)$ ,  $\forall \mu$  は保証されているが、 $L^{apx}(\mu) \leq Opt$  である保証は無い。以降、 $L^{apx}(\mu)$  を推定下界値と呼ぶ。

### 3.2 半ラグランジュ緩和法

半ラグランジュ緩和法とは、等式制約を緩和するラグランジュ緩和問題に適用できる、ラグランジュ緩和法の一つである [Beltran 06]。Multi-MaxSAT は等式制約を緩和するので、半ラグランジュ緩和法が利用できる。原問題を半ラグランジュ緩和した問題は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{j \in C_s} w_j (1 - y_j) - \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} \sum_{i \in V_a \cap V_b} \mu_i^{(a,b)} (x_i^a - x_i^b) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i \in L_j^+} x_i^a + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^a) \geq y_j, \forall j \in C_s, \forall a \in A, \\ & \sum_{i \in L_j^+} x_i^a + \sum_{i \in L_j^-} (1 - x_i^a) \geq 1, \forall j \in C_h, \forall a \in A, \\ & x_i^a \leq x_i^b, a < b, \forall a, b \in A, \forall i \in V_a \cap V_b. \end{aligned}$$

この問題の最適値を  $L_{semi}(\mu)$  とする。半ラグランジュ緩和問題は、ラグランジュ緩和問題に対して緩和した制約の不等式を追加している。また、ラグランジュ緩和問題と同様、半ラグランジュ緩和問題においても最も良い下界値を得る半ラグランジュ双対問題を考えることができ、

$$L_{semi}(\mu^{**}) = \max_{\mu} L_{semi}(\mu),$$

と表すことができる。ここで、 $\mu^{**}$  は半ラグランジュ双対問題の最適解である。

半ラグランジュ緩和問題とその双対問題において、次の2つの定理が成り立つ [Beltran 06]。

**定理 1** 全ての  $\mu$  において、次の不等式が成り立つ。

$$L(\mu) \leq L_{semi}(\mu) \leq Opt.$$

**定理 2** 半ラグランジュ双対問題の最適解において、次の等式が成り立つ。

$$L_{semi}(\mu^{**}) = Opt.$$

従って、半ラグランジュ双対問題を解けば、原問題の最適値を得ることができる。

半ラグランジュ緩和問題の最適解を求めることは、ラグランジュ緩和問題の最適解を求めるのと同様に非常に計算コストが高い。しかし、半ラグランジュ緩和問題の実行可能解は、ラグランジュ緩和問題の実行可能解から作成可能である。

本研究では、ある  $\mu_t$  において、部分問題  $a$  の変数  $i$  に対する新たな割当て  $\hat{x}_i^a$  を次のようなヒューリスティックを用いて決定する。

- もし  $\hat{x}_i^a \leq x_i^b$  なら、 $\hat{x}_i^a = x_i^a, \hat{x}_i^b = x_i^b$  とする。
- もし  $\hat{x}_i^a > x_i^b$  なら、 $\hat{x}_i^a = x_i^a, \hat{x}_i^b = 1 - x_i^b$  とする。

このヒューリスティックを元に、半ラグランジュ緩和問題の目的関数値  $L_{semi}^{apx}(\mu_t)$  を求める。ただし、新たな割当てがハード節を満たさない場合は、実行可能解ではないため割当てを破棄する。

### 3.3 アルゴリズム

非厳密解法および半ラグランジュ緩和法を用いた Multi-MaxSAT のアルゴリズムは、既存の Multi-MaxSAT で使用されているバンドル法のアルゴリズムに基づく。バンドル法では  $\mu$  を更新するために次のような2次計画問題を解く。

$$(BM')$$

$$\begin{aligned} \max. \quad & r - \frac{1}{2h} \|\mu - \mu_{cp}\|_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & r \leq L^{apx}(\mu_t) - g(\mu_t)^\top (\mu - \mu_t), \forall t \in \{0, \dots, T\}. \end{aligned}$$

ここで、 $\mu_{cp} \in \mathbb{R}^d$  は中心点 (Center Point)、 $h \in \mathbb{R}^+$  は制御パラメータ、 $T$  はアルゴリズムの繰り返し数 (ラウンド数) である。(BM') の最適値を  $r^*$  とおく。既存の Multi-MaxSAT との違いは、制約式の切除平面において  $\epsilon$  劣勾配を用いることである。

新しい Multi-MaxSAT のアルゴリズムは、次の通りである。

**Step 1:**  $\mu_0 (= \mu_{cp}), h$  を初期化して、 $L^{apx}(\mu_0), g_\epsilon(\mu_0)$  を求める。また、ヒューリスティックを用いて  $L_{semi}^{apx}(\mu_0)$  を求める。 $BestEstLB = L^{apx}(\mu_0), BestSemiLB = L_{semi}^{apx}(\mu_0), t = 1$  とする。

**Step 2:** (BM') を解いて  $r^*, \mu_t$  を求める。

**Step 3:**  $\mu_t$  の下で  $L^{apx}(\mu_t), g_\epsilon(\mu_t)$  を求める。もし  $BestEstLB < L^{apx}(\mu_t)$  なら、 $BestEstLB = L^{apx}(\mu_t)$  とする。

**Step 4:** ヒューリスティックを用いて  $L_{semi}^{apx}(\mu_t)$  を求める。もし  $BestEstLB < L_{semi}^{apx}(\mu_t)$  なら、 $BestSemiLB = L_{semi}^{apx}(\mu_t)$  とする。

**Step 5:**  $\delta_k = L(\mu_{cp}) - r_k^*$  を求める。もし  $\delta_k \leq \delta$  なら、アルゴリズムを終了する。

**Step 6:** もし  $L(\mu_{cp}) - L(\mu_t) \geq \kappa \delta_k$  なら、 $\mu_{cp} = \mu_t$  とする。

**Step 7:**  $t = t + 1$  として、Step 2 へ戻る。

ここで、 $\delta \geq 0$  は終了条件に対する許容誤差である。

## 4. 実験

Multi-MaxSAT の性能を評価するため実験を行った。比較対象は既存の Multi-MaxSAT で求められた下界値および MaxSAT Resolution [Li 09] で求められた下界値で行う。全ての実験において、最適値/ (推定) 下界値で定義される (推定) 下界値の質で評価する。定義から明らかなように、(推定) 下界値の質は 1.0 に近ければ近いほど良い。なお、推定下界値は下界値である保証がないため、質が 1.0 を超える場合がある。

Multi-MaxSAT ソルバーは Java で実装した。部分問題を解く非厳密解法には UBCSAT [Tompkins 04] で実装された IRoTS [Smyth 03] を使用した。IRoTS のパラメータとして、カットオフラウンドを 10000、アルゴリズムの試行回数は 1 回とした。また、線形計画問題及び 2 次計画問題を解くソルバーとして CPLEX12.6 を使用した。実験環境は CPU: Intel Core i7-2600K@3.4GHz, Memory: 12GB, OS: Windows 7 Professional, Compiler: Java 1.8.0\_25 である。分割数は全ての実験において  $k \in \{2, 3, 4, 5, 10\}$  として実験を行った。既存の Multi-MaxSAT は 1800 秒、提案手法は 30 秒でタイムアウトとし、制限時間内に得られた最良の (推定) 下界値を評価に用いた。実験の環境を統一するため、各問題例における節集合分割の構造 (部分問題) は同一とした。

各手法において 1 回の試行を行い、(推定) 下界値の質の平均を比較する。問題例は Max-SAT Evaluation 2012 で使用さ

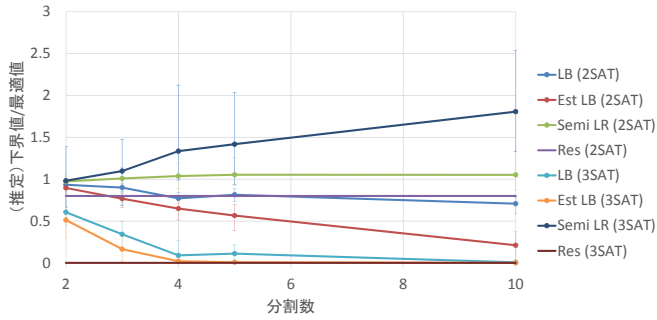


図 1: 重み付き Max-SAT の結果

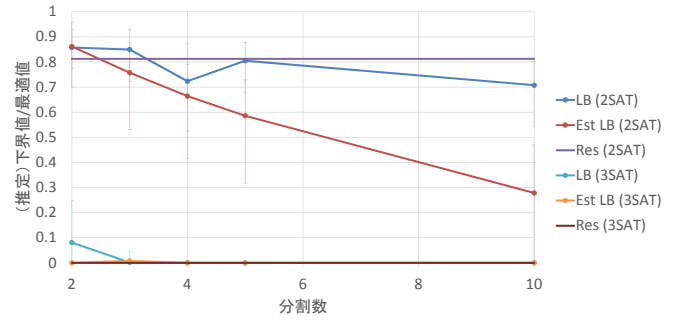


図 2: 重み付き部分 Max-SAT の結果

れた重み付き Max-SAT 問題 Random 部門の問題例全 141 問および重み付き部分 Max-SAT 問題 Random 部門の問題例全 120 問を使用した。なお、問題例の内訳は重み付き Max-2SAT 問題が 121 問、重み付き Max-3SAT 問題が 40 問、重み付き部分 Max-2SAT 問題が 90 問、重み付き部分 Max-3SAT 問題が 30 問である。

図 1 に重み付き Max-SAT 問題、図 2 に重み付き部分 Max-SAT 問題の実験結果をそれぞれ示す。LB は既存の Multi-MaxSAT から得られた下界値  $L(\mu)$ 、Est LB は提案手法から得られる推定下界値  $L^{apx}(\mu)$ 、Semi LR は提案手法から得られる半ラグランジュ緩和問題の目的関数値  $L_{semi}^{apx}(\mu_t)$ 、Res は Max-SAT Resolution のそれぞれ平均値を表す。縦軸は(推定)下界値の質、横軸は問題の分割数である。なお、図 2 においては、全ての問題例において半ラグランジュ緩和問題の実行可能解を生成できなかったため、Semi LR の結果は表示していない。また、Max-SAT Resolution は分割数に影響されないことに注意されたい。

図より、全ての問題例において問題を 2 分割した場合が最も良い結果を得られていることがわかる。また、全ての問題例および全ての分割数において、推定下界値  $L^{apx}(\mu)$  は下界値  $L(\mu)$  を下回る傾向を示している。これは、アルゴリズムの終了条件が既存の手法と同じであり、 $\epsilon$  劣勾配を用いた切除平面に対しては適切に働いていないためであると考えられる。

半ラグランジュ緩和問題の目的関数値は、重み付き Max-2SAT 問題においては分割数に影響されず、重み付き Max-3SAT 問題においては分割数に比例して目的関数値が増加する傾向にあることがわかる。また先述の通り、重み付き部分 Max-SAT 問題においては、全ての問題例において半ラグランジュ緩和問題の実行可能解を生成できなかった。これは、ヒューリスティックによって変数の割当てを変更した結果、いずれかの部分問題においてハード節を満たせなかったためであると考えられる。従って、重み付き部分 Max-SAT 問題を扱う場合は、ハード節をいずれか 1 つの問題例に集中させるなど、部分問題の分解に工夫が必要であることがわかった。

## 5. まとめと今後の課題

Multi-MaxSAT において、部分問題の求解に非厳密解法を用いる手法を検討した。また、半ラグランジュ緩和法を用いた新たなヒューリスティックを提案し、その効果を実験的に評価した。その結果、重み付き Max-SAT 問題に対しては最適値に近い値を導出することができることがわかった。

今後の課題は、バンドル法における終了条件の改良、半ラグランジュ緩和問題のヒューリスティックの改良、重み付き部分 Max-SAT 問題を上手に扱うような節集合分割の方法について

検討すること、他のクラスの問題例で追加の実験を行うことが挙げられる。また、Multi-MaxSAT を厳密解法の前処理として組み込んで実験と評価を行いたい。

## 参考文献

- [Beltran 06] Beltran, C., Tadonki, C., and Vial, J.: Solving the p-Median Problem with a Semi-Lagrangian Relaxation, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 35, No. 2, pp. 239–260 (2006)
- [Bertsekas 95] Bertsekas, D.: *Nonlinear Programming*, Athena Scientific (1995)
- [Koshimura 12] Koshimura, M., Zhang, T., Fujita, H., and Hasegawa, R.: QMaxSAT: A Partial Max-SAT Solver, *JSAT*, Vol. 8, No. 1/2, pp. 95–100 (2012)
- [黒田 09] 黒田 陽之, 平山 勝敏: Multi-MaxSAT: ラグランジュ分解・調整法を用いた Weighted Max-SAT 問題の解法, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. 92, No. 1, pp. 51–60 (2009)
- [Li 09] Li, C., Manyá, F., Mohamedou, N., and Planes, J.: Exploiting Cycle Structures in Max-SAT, in *SAT-2009*, pp. 467–480 (2009)
- [Martins 14] Martins, R., Manquinho, V. M., and Lynce, I.: Open-WBO: A Modular MaxSAT Solver, in *SAT-2014*, pp. 438–445 (2014)
- [Smyth 03] Smyth, K., Hoos, H. H., and Stützle, T.: Iterated Robust Tabu Search for MAX-SAT, in *CAIAC-2003*, pp. 129–144 (2003)
- [Tompkins 04] Tompkins, D. A. D. and Hoos, H. H.: UBC-SAT: An Implementation and Experimentation Environment for SLS Algorithms for SAT and MAX-SAT, in *SAT-2004 (Selected Papers)*, pp. 306–320 (2004)
- [花田 13] 花田 研太, 平山 勝敏: Multi-MaxSAT におけるバンドル法の効果, in *JSAT-2013* (2013)
- [越村 11] 越村 三幸, 安 宣, 藤田 博, 長谷川 隆三: QMaxSAT: Q-dai MaxSAT ソルバー, in *JSAT-2011* (2011)