2C5-OS-21b-3

旋律の逆行とタイムスパン木に対する flip 操作

Retrograde of Melody and Flip Operator for Time-Span Tree

平田 圭二[*1]　東条 敏[*2]
Keiji Hirata　Satoshi Tojo

[*1]公立はこだて未来大学
Future University Hakodate

[*2]北陸先端科学技術大学院大学
Japan Advanced Institute of Science and Technology

In this technical memo, we describe an attempt to enhance the expressibility of our algebraic framework for manipulating a piece by introducing a complement. First, we claim that an operator making a melodic retrograde corresponds to the flip operator of a time-span tree. Here, the operation of flip means that one draws a center line at the half time of the whole time-span and inverts the time-span tree symmetrically around the center line. Then, we describe how to approximate a relative pseudo-complement using a flipped time-span tree.

1. はじめに

我々はこれまで楽曲を操作する代数的枠組について検討してきた [3, 7]．まず，代数系を構成するドメインとして Generative Theory of Tonal Music (GTTM) [5] が導入したタイムスパン木を採用した．タイムスパン木とは楽曲に含まれる各音の構造的な重要度を表現する 2 分木である [4]．GTTM は，タイムスパン木に関してより重要度の低い音区間を削除する簡約操作を定義し，楽曲の基本構造を抽出するために用いている [1]．簡約は，知識表現における基本的な関係の 1 つである is_a 関係に対応している．そこで我々は，簡約されたタイムスパン木と元のタイムスパン木が半順序関係となるようタイムスパン木と簡約操作を形式化した．すると，タイムスパン木の集合は束を作るので，タイムスパン木に対して *join* と *meet* の 2 つの演算が適用可となる．これはつまり，楽曲に対して和集合や積集合のような演算が適用可となることを意味する．しかし応用を考えると，*join* と *meet* の 2 つの演算だけでは記述力不足である．

本稿では，補元を導入して楽曲を操作する代数的枠組の記述力を向上させる試みについて述べる．まず，旋律を変形する逆行の操作とタイムスパン木の flip 操作（音列全体の長さの 1/2 の時刻に中心線を引き，それを軸に左右入れ替える操作）が対応していることを指摘する．タイムスパン木の flip 操作を用いると，相対擬補元の近似が実現できることを述べる．

2. 旋律の逆行

旋律の逆行 (Retrograde) とは楽譜上の連続した音を逆から演奏することであり，元曲の音価 (リズム) を保存する場合 (図 1(2)) と保存しない場合がある．例えば IOI のみを考慮して逆行を作ると図 1(3) のようになる．

中世・ルネサンス時代に cantus firmus (定旋律) に適用されたのが嚆矢である．逆行は楽曲構成を拡張するための (esoteric な) 手段の 1 つであるが，常に聴衆の鑑賞に耐え得るような旋律を生み出せるわけではない．有名な逆行の例に，ベートーベンのピアノソナタ (Hammerklavier Sonata) 第 29 番 変ロ長調 第 4 楽章がある．主題の逆行によるフーガが聴かれる (図 2 [*1])．変ロ長調であった主題の逆行において，リズムは保存されているが変ロ短調に移調されている．20 世紀に入ってからは，逆行が 12 音技法における 3 つの基本操作の内の 1 つとして位置付けられている（他の 2 つは反行 inversion と移高（移置）transposition である）．

図 1: 元曲とその逆行

3. flip 操作

本稿における flip 操作とは，タイムスパン木に含まれるトップレベルの maximal time-span [*2]の中心線を境にタイムスパン木全体を左右逆転する (鏡像を作る) ことである（図 3）．flip 操作の対象はタイムスパン木であり，楽譜上の音列ではない．

一般のタイムスパン木に対する再帰的な flip のアルゴリズムを与える．まず，base case として 2 音から成る単純なタイムスパン木の場合を考える (図 4)．Primary 枝の maximal time-span は $[0, T_P]$ であり，その中心線の位置は $T_P/2$ である．Secondary 枝の maximal time-span は $[0, T_S]$ であり，それが中心線 $T_P/2$ を境に折り返され，下図のような鏡像対称のタイムスパン木となる．flip 操作によって変化するのは Secondary 枝の maximal time-span だけであり，Primary 枝の maximal time-span は変化しない．Secondary 枝の maximal time-span は $T_P - T_S$ だけ右にシフトしたと見なすこともできる．

次に，inductive case として部分木 P，S から成るタイムスパン木に対する flip 操作のアルゴリズムを考える (図 5)．図中 (a) の 2 本の平行線分は，flip 操作適用前のタイムスパン木全体のトップレベルのタイムスパン $[0, T_P]$ と（部分木 P のトップレベルの maximal time-span も $[0, T_P]$），部分木 S の maximal time-span は $[0, T_S]$ を示している．

(1) Secondary 枝の部分木 S を $T_P - T_S$ だけ右にシフトする (S' を得る)

連絡先: hirata@fun.ac.jp, tojo@jaist.ac.jp

*1 `http://imslp.org/` より．編集 Heinrich Schenker, 出版 Vienna: Universal Edition, (ca.1920)

*2 楽曲全体を支配する最上位（最長）のタイムスパンを指す．

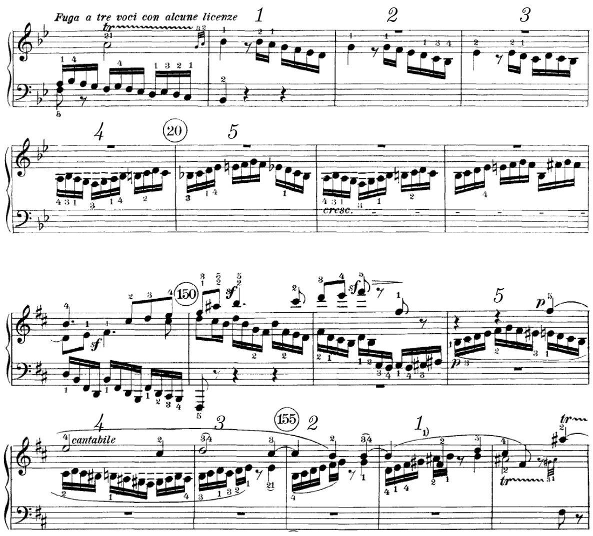

図 2: ベートーベンのピアノソナタにおける逆行の例 (〇数字は第 4 楽章冒頭からの小節数．上 16 小節めから主題が始まる．下 152 小節めからがその逆行．図中の青数字 1〜5 が対応する小節を表す)

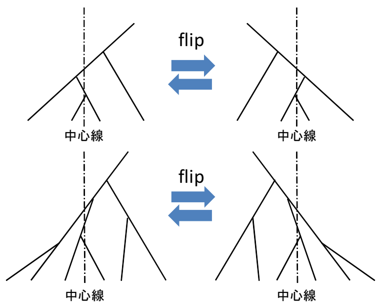

図 3: タイムスパン木の flip の例

(2) P を flip して P' を得る（中心線 P ($T_P/2$) を境にして Primary 枝の部分木 P を折り返して P' を得る）

(3) S' を flip して S'' を得る（中心線 S ($T_P - T_S/2$) を境にして S' を折り返して S'' を得る）

本アルゴリズムでは，トップダウンにタイムスパン木を flip していく．図中 (b) は，flip 操作適用後のタイムスパン木全体のトップレベルのタイムスパン $[0, T_P]$ と（部分木 P' のトップレベルのタイムスパンも $[0, T_P]$），部分木 S'' の maximal time-span は $[T_P - T_S, T_P]$ を示している．

ここで，flip 操作の具体例を図 6 に示す．まず，図中 (a) から (c) において，部分木 S が右に $T_P - T_S$ だけシフトされる．(b) から (d) において P に flip 操作を適用して P' を得て，同じく (c) から (e) において S' に flip 操作を適用して S'' を得る．各部分木 X の flip において，X に flip 操作を適用しても X のトップレベルにおける maximal time-span は変化しない点に留意せよ ($X = \{P, S, P', S', S''\}$).

4. flip 操作に関する理論的検討

4.1 逆行と flip されたタイムスパン木の関係

例えば 2 音からなる短い旋律を考え，そのタイムスパン木 σ_A が ╱╲ という形をしていると仮定する．この旋律と最も異

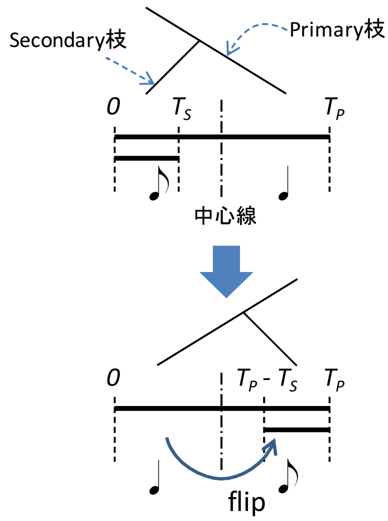

図 4: 2 音から成るタイムスパン木に対する flip 操作

なる旋律とは (そのタイムスパン木を σ_B とすると)，$\sigma_A \sqcap \sigma_B$ の値は $\perp$ となり，$\sigma_A \sqcup \sigma_B$ の値は $\top$(すべての旋律の *join*) となるようなものである．まず，*meet* ($\sqcap$) を計算して $\perp$ となるような元は，$\perp$ あるいは時間軸上で σ_A と重複のないタイムスパンであり一意に決まらない．そこで，トップレベルの maximal time-span が σ_A と重複するという制約を導入したいと考える．さらに，*join* ($\sqcup$) を計算して $\top$ となるような元は，少なくとも σ_A とは異なる branching を持っているはずである．つまり σ_B は ╱╲ という形をしており，またそのために音列も逆転されている．つまり，我々が現在開発している代数的な枠組の中で元旋律と最も異なる旋律は，逆行によって生成することができ，逆行のタイムスパン木は元のタイムスパン木の flip となっていることが示唆される．

仮に拍節構造を考慮しなければ，音価を保存する逆行から鏡像のグルーピング構造が得られるので，flip したタイムスパン木と音価を保存する逆行は対応するだろう．ここで，楽譜を $\mathcal{S}$，GTTM 分析を $\mathcal{A}(\cdot)$ と書くと，その対応は $\text{flip}(\mathcal{A}(\mathcal{S})) = \mathcal{A}(\text{逆行}\ (\mathcal{S}))$ と表現できる．一方，西洋調性音楽の分析ではグルーピング構造と拍節構造を考慮する必要がある．強拍が現れない 1 小節より短い旋律に関しては，西洋調性音楽でも上の等式が成立する場合があるのに対し，1 小節より長い強拍を含む旋律の逆行では，強拍の位置により重要な枝が現れる傾向が強く，一般にタイムスパン木は単純な鏡像にはならないことが予想される．

4.2 相対擬補元

単位元，補元を持たず結合則のみを満たす代数系を半群といい，半群が単位元を持てばモノイドになり，モノイドが補元を持てば群になる．我々が開発中の枠組には，結合則を満たす演算と *meet* に関する単位元は与えられているものの，*join* に関する単位元と補元がなく，その記述力は高くない．四則演算に喩えれば，足し算における補元を負の数に対応させるとすると，負の数を持たない体系あるいは引き算のできない体系を思い浮かべればよい．あるいは，掛け算における補元を $1/n$ に対応させるとすると，割り算のできない体系を思い浮かべればよい．従って，半群に補元を導入すれば記述力が大きく向上することが期待される．元 A の補元 A^C とは，$A \cap A^C = \phi$ かつ $A \cup A^C =$ 世界全体 と定義されるような元であるが，楽曲 M

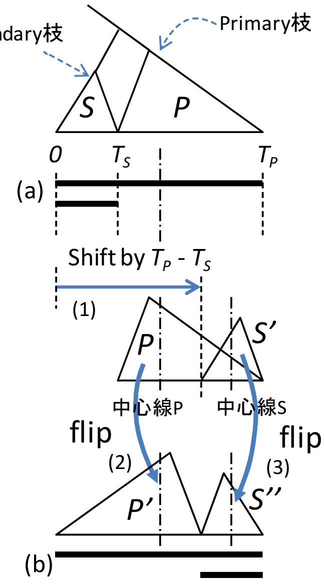

図 5: 再帰的な flip 操作

が与えられた時に，それとの積 (*meet*) が空となるような楽曲が存在するかどうか保証されず，またそれとの和 (*join*) が世界全体となるような楽曲が存在するかどうかも保証されない．この 2 つの条件を緩めて，$M \sqcap \xi \sqsubseteq \delta$ (相対) かつ $\operatorname*{argmax}_{\xi} M \sqcup \xi$ (擬) なる ξ を補元の代わりとして用いることを考える．

相対擬補元の定義は以下の通り [6, 2]．ある代数系において，分配的な演算 $\sqcap$ (*meet*), $\sqcup$ (*join*) が定義されており，各要素の間に順序 $\sqsubseteq$ が存在すると仮定する．このとき，任意の二つの元 σ_A, σ_B に対して $\sigma_A \sqcap x \sqsubseteq \sigma_B$ となる x のうち最大のものが一意に存在するとき，これを σ_A の σ_B に対する相対擬補元 (relative pseudo-complement) と呼び $\sigma_A \supset \sigma_B$ と書く．つまり，

$$\sigma_A \supset \sigma_B = max\{x \mid \sigma_A \sqcap x \sqsubseteq \sigma_B\}$$

である．相対擬補元の存在する束を相対擬補束と言う．

相対擬補元を実際に算出するには，その定義から明らかなように，対象としている領域中から条件を満たす元を全て集めるという操作が含まれている．もしタイムスパン木が無限個存在するとすると，領域のサイズは無限大となる．インスタンスベースに探索する場合でも，素朴に世界中の項を全解探索すると効率が良くないだろう．

4.3 flip されたタイムスパン木の性質

本節では，flip を用いて効率良く相対擬補元を構成する方法を示す．まず，flip が満たす幾つかの性質を指摘する．

排中律　$\mathrm{flip}(\mathrm{flip}(\sigma)) = \sigma$

加法的　$\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A} \sqcup \sigma_\mathrm{B}) = \mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcup \mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{B})$

$\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A} \sqcap \sigma_\mathrm{B}) = \mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcap \mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{B})$

以上の証明は省略する．これらより

$$\mathrm{flip}(\sigma \sqcup \mathrm{flip}(\sigma)) = \sigma \sqcup \mathrm{flip}(\sigma)$$
$$\mathrm{flip}(\sigma \sqcap \mathrm{flip}(\sigma)) = \sigma \sqcap \mathrm{flip}(\sigma)$$

が導かれる．ここで，$\sigma \sqcup \mathrm{flip}(\sigma)$ は，その内部表現では常に 3 分木である [3]．一方 $\sigma \sqcap \mathrm{flip}(\sigma)$ は，常に Primary 枝のみ (1 葉のみ) である．なぜなら flip 操作のアルゴリズムから，σ と $\mathrm{flip}(\sigma)$ のトップレベルにおける Primary 枝の maxmal time-span はお互いに等しく，トップレベルにおける Secondary 枝はお互いに逆方向である．よって，$\sigma \sqcap \mathrm{flip}(\sigma)$ の結果では，Primary 枝が残り Secondary 枝が削除される．

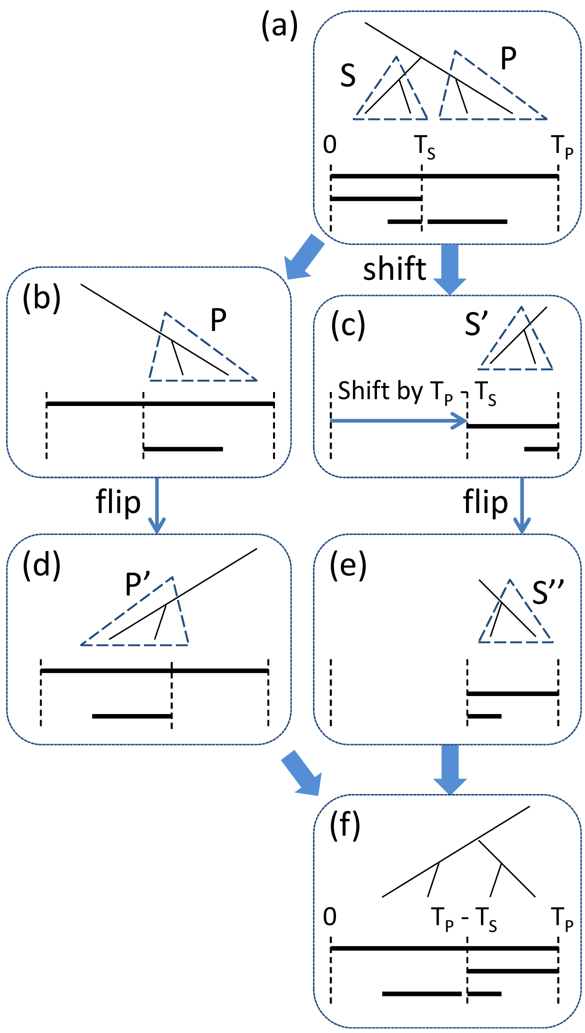

図 6: flip 操作の実行手順

補題 1 *(flip による相対擬補元の近似)*：任意の二つのタイムスパン木 σ_A, σ_B に関して，相対擬補元 $\sigma_A \supset \sigma_B$ が存在する時 $\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcup \sigma_\mathrm{B} \sqsubseteq \sigma_\mathrm{A} \supset \sigma_\mathrm{B}$ である．ただし $\sigma_A \sqcap \sigma_B \neq \bot$．

略証: σ_A のトップレベルの maximal time-span を M_A とする．$\sigma_A \sqcap (\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcup \sigma_\mathrm{B}) =^{*3} (\sigma_A \sqcap \mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A})) \sqcup (\sigma_A \sqcap \sigma_\mathrm{B}) = M_A \sqcup (\sigma_A \sqcap \sigma_B) = \sigma_A \sqcap \sigma_B$ (なぜなら，$\sigma_A \sqcap \sigma_B \neq \bot$ ならば $M_A \sqsubseteq (\sigma_A \sqcap \sigma_B)$)．よって $\sigma_A \sqcap (\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcup \sigma_\mathrm{B}) \sqsubseteq \sigma_\mathrm{B}$．相対擬補元の定義から，$\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcup \sigma_\mathrm{B} \sqsubseteq \sigma_\mathrm{A} \supset \sigma_\mathrm{B}$ (図 7)．*Q.E.D.*

図 7 中の縦軸は，各元の total maximal time-span の値であり $|\sigma|$ と記す [7]．ここで $|\sigma_A| \leq |\sigma_B|$ と仮定しても一般性は損なわれない．図の左右の位置 (横軸) に特に意味はない．明らかに $|\sigma_A| \leq |\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcup \sigma_\mathrm{B}|$ かつ $|\sigma_B| \leq |\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcup \sigma_\mathrm{B}|$ である．

上の補題から，$\mathrm{flip}(\sigma_\mathrm{A}) \sqcup \sigma_\mathrm{B}$ が相対擬補元の代用となることが示唆される．

*3　相対擬補束は分配束であることが知られている．

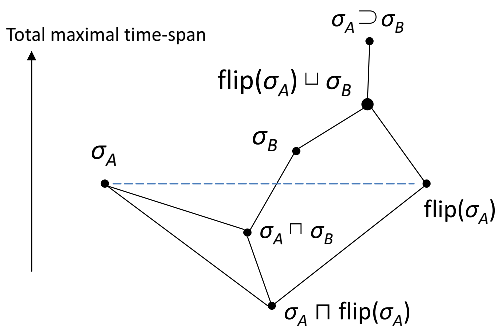

図 7: 相対擬補元を近似する元

5. おわりに

flip 操作を用いて生成された相対擬補元は，我々が現在構築している楽曲を操作する代数的枠組の記述力を向上させる．今後，相対擬補元を利用したアプリケーションを幾つか設計し [2]，その仕様を形式的に示していく予定である．

先の 4.1 節では，逆行と flip されたタイムスパン木の関係に簡単に触れた．今後は，1 小節より長い旋律の逆行が持つ意味を検討したい．逆行のタイムスパン木 $\mathcal{A}(逆行\ (\mathcal{S}))$ や，flip したタイムスパン木をもたらすような旋律 μ s.t. $\mathcal{A}(\mu) = \text{flip}(\mathcal{A}(\mathcal{S}))$ [*4]の間の関係を解明する．

補題の証明では，$\sigma_A \sqcap \text{flip}(\sigma_\text{A}) = \text{M}_\text{A}$ という性質を使った．もしあるタイムスパン木 σ_C のトップレベルの Primary 枝の maximal time-span が σ_A に等しく，トップレベルの Secondary 枝の方向が σ_A と逆向きであれば，σ_C のトップレベルより 2 段目以下がどのような構造になっていても $\sigma_A \sqcap \sigma_C = M_A$ となるので，十分である．つまり σ_A のトップレベルだけ flip して (2 段目以下が同一で) も同様の性質を持った元が得られてしまう．ここで相対擬補元の意味を勘案すると，σ_A から最も異なるタイムスパン木が望ましい．4.1 節では，(最も) 異なる旋律を作る方法として逆行 (flip) を導入した．そこで，σ_A と最も異なる旋律を作るには，σ_A を木の末端まで flip するのが適切であろう．その時，元旋律から最も遠ざかっている筈であり，そのような距離尺度は flip 操作に基づいて設計することができよう．先に，図 7 における左右位置に特に意味はないと書いたが，実際には $\text{flip}(\sigma_\text{A})$ が σ_A から最も遠くに配置されるよう描いている．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 26280089 および 25330434 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Cadwallader, A. and Gagné, D.: 調性音楽のシェンカー分析, 音楽之友社, 角倉一朗 (訳) (2013).

[2] 平田圭二, 東条敏, 楽曲構造束とその上の演算系, 第 20 回人工知能学会 全国大会, 1D2-4 (2006)

[3] Hirata, K., Tojo, S., Hamanaka, M.: Algebraic Mozart by Tree Synthesis, *Proc. of Joint Conference of ICMC and SMC 2014*, pp.991-997.

*4 GTTM 分析の逆写像であるレンダリングを $\mathcal{R}(\cdot)$ と書けば，$\mu = \mathcal{R}(flip(\mathcal{A}(\mathcal{S})))$.

[4] 平田圭二, 東条敏, バーンスタインの「答えのない質問」再考：計算論的音楽の理論の枠組みについて, *2014* 年度人工知能学会全国大会（第 *28* 回）論文集, 1K4-OS-07a-1.

[5] Lerdahl, F., Jackendoff. R.: A Generative Theory of Tonal Music, The MIT Press (1983).

[6] 小野寛晰: 情報科学における論理，日本評論社 (1994).

[7] Satoshi Tojo, Keiji Hirata, Masatoshi Hamanaka, Computational Reconstruction of Cognitive Music Theory, *New Generation Computing*, Vol. 31, Issue 2, pp.89-113 (2013).