

複数資産人工市場を用いた裁定取引によるショック伝搬の分析

Analysis of shock transfer by arbitrage using multi-asset artificial market

鳥居 拓馬*1 中川 勇樹*1 和泉 潔*1*2

Takuma Torii Yuki Nakagawa Kiyoshi Izumi

*1 東京大学大学院 工学系研究科

School of Engineering, The University of Tokyo

*2 科学技術振興機構 CREST

CREST, JST

Simultaneous trading of multiple assets is becoming more common in financial markets, but financial analysts argue that it may bring unintended consequences, such as an increase in volatility. Agent-based simulations are useful ways to study market dynamics and acquire information to devise market rules. In this study, we constructed a multi-asset artificial market model and investigated the effect of arbitrage trading among multiple assets on price-shock transfer from one asset to the whole market. The model is composed of index futures and its underlying stocks (the components of the market index). Our simulation featured two types of agent: local traders and arbitrageurs. A local trader sells or buys a single asset. Arbitrageurs can profit from a price difference between the index futures and the underlying stocks. We found that the impact of a shock transfer by arbitrageurs can be determined by the local traders' reaction speed to the shock.

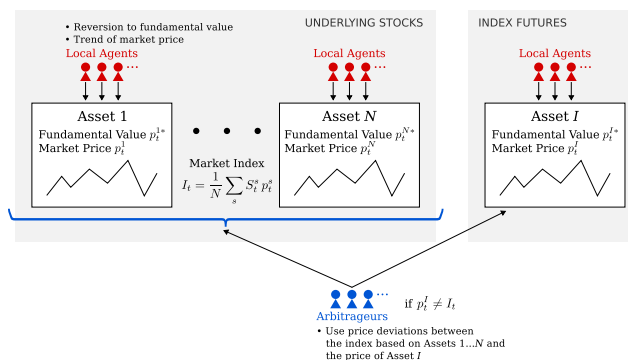
1. はじめに

近年では、多くの投資家が株式、為替、債権、オプションなどの複数の資産を同時に取引していると言われている [Senft 13]. その背景にはアルゴリズム取引などの高頻度取引の発展がある. 複数資産の同時取引は資産間の複雑な関係を生みだしていると考えられており、実際、いくつかの銘柄は金融危機の直前に同期的な動きを示すことが報告されている [Harmon 10]. 別の例としては、2010年5月6日に米国の株式市場において発生したフラッシュ・クラッシュでは、わずか数分の内に起きた先物市場の価格の大幅な下落が最終的に他の現物市場にまで伝搬したと報告されている [U.S. Securities and Exchange Commission 10].

これらの報告は実証研究に基づくが、現実の市場ではさまざまな要因が作用しているため、関心のある要因の影響だけを抽出して分析することは困難である. この問題を克服するために、近年では人工市場と呼ばれるエージェントシミュレーションを金融市場の分析に適用した研究が行われている. 最近では、単一資産の人工市場のみではなく、複数資産の人工市場も研究されている [Westerhoff 04, Chiarella 07, Kawakubo 14, Xu 14]. たとえば、[Xu 14] では現物先物裁定トレーダが参加する複数資産人工市場を構築し、現実の中国の金融市場のもつ統計的性質を再現しようとした. 一方で、本研究では、ある特定の現物銘柄の価格の急落が市場全体にどのような影響を与えるかについて、そのメカニズムを解明するために、複数の現物銘柄と1つの指数先物をもつ複数資産の人工市場を用いて分析した.

2. 複数資産人工市場モデル

本稿のモデルは現物市場と指数先物市場（金利は考えない）からなり、特定の銘柄のみを取引する局所トレーダと、現物・指数先物間の裁定取引を行う裁定トレーダが市場に参加する. 裁定トレーダの取引により N 個の現物市場と1個の指数先物市場が相互作用する（図1）.

図1: 複数資産人工市場モデル: 指数銘柄 I と現物銘柄 $1, \dots, N$

2.1 市場

各市場の価格決定は連続二重オークション方式に従う. 銘柄 s のある時点 t の価格 p_t^s は、時点 t で取引が成立すればその取引価格となり、他方、取引がなければ最高・最安気配値 (bid · ask) の平均値とする. 時点 t の間に、局所トレーダは多くとも全体で1つの注文を、裁定トレーダは定められた上限までの注文を出すことができる.

現物銘柄 s の理論価格（ファンダメンタル価格）は平均 μ_{s*} 、分散 $(\sigma_{s*})^2$ の多変量幾何ブラウン運動（次式）に従う.

$$\Delta p_t^{s*} = \mu_{s*} p_t^{s*} + \sigma_{s*} p_t^{s*} \Delta W_t^{s*} \quad (1)$$

ここで、 ΔW_t^{s*} はウィーナー過程であり、このとき2銘柄の相関係数は

$$E[\Delta W_t^{s*} \Delta W_t^{z*}] = \rho_{s*,z*} \quad (2)$$

で与えられる.

株価指数 I_t は日経225の計算方式である価格平均指数方式（次式）を採用する.

$$\begin{aligned} I_t &= \text{INDEX}(p_t^1, p_t^2, \dots, p_t^N) \\ &= \frac{\sum_s p_t^s}{\sum_s p_0^s} I_0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 I_0 は基準価格となる任意の定数である。指数先物銘柄の理論価格は現物銘柄の理論価格に指数計算を適用し

$$p_t^{I*} = \text{INDEX}(p_t^{1*}, p_t^{2*}, \dots, p_t^{N*}) \quad (4)$$

とする。

2.2 局所トレーダ

局所トレーダはある単一の銘柄のみ（現物のひとつか先物）を取引する。局所トレーダは銘柄 s の期待リターンをファンダメンタル項 F_t^i とテクニカル項 C_t^i の組み合わせにノイズ項 N_t^i を加えた荷重平均 [Chiarella 02] として見積もる：

$$\hat{r}_t^{i,s} = \frac{1}{w_F^i + w_C^i + w_N^i} (w_F^i F_t^{i,s} + w_C^i C_t^{i,s} + w_N^i N_t^{i,s}) \quad (5)$$

ここで、 $w_F^i, w_C^i, w_N^i \geq 0$ は各項への重みである。ファンダメンタル分析は現在の市場価格が将来的に理論価格へ接近するという期待に基づく。したがって、 F_t^i は理論価格 p_t^{i*} と市場価格 p_t^s の乖離から

$$F_t^{i,s} = \frac{1}{\tau^{s*}} \ln(p_t^{s*}/p_t^s) \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 τ^{s*} は平均回帰速度を決める定数である。他方で、テクニカル分析は現在の価格推移の傾向が将来的にも継続するという期待に基づく。したがって、 C_t^i は過去 τ^i 期間にわたる市場価格の変化の時系列から

$$C_t^{i,s} = \frac{1}{\tau^i} \sum_{j=1}^{\tau^i} r_{t-j}^s = \frac{1}{\tau^i} \sum_{j=1}^{\tau^i} \ln \frac{p_{t-j}^s}{p_{t-j-1}^s} \quad (7)$$

で与えられる。最後に、ノイズ項は平均 0、分散 $(\sigma_e^s)^2$ の正規分布に従う。

$$N_t^{i,s} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^s) \quad (8)$$

期待リターン $\hat{r}_t^{i,s}$ より、時点 $t + \tau^i$ の期待価格は次式で与えられる。

$$\hat{p}_{t+\tau^i}^{i,s} = p_t^s \exp(\hat{r}_t^{i,s} \tau^i) \quad (9)$$

取引（売買）は期待価格から決定される [Chiarella 02]。局所トレーダはあるマージン $k^{i,s} \in [0, 1]$ をもち、もし将来的な価格の上昇を予想するならば ($\hat{p}_{t+\tau^i}^{i,s} > p_t^s$)、サイズ 1 の注文を次の価格において出す。

$$\min\{\hat{p}_{t+\tau^i}^{i,s}(1 - k^{i,s}), p_{t,\text{ask}}^s\} \quad (10)$$

他方、もし価格の下落を予想するならば ($\hat{p}_{t+\tau^i}^{i,s} < p_t^s$)、1 単位の注文を次の価格において出す。

$$\max\{\hat{p}_{t+\tau^i}^{i,s}(1 + k^{i,s}), p_{t,\text{bid}}^s\} \quad (11)$$

最安・最高気配値を越える価格では注文を出さない。

2.3 裁定トレーダ

裁定トレーダは指数先物と現物銘柄を同時に売り買い（買い売り）する。裁定取引は株価指数 I_t と指数先物 p_t^I の価格差から利益をえる。裁定トレーダはまず株価指数 I_t を計算し、次に指数先物 p_t^I と比較して $I_t \neq p_t^I$ となった場合に取引を行う。具体的には、 $I_t > p_t^I$ のとき、指数先物の買い（ N 単位）と現物銘柄の売り（各 1 単位）の注文を同時に行う。他方で、 $I_t < p_t^I$ のとき、指数先物の売り（ N 単位）と現物銘柄の買い（各 1 単位）の注文を同時に行う。

3. 結果

本研究では $N = 2$ 現物銘柄からなる人工市場を用いる。ある現物銘柄（銘柄 1 とする）の理論価格が 20% 急落した状況を想定し、そのショックが他の銘柄へ伝搬する影響を分析した。指数先物（銘柄 I ）の理論価格は現物銘柄の理論価格の平均であるため、銘柄 1 の急落のショックは銘柄 I に直接的に伝搬し、銘柄 I の理論価格は $20/N = 10\%$ 下落する。他方で、銘柄 2 へは直接的なショックの伝搬はない。

本研究では、局所トレーダの戦略の違いによって、どのように銘柄 1 から銘柄 2 へのショック伝搬が生じるかを分析した*1。銘柄 s の局所トレーダ i の取引戦略のパラメータ w_F^i, w_C^i, w_N^i はそれぞれ期待値 $\lambda_F^s, \lambda_C^s, \lambda_N^s$ の指数分布からとる。本研究では $\lambda_F^s = 0.0, 0.3, 0.6, 0.9$, $\lambda_C^s = 0.0, 0.3, 0.6, 0.9$, $\lambda_N^s = 0.9$ の範囲で、各銘柄 $s = 1, 2, I$ の $\lambda_F^s, \lambda_C^s, \lambda_N^s$ の全ての組み合わせについてシミュレーションを行った。

3.1 準備：単一資産モデル

モデルの基本的な挙動を調べるために、単一銘柄からなる人工市場を分析した*2。図 2 はある 1 試行の価格の時系列である。(a) と (b) は、 $\lambda_F = 0.3$ は同じだが、(a) $\lambda_C = 0.0$ と (b) $\lambda_C = 0.1$ が異なる。理論価格の初期値は $p^* = 300$ とし、 $t = 500$ において $p^* = 240$ まで瞬時に急落する。どちらの図でも市場価格（実線）は急落した理論価格（破線）を追従しているが、これはファンダメンタル項の基本的な影響である。ファンダメンタル項が大きいほど、市場価格はより早く理論価格へ接近する。(a) と (b) を比較すると、(b) ではより顕著に市場価格のアンダーシュートがみられる。これは直近のトレンドを基準とするテクニカル項の基本的な影響である。

乱数に依らない定性的な傾向を捉えるために、以下の分析では次式で定義する K 試行の平均時系列を用いる。

$$\bar{x}_t = \sum_{k=1}^K x_t(k)/K \quad (12)$$

ここで、 $x_t(k)$ ($t = 1, 2, \dots$) は k 番目の試行の変数 x_t の値を示す。本稿では変数として市場価格 p_t^s と理論価格 p_t^{i*} を用いる。

3.2 複数資産モデル：裁定取引によるショック伝搬

図 3(a) は $(\lambda_F^1, \lambda_C^1, \lambda_F^2, \lambda_C^2, \lambda_F^I, \lambda_C^I) = (0.9, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)$ の平均時系列 $\bar{p}_t^s, \bar{p}_t^{i*}$ を示す。この設定では、銘柄 1 には銘柄 I より多くのファンダメンタル戦略が存在し ($\lambda_F^1 > \lambda_F^I$)、また銘柄 2 および銘柄 I はノイズトレード戦略のみとなっている。図から、銘柄 1 の理論価格の急落する $t = 500$ 以降、銘柄 2 の価格は上昇している。この設定では、 $\lambda_F^2 = 0.0$ のために、銘柄 2 の市場価格はその理論価格に回帰できるとは限らない（なお、銘柄 2 の平均理論価格はショックにより変化しない）。逆に、図 3(b) では、銘柄 1 の理論価格の急落後、銘柄 2 の価格が下落している。図 3(b) のパラメータは $(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 9.0, 0.0)$ であり、銘柄 I には銘柄 1

1 パラメータの数値は [Chiarella 02, Chiarella 09] を参考に設定した。また、銘柄 1, 2, I は市場規模、時価総額などの点で類似していると仮定した。具体的には、各銘柄の局所トレーダ数を 500、各トレーダの初期の銘柄保有量を最大 50 単位、現金保有量を最大 15000 単位とし、取引のマージン $k^{i,s}$ を $[0, 0.1]$ の一様乱数から、また時間窓 τ^i を平均値 100 とした。裁定トレーダは全銘柄について局所トレーダと同様に初期値をもつ。理論価格の初期値は 300 とし、平均と分散を $\mu_{s} = 0, \sigma_{s*} = 0.001$ とし、相関係数を $\rho_{1*,2*} = 0.0$ とした。裁定トレーダの取引頻度を 100 とした。

2 理論価格の分散は $\sigma_{s} = 0$ とした

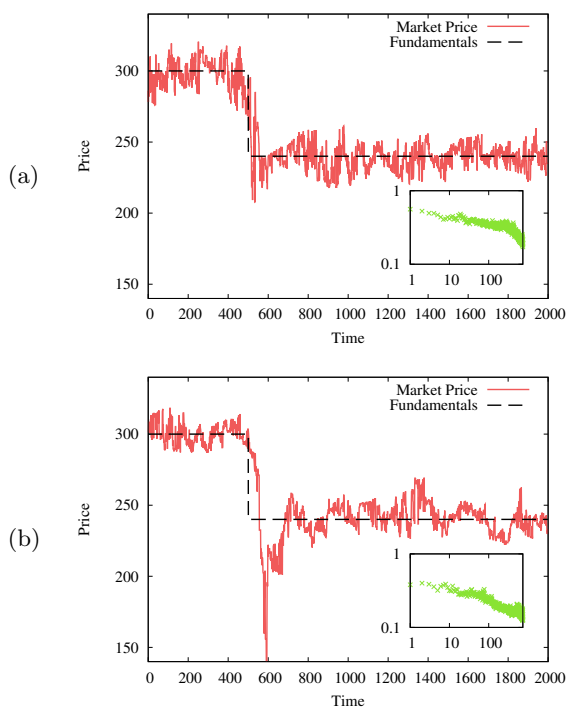


図 2: 単一銘柄の市場価格およびリターン絶対値の自己相関プロット. (a) $\lambda_F = 0.3$, $\lambda_C = 0.0$. (b) $\lambda_F = 0.3$, $\lambda_C = 0.1$

より多くのファンダメンタル戦略が存在する状況 ($\lambda_F^1 < \lambda_F^I$) である.

銘柄 2 の市場価格および銘柄 1 と I の局所トレーダの取引戦略との関係を明らかにするために、次に定義する理論価格 p_t^{s*} と市場価格 p_t^s の乖離の積分を用いる.

$$D^s = \sum_{t > t_{sh}} (p_t^s - p_t^{s*}) \quad (13)$$

ここで、 $t_{sh} = 500$ は銘柄 1 にショックが発生する時点である。銘柄 2 の市場価格が平均して増加している場合には $D^2 > 0$ となり、逆に銘柄 2 の市場価格が平均して減少している場合には $D^2 < 0$ となる。 λ_F^1 と λ_F^I の影響のみを抽出するために、ここでは λ_F^s と λ_C^s ($s = 1, 2, I$) について平均化し、図 4 は λ_F^1 と λ_F^I の関数として D^2 を示した。図から、 $\lambda_F^1 > \lambda_F^I$ では $D^2 > 0$ となり、このとき p_t^2 は上昇する。他方で、 $\lambda_F^1 < \lambda_F^I$ では $D^2 < 0$ となり、このとき p_t^2 は下落する。さらに、 $\lambda_F^1 \approx \lambda_F^I$ では $D^2 \approx 0$ となっており、これは平均的には p_t^2 へ小さな影響しかないことを示す。

この結果を定量的に評価するために、従属変数 D^s 、独立変数 λ_F^s , λ_C^s ($s = 1, 2, I$) の線形回帰を行った。その結果を表 1 に示す。表から、ファンダメンタル項がショックに対して強い影響力をもつことがわかる。本研究では、理論価格のショックが銘柄 1 (20% 減少) と銘柄 I (10% 減少) の両方に影響を与えるので、 D^1 および D^I が負の影響をもつのは自明である。他方で D^2 に関しては、表から、 λ_F^1 は正の影響をもち、逆に λ_F^I は負の影響をもつ。この結果は図 4 の結果と整合的である。

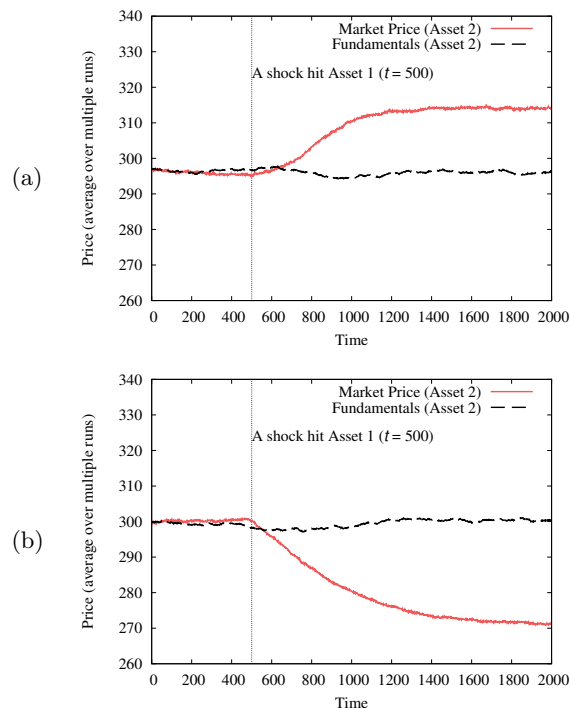


図 3: ショック後の銘柄 2 の価格変化 (平均時系列). (a) $\lambda_F^1 = 0.9$, $\lambda_F^I = 0.0$. (b) $\lambda_F^1 = 0.0$, $\lambda_F^I = 0.9$

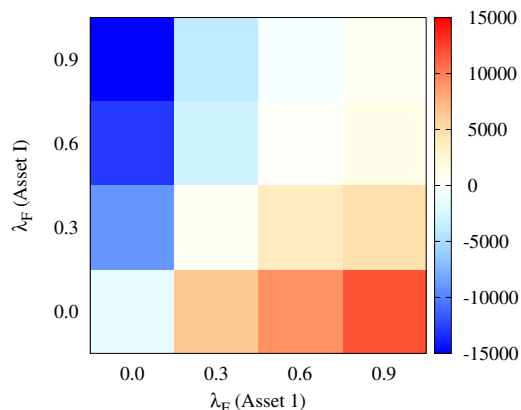


図 4: 平均乖離量 D^2 (銘柄 2) と λ_F^1 および λ_F^I の関係

表 1: 回帰分析の結果. 説明変数 D^s ($s = 1, 2, I$), 従属変数 λ_F^s , λ_C^s ($s = 1, 2, I$). 記号 \ddagger , \dagger , $*$ は有意水準 0.1%, 1%, 5% を表し, 有意でない変数は削除した (-)

	λ_F^1	λ_C^1	λ_F^2	λ_C^2	λ_F^I	λ_C^I
D^1	-0.79 \ddagger	0.09 \ddagger	-	-	-0.36 \ddagger	0.11 \ddagger
D^2	0.48 \ddagger	-0.07 \ddagger	-	-	-0.39 \ddagger	0.14 \ddagger
D^I	-0.60 \ddagger	0.06 \ddagger	-	-	-0.58 \ddagger	0.19 \ddagger

4. 議論

4.1 ショック伝搬のメカニズム

裁定取引がショック伝搬を引き起こすメカニズムを説明する。前節では、銘柄 2 の市場価格の上昇と下落という 2 種類の影響が観察されたが、その根底にあるメカニズムは同一である。

図 5(a) は上昇のシナリオを図示する。銘柄 1 のファンダメンタル項は銘柄 I よりも大きく ($\lambda_F^1 > \lambda_F^I$)、そのため銘柄 1 の理論価格が急落した (ショックを受けた) とき、銘柄 1 の局所トレーダは銘柄 I よりも早く反応する。その結果、 p_t^1 は p_t^I よりも早く下落するため、 $I_t < p_t^I$ となる (図 5(a) (i))。このとき、裁定トレーダは現物銘柄 1 と 2 を指数先物 I と比較し、割安な現物銘柄を買い、割高な指数先物を売る。その結果、 p_{t+1}^1 と p_{t+1}^2 は上昇し、 p_{t+1}^I は下落する (図 5(a) (ii))。

図 5(b) は下落のシナリオを図示する。前述のケースとは反対に、銘柄 I のファンダメンタル項は銘柄 1 よりも大きく ($\lambda_F^I < \lambda_F^1$)、そのためショックが発生したとき、銘柄 I の局所トレーダは銘柄 1 よりも早く反応する。その結果、 p_t^I は p_t^1 よりも早く下落するため、 $I_t > p_t^1$ となる (図 5(b) (i))。このとき、裁定トレーダは現物銘柄 1 と 2 を指数先物 I と比較し、割安な指数先物を買い、割高な現物銘柄を売る。その結果、 p_{t+1}^I は上昇し、 p_{t+1}^1 と p_{t+1}^2 は下落する (図 5(b) (ii))。

4.2 まとめ

本研究では複数資産人工市場モデルを構築し、裁定取引がショックの伝搬に与える影響を分析した。本研究から、裁定取引がショック伝搬を引き起こす根底にあるメカニズムが示唆された。ETF に関する実証分析 [Ben-David 14, Grudzinski 12] から裁定取引の影響に関する類似した推測がなされており、本研究の発見はこうした知見を裏づけると思われる。

本稿では理想的なモデルを用いたが、現実では市場価格の連動性が銘柄間の時価総額の大小や裁定取引の種類に依存することからも、ショック伝搬の仕方は銘柄間ネットワークの構造によって異なると予想される。市場規制の設計という目的からは、現実の価格データから抽出した銘柄間ネットワークを取り入れた人工市場シミュレーションが今後の課題のひとつとして考えられる。

参考文献

- [Ben-David 14] Ben-David, I., Franzoni, F., and Mousawi, R.: Do ETFs Increase Volatility?, Working Paper 20071, The National Bureau of Economic Research (2014)
- [Chiarella 02] Chiarella, C. and Iori, G.: A Simulation Analysis of the Microstructure of Double Auction Markets, *Quantitative Finance*, Vol. 2, pp. 346–353 (2002)
- [Chiarella 07] Chiarella, C., Dieci, R., and He, X.: Heterogeneous expectations and speculative behavior in a dynamic multi-asset framework, *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 62, No. 3, pp. 408–427 (2007)
- [Chiarella 09] Chiarella, C., Iori, G., and Perello, J.: The Impact of Heterogeneous Trading Rules on the Limit Order Book and Order Flows, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 3, pp. 525–537 (2009)
- [Grudzinski 12] Grudzinski, C.: ETF Arbitrage May Be Driving Market Volatility,

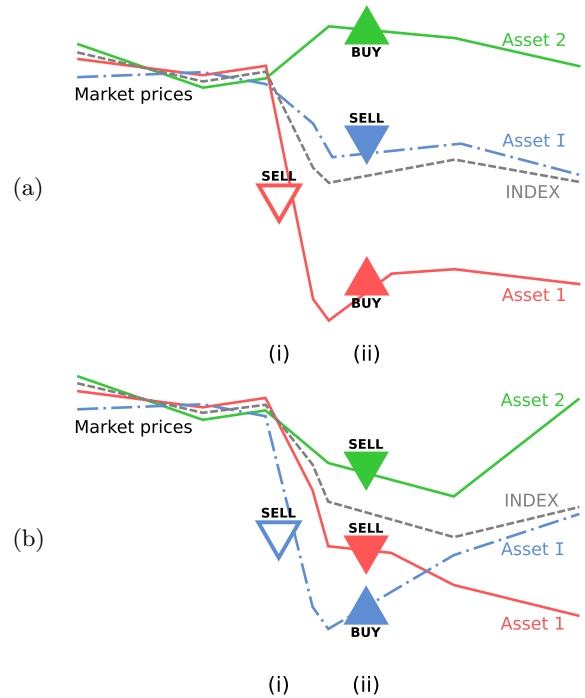


図 5: 裁定取引がショック伝搬へ与える影響 (模式図)。(a) 銘柄 2 が上昇する場合。(b) 銘柄 2 が下落する場合

<http://www.thestreet.com/story/11644440/1/etf-arbitrage-may-be-driving-market-volatility.html> (2012)

- [Harmon 10] Harmon, D., Aguiar, de M. A. M., Chinelato, D. D., Braha, D., Epstein, I. R., and Bar-Yam, Y.: Predicting Economic Market Crises Using Measures of Collective Panic, Technical report, New England Complex Systems Institute (2010)
- [Kawakubo 14] Kawakubo, S., Izumi, K., and Yoshimura, S.: Analysis of an Option Market Dynamics Based on a Heterogeneous Agent Model, *Intelligent Systems in Accounting Finance and Management*, Vol. 21, No. 2, pp. 105–128 (2014)
- [Senft 13] Senft, E.: How Many Markets Do You Trade Simultaneously?, <http://traderkingdom.com/trading-futures-education-topics/trading-futures-basics/2856-how-many-markets-do-you-trade-simultaneously> (2013)
- [U.S. Securities and Exchange Commission 10] U.S. Securities and Exchange Commission, and the Commodity Futures Trading Commission, : Findings Regarding the Market Events of May 6, 2010 (2010)
- [Westerhoff 04] Westerhoff, F.: Multiasset market dynamics, *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 8, No. 05, pp. 596–616 (2004)
- [Xu 14] Xu, H.-C., Zhang, W., Xiong, X., and Zhou, W.-X.: An Agent-based Computational Model for China's Stock Market and Stock Index Futures Market, *Mathematical Problems in Engineering* 2014, p. 563912 (2014)