1F5-OS-09b-5

乗用車とバスが混在するボトルネック・モデルにおける「無秩序の代償」とバス政策効果

Price of Anarchy and Efficiency of a Bus Policy in Bottleneck Model with Private Car and Bus

坂 泰志　長江剛志
Taiji Ban　Takeshi Nagae

*1東北大学 工学研究科 技術社会システム専攻　*1東北大学 工学研究科 技術社会システム専攻
*1Graduate School of Engineering,Tohoku University　*1Graduate School of Engineering,Tohoku University

This article provides a dynamic framework to evaluate bus policies (time table, fee, fleet capacity, etc.). We first formulate a bottleneck model where a bottleneck is shared by both private cars and buses, Each user is assumed to choose the departure time of the bottleneck in order to minimize her transportation cost, which is a weighted sum of the travel time and the schedule cost. The whole users' choice describes the traffic assignment — the cumulative departure/arrival curves — as well as the transportation cost of each user. We then define the user equilibrium (UE), in which no user can unilaterally reduce her own transportation cost and the system optimum (SO) assignments, which minimizes the total travel cost. The bus policies are evaluated by using the price of anarchy (PoA), which is the ratio of the total travel time of UE to that of the SO.

1. 序論

渋滞による時間損失は世界中のあらゆる都市で深刻な社会問題となっている．国土交通省 (2003) によると，日本でも 1 人あたり年間約 30 時間を渋滞混雑によって損失している．渋滞が発生する原因の 1 つに，ボトルネックに対してごく短い時間に交通が集中することが挙げられる．このような渋滞が発生するメカニズムを明らかにし，渋滞混雑の改善のためにとるべき政策を求めるアプローチとして，各利用者の経済学的な損失を考慮した数学モデルが用いられてきた．その中の 1 つに，単一のボトルネックに対する利用者の出発時刻選択行動を分析するモデルを用いた研究が存在する．Kocur[1] は，渋滞による損失に加え，希望流出時刻と実際の流出時刻の差を損失として考慮した出発時刻選択モデルによって，単一のボトルネックにおいてシステム最適を実現するための適切な混雑料金額を明らかにした．ここで，Kocur の分析では，均衡とシステム最適配分のそれぞれでの総損失を考えることができる．Daganzo と Gonzales[3] は，Kocur のモデルにおいて，公共交通が道路容量の一部を専用レーンとして走行し乗用車の利用者と競合する場合の出発時刻選択モデルを用いた分析を行った．しかし Daganzo と Gonzales のモデルは，公共交通の運行頻度と容量に無限大を仮定しており，現実的ではない．

本研究では，単一のボトルネックを乗用車とバス (乗用車よりも大きいが有限の容量を持ち，特定の時刻に運行する) が共有するとして，Kocur や Daganzo と Gonzales の分析をより現実的な枠組みへと一般化する．具体的には，乗用車とバスが混在するボトルネックモデルを構築し，バス政策 (運行時刻や料金) とその他の交通政策 (混雑料金など) の経済効果を明らかにする．なお，本研究では，核政策の経済効果を PoA(price of anarchy，無秩序の代償) を用いて評価する．PoA とは，「システム最適における社会的交通損失」に対する「利用者均衡状態における社会的交通損失」であり，これが大きいほど政策の経済効果が大きいことを意味する．さらに，構築したモデルにおける POA を求め，それとバスの運行時刻や料金などの政策変数との関係を考察する．

2. 乗用車のみのボトルネックモデル

はじめに，利用者が交通手段として乗用車のみを選択できる場合について，Hendrickson と Kocur[1] のモデルを振り返る．単位時間あたり μ[台] が通行できるボトルネックに対して，Q[人] の利用者はボトルネックに流入する時刻を任意に選択でき，全利用者が時刻 W にボトルネックを流出することを希望している状況を考える．すなわち，ボトルネックに流入する前の区間は自由走行が可能である．ボトルネックによる待ち行列 (渋滞) を物理的な長さを持たない Point Queue と考え，待ち行列システムには FIFO(ボトルネックに流入した順に流出する) を仮定する．乗用車には，1 台につき 1 人が乗っていると仮定する．各利用者はボトルネックを流出した時刻 t によって定義する．利用者は自分の損失が最小になるようにボトルネックへの流入時刻を選択すると仮定する．ここで，時刻 t における累積流入数 $A(t)$ と累積流出数 $D(t)$ が定義できる．希望流出時刻が全利用者で一定であるとき，μ がどれだけ大きくても全利用者が希望時刻ちょうどに流出することは不可能であることから，累積流出数は常に μ の傾きを持つ．最初の利用者の流出時刻を t_0 とおくと，累積流出数は，

$$D(t) = \mu(t - t_0) \tag{1}$$

ここで，時刻 t における単位時間あたりの流入量を仮に $m(t)$ とおく．さらに，希望流出時刻 W と実際の流出時刻 t の差をスケジュール費用 $s(t)$ と定義する．ここで，ボトルネックを通行するときの所要時間は全員が等しく 0 であると仮定する．このとき，流入時刻と流出時刻の差は，入り口での渋滞時間 $r(t)$ に等しい．

$$s(t) = W - t \tag{2}$$

$$r(t) = t - A^{-1}(D(t)) \tag{3}$$

利用者の損失として，$s(t), r(t)$ のみを考慮し，その他の通行による固定損失は全利用者について等しいと仮定し，ここでは 0 とおく．このとき，利用者それぞれの損失 $UC(t)$ は次のように

連絡先: 坂泰志，東北大学，仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-816，
022-795-6987，taiji.ban@most.tohoku.ac.jp

表 1　記号の定義

記号	定義
μ	単位時間あたりにボトルネックから流出できる最大の台数
Q	総利用者数
W	希望流出時刻
t	流出時刻
$A(t)$	時刻 t における累積流入台数
$m(t)$	時刻 t における，単位時間あたりの流入台数
$D(t)$	時刻 t における累積流出台数
$s(t)$	時刻 t におけるスケジュール費用
$r(t)$	時刻 t における渋滞時間
UC	各利用者の損失
e	希望流出時刻より前に流出した時間の時間価値
L	希望流出時刻より後に流出した時間の時間価値
TC	各利用者の損失の総和

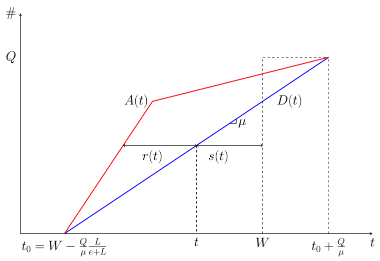

図 1　乗用車のみのボトルネックモデルにおける利用者均衡配分

なる．

$$UC(t) = \begin{cases} r(t) + e \cdot s(t) & t \leqq W,\ (0 < e < 1) \\ r(t) - L \cdot s(t) & t > W,\ (0 < L) \end{cases} \tag{4}$$

e, L はそれぞれ，渋滞時間価値を 1 としたときの早着，遅刻の時間価値である．

2.1　利用者均衡配分

利用者は自分の損失が最小になるようにボトルネックからの流入時刻を選択するという仮定から，すべての利用者が自分の行動 (ここでは流入時刻選択) だけによって損失を改善できない状態を考えることができる．そのように流入，流出時刻が選択されているような状態を利用者均衡配分と定義する．この定義から，利用者均衡配分の必要条件は $\frac{\partial UC(t)}{\partial t} = 0$ である．加えて，$\frac{\partial r(t)}{\partial t} = 1 - \frac{\mu}{m(t)}$ の関係から，早着，遅刻それぞれの流出時刻における単位時間あたりの流入数は次式の通りである．

$$m(t) = \begin{cases} \frac{\mu}{1-e} & t \leqq W,\ (0 < e < 1) \\ \frac{\mu}{1+L} & t > W,\ (0 < L) \end{cases} \tag{5}$$

前提として，この条件において最初と最後の流出者は渋滞を経験しない．利用者均衡配分において，最初と最後の流出者の損失は等しいことから，

$$t_0 = W - \frac{Q}{\mu}\left(\frac{L}{e+L}\right) \tag{6}$$

以上より，$m(t)$ が式 (6) で最初の流出時刻が $t_0 = W - \frac{Q}{\mu}(\frac{L}{e+L})$ のとき利用者均衡配分である．図 1 のように縦軸に累積利用者数を，横軸に時間を取り，利用者均衡配分を表すことができる．

このとき，利用者それぞれの損失は次のように表される，

$$UC = \frac{Q}{\mu}\frac{eL}{e+L} \tag{7}$$

ここで，利用者それぞれの損失を全利用者について足し合わせたものを総損失 TC と定義する．このとき，総損失は，次式の通りである．

$$TC = \frac{Q^2}{\mu}\frac{eL}{e+L} \tag{8}$$

2.2　システム最適配分

ここで，総損失が最小になるように流入，流出時刻が選択されているような状態をシステム最適配分と定義する．このモデルにおいて，システム最適配分の必要条件は，渋滞時間 $r(t)$ が 0，すなわち流入時刻と流出時刻が全利用者について等しいことである．このときの総損失 TC は，最初の流出時刻 t_0 の関数として表される．

$$TC(t_0) = e\int_{t_0}^{W} s(t)dt + L\int_{W}^{t_0+Q/\mu}(-s(t))dt \tag{9}$$

ここで，最適な t_0 を $\frac{\partial TC(t_0)}{\partial t} = 0$ により定めると，結果的に $t_0 = W - \frac{Q}{\mu}(\frac{L}{e+L})$ と求めることができ，利用者均衡配分における t_0 と等しくなる．このとき，総損失は次式の通りである．

$$TC = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\mu}\frac{eL}{e+L} \tag{10}$$

利用者均衡配分とシステム最適配分の総損失から，PoA は次の通りである．

$$PoA = \frac{(\text{利用者均衡配分での } TC)}{(\text{システム最適配分での } TC)} = 2 \tag{11}$$

3.　乗用車とバスが混在するボトルネックモデル

乗用車のみのボトルネックの状況に加えて，容量 $CP(< Q)$ を持ち運行時刻 t_b にボトルネックを流出する 1 台のバスが乗用車と同じレーンを運行する場合を考える．バスの運行時刻は，希望流出時刻付近で，遅刻ではない時刻 $(W - \frac{Q-CP}{\mu}\frac{L}{e+L} \leqq t_b \leqq W)$ で与えるものとする．バス利用者はボトルネックに流入する直前でバスに乗車すると仮定する．ただし，乗車に要する時間は考慮しない．ここで，バス利用者数は必ず CP であると仮定する．このとき，前章と同様に時刻 t における累積流入数と累積流出数が定義できる．累積流出数は次の通りである．

$$D(t) = \begin{cases} \mu(t - t_0) & t \leqq t_b \\ \mu(t - t_0) + CP & t_b > t \end{cases} \tag{12}$$

また，スケジュール費用 $s(t)$，渋滞時間 $r(t)$ は前章と同じ式で表すことができる．

上の仮定から，バスは $r(t_b)$ だけ渋滞する．さらに，その他の損失 (例えば乗用車のガソリンや保険，バスの運賃) は全利用者について等しいと仮定し，ここでも 0 とおく．すなわち損失は，全利用者について $s(t), r(t)$ のみを考慮する．このとき，乗用車の利用者の損失は前章の通りで，式 (4) を用いてバス利用者の損失は次のように表すことができる．

$$UC(t_b) = \begin{cases} r(t_b) + e \cdot s(t_b) & t_b \leqq W,\ (0 < e < 1) \\ r(t_b) - L \cdot s(t_b) & t_b > W,\ (0 < L) \end{cases} \tag{13}$$

3.1　利用者均衡配分

利用者均衡配分においては，各利用者の損失は $\frac{\partial UC(t)}{\partial t} = 0$ を満足する．この必要条件から求めた，早着，遅刻それぞれに対する流入曲線の傾きは前章と同様に式 (5) で表すことができる．

最初の流出時刻は，前章と同様の考えで $t_0 = W - \frac{Q-CP}{\mu}\frac{L}{e+L}$ と決定することができる．ここで，累積流入数は，

$$A(t) = \begin{cases} \frac{\mu}{1-e}(t-t_0) & t < t_b \\ \frac{\mu}{1-e}(t-t_0) + CP & t_b \leqq t \leqq W \\ \frac{\mu}{1+L}(t-t_0) + \frac{LQ}{1+L} + CP & t > W \end{cases} \tag{14}$$

よって，累積流入数および累積流出数は図 2 のように表すことができる．

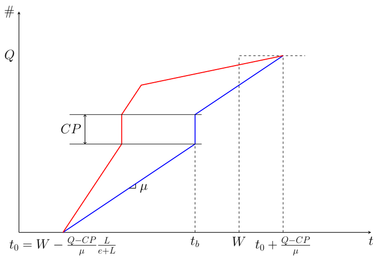

図 2　乗用車とバスが混在するボトルネックモデルにおける利用者均衡配分

この配分において，どの利用者も自分の流入時刻選択によって損失を改善できないことから，これは利用者均衡配分であるといえる．このとき，利用者の損失は次式で表される．

$$UC = \frac{Q-CP}{\mu}\frac{eL}{e+L} \tag{15}$$

上式から，利用者の損失はバスの運行時刻に無関係である．また，CP が大きくなるにつれ損失が小さくなることから，利用者はバスを選択することで自らの損失を改善できる．このことから，本章の冒頭の仮定が自然に満足される．

3.2　システム最適配分

t_b を一定としたときの流入時刻と流出時刻が一致しているときの利用者の損失の総和は，最初の流出時刻の関数として次のように表すことができる．

$$TC(t_0,t_b) = \frac{1}{2}\mu(W-t_0)^2\cdot e + \frac{1}{2}\mu(t_0+\frac{Q-CP}{\mu}-W)^2\cdot L + CP(W-t_b)\cdot e \tag{16}$$

上式を t_0 で偏微分して 0 とおくことで，ある運行時刻 t_b のときのシステム最適配分における総損失を次のように表すことができる．

$$TC(t_b) = \frac{1}{2}\mu(\frac{L}{e+L}\cdot\frac{Q-CP}{\mu})^2\cdot e + \frac{1}{2}\mu(\frac{e}{e+L}\cdot\frac{Q-CP}{\mu})^2\cdot L + CP(W-t_b)\cdot e \tag{17}$$

さらに，上式の t_b 微分を 0 とおくことで，総損失が最小となる $t_b = W$ と決定できる．このとき，総損失は，

$$TC(W) = \frac{1}{2}\frac{eL}{e+L}\cdot\frac{(Q-CP)^2}{\mu} \tag{18}$$

利用者均衡配分の総損失と比をとって，PoA は，

$$PoA = \frac{2Q}{Q-CP} \tag{19}$$

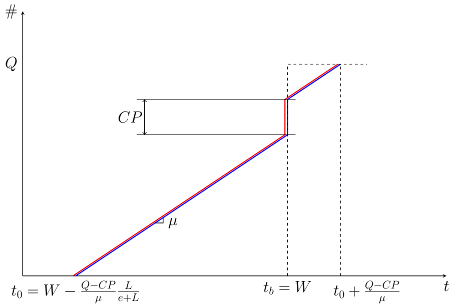

図 3　乗用車とバスが混在するボトルネックモデルにおけるシステム最適配分

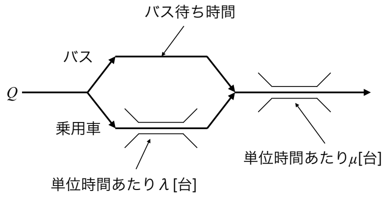

図 4　それぞれのモードに固有の待ち時間を考慮したボトルネックモデル

4.　それぞれのモードに固有の待ち時間を考慮したボトルネックモデル

本章では，公共交通利用者に，運行時刻を待つ時間を考慮した分析を行う．図 4 に示すように，車の利用者は容量 λ,μ の２つのボトルネックを通過することを考える．このときバス利用者は，車の利用者が容量 λ のボトルネックを通過する区間は，別の公共交通で任意の時刻に時間 0 で移動できると仮定して，容量 μ のボトルネックにバス (時刻 t_b に μ のボトルネックを流出する) 利用者として合流すると考える．前半のボトルネックを通過するための固定損失は，乗用車の利用者も公共交通の利用者も等しいと仮定し，0 とおく．バスの運行時刻は，$W - \frac{Q-CP}{\mu}\frac{L}{e+L} \leqq t_b \leqq W$ で与えるものとする，すなわち，後半の区間は前の章のモデルを用いる．各利用者は，後半のボトルネックを流出した時刻 t で定義する．

ここで，前章と同様に，乗用車の利用者について，時刻 t における１つ目の区間への累積流入数と２つ目の区間からの累積流出数が式 (12) で定義できる．さらに，時刻 t における２つ目のボトルネックへの累積流出数を $AD(t)$ とおく．ここで，前半と後半のボトルネックにおける渋滞時間をそれぞれ $r_1(t), r_2(t)$ と定義する．スケジュール費用 $s(t)$ はこれまでと同じ式で定義する．また，バス利用者の待ち時間を w と定義する．ここで，乗用車の利用者とバスの利用者のそれぞれの損失を，UC_c, UC_b として定義する．

$$UC_c(t) = \begin{cases} r_1(t) + r_2(t) + e\cdot s(t) & t \leqq W,\ (0 < e < 1) \\ r_1(t) + r_2(t) - L\cdot s(t) & t > W,\ (0 < L) \end{cases} \tag{20}$$

$$UC_b(t_b) = \begin{cases} w + r_2(t_b) + e\cdot s(t_b) & t_b \leqq W,\ (0 < e < 1) \\ w + r_2(t_b) - L\cdot s(t_b) & t_b > W,\ (0 < L) \end{cases} \tag{21}$$

4.1　利用者均衡配分

以下では，$\mu < \lambda < \frac{\mu}{1-e}$ を仮定する．利用者均衡配分で，乗用車の利用者の損失は $\frac{\partial UC_C(t)}{\partial t} = 0$ を満足する．ここから，前章と

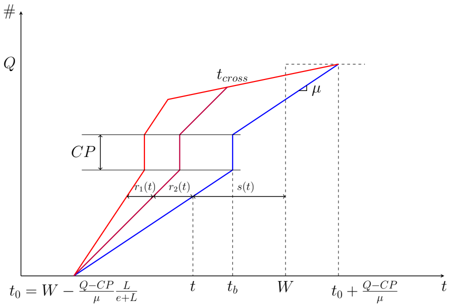

図 5　固有の待ち時間を考慮したモデルの利用者均衡配分

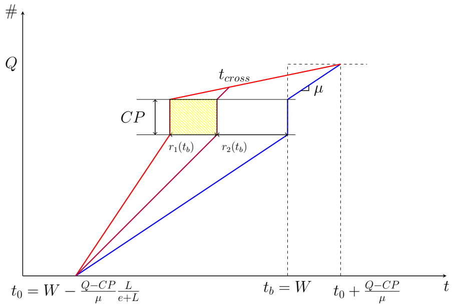

図 6　バス利用者から最適に料金徴収する場合

同様に早着，遅刻それぞれに対する乗用車利用者の前半のボトルネックへの流入曲線の傾きは式 (5) である．このとき，前半のボトルネックで渋滞が発生し，渋滞が発生する時間範囲では自ずと前半のボトルネックからの流出 (後半のボトルネックへの流入) が傾き λ で行われる．また，$A(t)$ が t_0 を除いて初めて $AD(t)$ と交わる時刻を t_{cross} とおく．この点において前半の区間のボトルネックの渋滞は消え，これ以降発生しない．　これらのことから，$A(t)$ は式 (14) の通り，$AD(t)$ は最初の流出時刻を t_0 とおいて次のように表すことができる．

$$AD(t) = \begin{cases} \lambda(t - t_0) & t \leqq t_b \\ \lambda(t - t_0) + CP & t_b < t \leqq t_{cross} \\ A(t) & t_{cross} < t \end{cases} \tag{22}$$

また，バス利用者の損失は運行時刻が所与であることから自ずと一定である．もし，この 2 つの損失の間で差があれば，利用者は交通手段を変更して損失を改善すると考えられる．このことから，利用者均衡配分の必要条件として，2 つの損失が等しくなる．このとき，UC_c と UC_b を比較することにより，$r_1(r_b) = w$ が必要条件となる．ここで，前半のボトルネックにおける渋滞時間 $r_1(t)$ は次式で表すことができる．

$$r_1(t) = \begin{cases} (\frac{\mu}{\lambda} - 1 + e)t - (\frac{\mu}{\lambda} - 1 - e)t_0 & t \leqq W \\ (\frac{\mu}{\lambda} - 1 - L)t - (\frac{\mu}{\lambda} - 1 + e)t_0 + (e + L)W & t > W \end{cases} \tag{23}$$

最初の流出時刻は，前章と同様に，$W - \frac{Q-CP}{\mu}\frac{L}{e+L}$ となる．以上より，利用者均衡配分は図のように表される．このとき，利用者の損失は式 (15) で表される．

4.2　システム最適配分

以下では，前半のボトルネックは $\mu < \lambda < \frac{\mu}{1-e}$ の範囲の容量を持つとする．システム最適配分の必要条件は，車の利用者は 2 つのボトルネックへの流入時刻と流出時刻がそれぞれ一致することである．また，バス利用者も同様に，待ち時間が 0 になることが必要条件となる．

システム最適配分における総損失および PoA は，それぞれ式 (18),(19) の通りである．

4.3　料金政策

ここでは，バス利用者から料金を徴収することを考える．利用者均衡配分におけるバス待ち時間は，式 (23) に表した．ここで，$\mu < \lambda < \frac{\mu}{1-e}$ から，$r_1(t)$ は $t \leqq W$ で単調増加で $t > W$ で単調減少である．このことから，バス待ち時間は $t_b = W$ のとき最大になる．

$$r_1(W) = (\frac{\mu}{\lambda} - 1 + e)\frac{Q - CP}{\mu}\frac{L}{e + L} \tag{24}$$

図 6 の編みかけの範囲の通り，この渋滞時間価値に等しい料金をバス利用者から徴収することで，バス利用者のみから料金徴収を行う場合に最も損失を小さくすることができる．

このときの総損失を TC' とおくと，

$$TC' = \frac{Q - CP}{\mu}\frac{L}{e + L}\{Qe - CP(\frac{\mu}{\lambda} - 1 + e)\} \tag{25}$$

このとき，利用者均衡配分での総損失と TC' の比をとった PoA' は次式の通りである．

$$POA' = \frac{Qe}{Qe - CP(\frac{\mu}{\lambda} - 1 + e)} \tag{26}$$

5.　結論

本稿では，単一のボトルネックを乗用車とバスが共有する場合と，それぞれのモードに固有の待ち時間を考慮した場合の，2 つの枠組みのもとでバス料金や運行時刻が POA に与える影響を明らかにした．

利用者均衡配分とシステム最適配分における総損失を式で表し，前者の配分では運行時刻が損失に影響しないことを，後者の配分では希望流出時刻と一致するように運行時刻をとることで損失が最小になることを明らかにした，

1 つ目のモデルと同様に利用者均衡配分とシステム最適配分における総損失を式で表し，前者の配分では運行時刻が損失に影響しないことを，後者の配分では希望流出時刻と一致するように運行時刻をとることで損失が最小になることを明らかにした，さらに，利用者均衡配分でのバス利用者の待ち時間を式で表し，運行時刻が希望流出時刻ちょうどのとき待ち時間が最大になることを明らかにした．

本研究では希望流出時刻が一定の場合のみ議論したが，実際の交通状況を考えた時そのような状況は非常にまれである．このことから，より一般的な希望流出時刻分布に対しても同様に利用者均衡配分とシステム最適配分を考える必要があると考える．

参考文献

[1] Chris Hendrickson, George Kocur:*Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model*, Transportation Science,Vol.15, No.1, Feburuary 1981

[2] 桑原雅夫: 道路交通における出発時刻選択に関する研究解説,1998

[3] Eric J. Gonzales, Carlos F. Daganzo:*Morning commute with competing modes and distributed demand:User equilibrium, system optimum, and pricing*,Transportation Research Part B: Methodological, 46, 1519-1534, 2012