1F5-OS-09b-3

進化ゲーム理論と MCMC を用いた 道路交通状態の確率的特性の分析

Analyses of Stochastic Properties of Traffic States on A Urban Road Network based on Evolutionary Game Theory and Randomized Algorithm

尻高 佑樹　　長江 剛志
Yuki Shittaka　　Takeshi Nagae

東北大学 工学研究科 技術社会システム専攻　　東北大学 工学研究科 技術社会システム専攻
Graduate School of Engineering, Tohoku University　　Graduate School of Engineering, Tohoku University

This study proposes a novel methodology for quantitative analyses of stochastic properties of the traffic state (e.g. traffic flows, travel times, and so on) on a urban road network. We first formulate a stochastic evolution model of the traffic state basing on the evolutionary game theory: it is assumed that a user might be randomly chosen by a Poisson alarm clock at each day, and might change her route choice as the perturbed best response; the aggregation of this behavior describes the stochastic day-to-day dynamics of the traffic flows on the network, which has a stationary distribution on possible traffic states. We then develop a quantitative method for evaluating the stationary distribution of the traffic states by using a MCMC (Markov chain Monte Carlo) approach. Finally, we apply the proposed method to a small size network and show that the proposed method can obtain the stationary distribution efficiently.

1. 緒言

近年交通混雑の頻発，大規模な自然災害の発生により，交通サービスの信頼性の重要さが再認識されている．特に混雑を減らすための交通政策の検討や，定時性の高い交通サービスの提供には，定量的分析結果に基づいた，交通ネットワークの時間信頼性の評価が重要である．自動車交通においては，各道路の交通量や所要時間などのネットワーク状態の定量的分析に基づき，道路ネットワークの信頼性を評価することが重要である．

分析のアプローチには，道路上の観測器から得られた交通データによる帰納的アプローチと，道路利用者の行動モデルによる演繹的アプローチがある．近年，中山ら [7] のように，前者のアプローチによるネットワーク状態の定量的分析が数多く行われている．それに対して後者のアプローチによる定量的分析を行った研究は少ない．しかし，交通政策や交通サービスを導入，評価する際，社会実験により十分なデータを入手することは容易でなく，モデルによる分析が必要となる．

モデルによる道路ネットワーク分析の研究において，Sandholm [2] [3] や Hofbauer [1] は，利用者行動とネットワーク状態の変動を進化ゲーム理論により説明している．Sandholm [3] は，個々の道路利用者の経路選択行動を，天候や事故，個々人の認知誤差により攪乱をうけた旅行時間に基づく最適反応し，その結果ネットワーク状態の Day-to-Day dynamics に確率的バラツキが生じることを示した．さらにそのバラツキはある条件のもとで定常分布に収束し，その分布を数式で定義できることを示した．しかし，この研究は実規模のネットワークに対する定量的分析を指向していない．

Wei et al. [4] [5] はネットワーク状態の確率的バラツキをベイズの定理における事後確率分布と定義し，その分布をマルコフ連鎖モンテカルロ法により定量的に推計する手法を開発した．しかしこのモデルは，個々の利用者の行動とネットワーク状態の day-to-day dynamics との関係性を明確にしていない．

連絡先: 尻高 佑樹
東北大学工学研究科技術社会システム専攻 長江研究室
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-11-816
Tel,fax:022-795-6987, yuki.shittaka.p5@dc.tohoku.ac.jp

そこで本研究では，Sandholm [3] のモデルに対して，Wei et al. [4] が示した分析手法を用いることで，利用者行動に基づいた，ネットワーク状態の day-to-day dynamics を定量的に分析する手法を提案することを目的とする．

2. ネットワーク状態の確率的進化モデルと定常分布

Sandholm [3] は，進化ゲーム理論の枠組みの下で，ネットワーク状態の day-to-day ダイナミクスを記述したモデルを定式化した．このモデルは，atomic(不可分) な道路利用者を想定しており，個々の利用者の perturbed best response(PBR) と，それに伴う交通配分パターンの確率的ダイナミクスで構成される．以下では，まず 2.1 節でモデルの枠組みを示す．2.2 節では各利用者が PBR によってどのように経路を変更するかを示す．2.3 節では交通配分パターンの確率的ダイナミクスを示す．2.4 節では確率的ダイナミクスの定常分布を示す．

2.1 モデルの枠組み

現実の交通網を抽象化した道路ネットワークとして，ノード集合 N，リンク集合 A からなる有向グラフ $G(N, A)$ を考える．リンクは道路区間，ノードは交差点などの道路区間の連結点をあらわす．ネットワーク上に 1 つの移動の起終点ペア $(o, d) \in N \times N (o \neq d)$ を考え，その間の経路の集合を K とする．

経路 $k \in K$ の交通量を x_k とし，そのベクトルを $\boldsymbol{x} = \{x_k\}$ とする．$\boldsymbol{x}$ を交通配分パターンとよぶ．交通配分パターンの許容領域を $\Omega = \{\boldsymbol{x} : \sum_k x_k = N\}$($x_k$ は自然数) とする．このとき，リンク $a \in A$ の交通量は式 (1) であらわされる．ここで $\delta_{a,k}$ はリンク a が経路 k に含まれるとき 1，そうでないとき 0 となるリンク経路接続係数である．

$$u_a(\boldsymbol{x}) = \sum_{k \in K} x_k \delta_{a,k} \tag{1}$$

リンク交通量のベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．

リンク a を通過する際の所要時間を t_a とし，そのベクトルを $\boldsymbol{t}$ とする．t_a はそのリンクの交通量 u_a の単調増加関数 $t_a(u_a)$

であらわされるとする．経路 k を利用する際の旅行時間を c_k とし，そのベクトルを $\boldsymbol{c} = \{c_k\}$ とする．旅行時間は式 (2) に示すように，利用する経路に含まれるリンクの所要時間の和であらわされる．

$$c_k = \sum_{a \in k} t_a(u_a)\delta_{a,k} \tag{2}$$

適当な離散時点集合 T を考え，時刻 $t \in T$ における交通配分パターンを $\boldsymbol{x}^t$ とする．交通配分パターン $\boldsymbol{x}$ の day-to-day ダイナミクスは以下のようにあらわされる．

0 初期交通配分パターン $\boldsymbol{x}^0$ が与えられる．

1 時刻 t 各リンクの交通量 $\boldsymbol{u}^t$ が更新される．

2 各リンクの所要時間 $\boldsymbol{t}^t$ が更新される．

3 各経路の旅行時間 $\boldsymbol{c}^t$ が更新される．

4 高々ひとりの利用者が旅行時間をもとに経路変更する．

5 交通配分パターンが $\boldsymbol{x}^{t+1}$ に更新される．

6 時点が $t+1$ に進み，1 に戻る．

これは進化ゲーム理論において確率的進化過程とよばれるダイナミクスである．

2.2 Perturbed best response と経路選択確率

利用者は perturbed best response(PBR) に従い経路を変更するとする．以下に本モデルにおける PBR の詳細を示す．

まず，それぞれの利用者は確率的にアラームを鳴らす時計 (Poisson alarm clock : PAC) をもっているとする．各利用者のアラームが鳴る時刻は互いに独立な，パラメータ R の指数分布に従うとする．PAC は利用者に経路変更をする機会がめぐってきたことを知らせる．時点 t には高々ひとりの利用者の PAC しか鳴らないものとする．

経路変更機会を得た利用者は，外的要因により攪乱を受けた後の旅行時間が, 最短となる経路に利用経路を変更するとする．そのため各経路の旅行時間は確定項と確率項の和で表される。このうち確定項は、当該経路の旅行時間であり，式 (2) であらわされる． 一方，確率項は、それぞれの利用者が経路を決定する直前，天候や事故，個々人の認知誤差などの外的要因によって決められるものとする。ここで，個々の利用者は旅行時間が最短となる経路を確定的に選択するにも関わらず，その旅行時間が (当該利用者が意思決定を行う前に) 攪乱されるため，あたかも確率的に経路を選択しているように見える点に注目されたい．

経路 i の利用者のひとりが，経路を $j(j \neq i)$ に変更する確率は，変更先の経路 j の旅行時間 c_j の関数として式 (3) であらわされるとする．このとき c_j は経路 i の利用者が経路を j に変更した後の交通量から計算する．

$$\rho_{i,j} \propto \exp(-\alpha c_j(x_j + 1)) \tag{3}$$

式 (3) は旅行時間の短い経路ほど選択される確率が大きいことをあらわす．また，α は旅行時間の確率項の分散に依存するパラメータであり，経路選択のバラツキをあらわす．$\alpha = 0$ の場合，利用者は旅行時間の確定項が最短となる経路を確率 1 で選択し，$\alpha = \infty$ の場合，利用者は全ての経路は等しい確率で選択する．

時点 t から $t+1$ までの間に，経路 i の利用者が経路を j に変更する確率は，PAC のパラメータ R と条件付経路選択確率 $\rho_{i,j}$ から $\rho_{i,j}/R$ とあらわされる．経路 i の利用者が誰も経路を変更しない確率は $1 - \sum_{j \neq i} \rho_{i,j}/R$ である．

2.3 交通配分パターンの確率的ダイナミクス

交通配分パターンの確率的ダイナミクスはマルコフ連鎖であらわされる．マルコフ連鎖とは，次の状態が現在の状態のみに依存し推移する確率過程のことである．

ある交通配分パターン $\boldsymbol{x}$ に対して，経路 i の利用者のひとりが経路を j に変更した後のパターンを $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i$ であらわす．ここで $\boldsymbol{e}_i$ は k 次元の列ベクトルであり，その i 番目要素が 1，他の要素が 0 となるような標準基底ベクトルである．

時刻 t において交通配分パターン $\boldsymbol{x}$ であるとき，ひとりの利用者の経路変更によって時刻 $t+1$ で交通配分パターン $\boldsymbol{y}$ に遷移する確率 $P_{x,y}$ を考える．利用者の総数が N のとき，時点 t から $t+1$ の間に誰かの PAC が鳴る確率は N/R である．また，各利用者の PAC は独立であるため，経路 i の利用者が経路変更機会を得る確率は x_i/N である．よって，ある時刻間に経路 i の利用者が経路 j に変更する確率は

$$\frac{N}{R}\frac{x_i}{N}\rho_{i,j} = \frac{x_i \rho_{i,j}}{R}$$

となる．よって交通配分パターンの遷移確率は式 (4) であらわされる．

$$P_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \begin{cases} \frac{x_i \rho_{i,j}}{R} & \text{if } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i), j \neq i \\ 1 - \sum_{i \in K} \sum_{j \neq i} \frac{x_i \rho_{i,j}}{R} & \text{if } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

時点 t において交通配分 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ が実現される確率を μ_x^t であらわし，そのベクトルを $\boldsymbol{\mu}^t = \mu_{\boldsymbol{x}}^t : \boldsymbol{x} \in \Omega$ とあらわす．このとき $\boldsymbol{\mu}$ のダイナミクスは式 (5) のようにあらわせる．

$$\boldsymbol{\mu}^{t+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\mu}^t \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{P}$ は $|\Omega| \times |\Omega|$ の正方行列で，その (n, m) 要素は，m 番目の交通配分パターン $\boldsymbol{x}$ が，n 番目の交通配分パターン $\boldsymbol{y}$ に遷移する確率 $P_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ である．

2.4 交通配分パターンの定常分布

式 (5) であらわされる分布 $\boldsymbol{\mu}$ のダイナミクスは一般に定常分布

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\mu}^*$$

なる $\boldsymbol{\mu}^*$ をもつことが知られている．Sandholm [3] は，その分布が式 (6) であらわされることを明かにした．$\mu_{\boldsymbol{x}}$ は，ある交通配分パターン $\boldsymbol{x}$ が生起する確率をあらわしている．この式から各経路の交通量の確率分布を導くことができる．その分布から，各経路に日々発生する交通量の期待値や分散を求めることができる．

$$\mu_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{Z}\frac{N!}{\prod_{k \in K} x_k!}\exp(-\alpha f(\boldsymbol{x})) \tag{6}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{u_a(\boldsymbol{x})} t_a(z)dz$$

ここで，リンクの所要時間が交通量に対して単調増加であり，他のリンクの交通量の影響を受けないとするとき，式 (6) から計算される各経路の交通量の期待値は確率的利用者均衡状態 (Stochastic User Equilibrium: SUE) [8] [9] における経路交通量に一致することがわかっている．確率的利用者均衡モデルは，交通工学の分野でよく知られている定量的モデルのひとつである．このことから，本モデルは，交通工学において一般

的な，均衡状態を計算でき，かつ従来のモデルでは扱えなかった分散などの確率的特性を分析できるモデルであるといえる．

式 (6) はすべての交通配分パターンについて計算することで確率を正規化できるが，対象とするネットワークの複雑化，利用者の増大とともに交通配分パターンは急激に増大し，すべてのパターンを数えあげて計算することが困難になる．そこで次章では，すべてのパターンを数えあげることなしに，サンプリングにより確率分布を推定する手法を説明する．

3. 推定手法

3.1 マルコフ連鎖モンテカルロ法

マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov chain Monte Carlo : MCMC) はマルコフ連鎖を用いて，未知の確率分布をサンプリングにより推定する一群の手法の総称である．推定したい確率分布を定常分布にもつようなマルコフ連鎖を構成し，推移を繰り返すことでで，未知の確率分布に従うサンプルを生成することができる．

この手法の利点は，正規化定数を計算しなくてもよいことである．マルコフ連鎖が定常分布に収束する必要十分条件を式 (7) に示す．θ は条件つき確率である．式 (7) はある状態から別のある状態に遷移する確率と，その逆に遷移する確率が等しいという条件を表している．この条件は詳細釣り合い条件と呼ばれる [6] [10].

$$\mu_{\boldsymbol{x}^{t-1}}\theta(\boldsymbol{x}^*|\boldsymbol{x}^{t-1}) = \mu_{\boldsymbol{x}^*}\theta(\boldsymbol{x}^{t-1}|\boldsymbol{x}^*) \tag{7}$$

Wei at el.[4] は交通配分パターンの確率分布を事後確率分布として定義した，さらに MCMC のアルゴリズムとして Metropolis-Hastings(M-H) を採用し，交通配分パターンのサンプルを各経路ごとに集計し，経路交通量の確率分布とその期待値や分散を推定する手法を開発した．

本研究では M-H アルゴリズムを用いて式 (6) から，各経路の交通量や旅行時間の確率的特性を推定する．

3.2 Metropolis-Hastings アルゴリズム

M-H アルゴリズムは，既知の確率分布 (提案分布) からサンプルの候補を生成し，詳細釣り合い条件が満たされるように候補を受容，棄却するステップを繰り返すことで，間接的に未知の確率分布からのサンプル列を生成する手法である．

以下に本研究における M-H アルゴリズムを示す．

0 : 交通配分パターンの初期値を $\boldsymbol{x}^0$ を与え，$t = 1$ とする．

1 : $\boldsymbol{x}^{t-1}$ をもとに提案分布 θ から候補交通配分パターン $\boldsymbol{x}^*$ を生成する．

2 : 候補への遷移確率 r を計算する．

3 : $\boldsymbol{x}^*$ を $\min(r, 1)$ で $\boldsymbol{x}^t$ とする．そうでなければ $\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{x}^{t-1}$ とする．

4 : $t < T$ ならば $t = t + 1$ とし，1 にもどる．

5 : $t = T$ でサンプル列 $(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^t, \cdots, \boldsymbol{x}^T)$ を得る．

上記のアルゴリズムによって形成されるマルコフ連鎖の遷移確率を式 (8) に示す．遷移確率は詳細釣り合い条件の両辺の比である．

本手法では提案分布に，Wei et al. [4] が用いた，式 (9) に示す多項分布を用いた．候補サンプルを生成する際，多項分布のパラメータには直前のサンプルの交通配分パターンが代入される．このため，直前のパターンに近いパターンが候補として生成されやすく，期待値近傍で密なサンプル列を生成することができる *1.

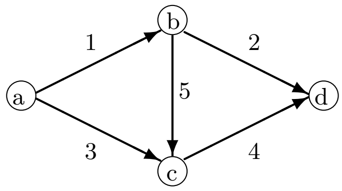

図 1: 対象とするネットワーク

表 1: 自由走行時間とリンク容量

リンク	1	2	3	4	5
t_{a0}	1	2	2	1	1
C_a	80	90	90	80	100

$$r = \frac{\mu_{\boldsymbol{x}^*}\theta(\boldsymbol{x}^{t-1}|\boldsymbol{x}^*)}{\mu_{\boldsymbol{x}^{t-1}}\theta(\boldsymbol{x}^*|\boldsymbol{x}^{t-1})} \tag{8}$$

$$\theta(\acute{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}) = \frac{N!}{\prod_{k\in K}\acute{x}_k}\prod_{k\in K}(x_k/N)^{\acute{x}_k} \tag{9}$$

4. 結果と考察

4.1 対象ネットワーク

式 (6) の定常分布を M-H 法により推定する．今回対象とするネットワークを図 1 に示す．経路 1 はリンク 1 → 2 から，経路 2 はリンク 3 → 4 から，経路 3 はリンク 1 → 5 → 4 から，それぞれ成る．交通需要は起点 a から終点 d まで 150 台である．リンクコスト関数として BPR(US Bureau of Public Road) 関数 [8] を用いた．BPR 関数を式 (9) に，それぞれのリンクの自由走行時間とリンク容量を表 1 に示す．

$$c_a = t_{a0}[1 + 2.62(u_a/C_a)^5] \tag{10}$$

t_{a0}: リンク a の自由走行時間
C_a: リンク a の容量

4.2 推定結果と考察

今回の計算では，パラメータ α は 0.35 とした．遷移回数を 30,000 回，そのうち最初の 300 個のサンプルは初期条件の影響を受けているとして破棄した．それぞれの経路に対し，29,700 個の交通量のサンプルを生成した．

今回の計算では簡単なネットワークを対象としたため，全交通配分パターンについて式 (6) から生起確率の理論値を容易に計算できる．経路 1 の交通量について，理論上の分布と推

*1 Wei et al. [4] は $\mu_{\boldsymbol{x}}$ として

$$\mu_{\boldsymbol{x}} \propto \frac{N!}{\prod_{k\in K}x_k!}\prod_{k\in K}p(k|\boldsymbol{x})^{x_k}$$

$$p(k|\boldsymbol{x}) = \frac{\exp(-\alpha c_k)}{\sum_{\acute{k}\in K}\exp(-\alpha c_{\acute{k}})}$$

なる式を採用している．しかし，この式は 2 章で述べたような個々の PBR や day-to-day ダイナミクスのような，行動モデル的根拠をもたない．

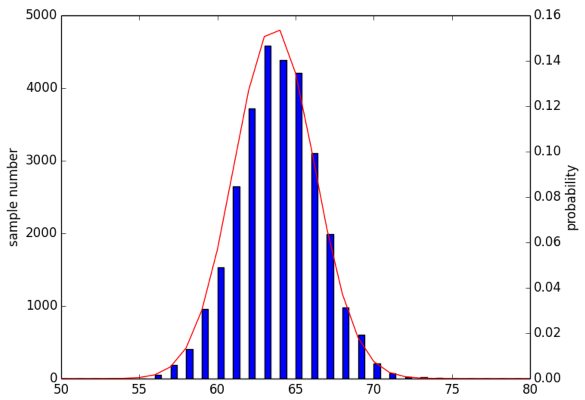

図 2: 経路 1 交通量の確率分布の比較

表 2: 各経路交通量の期待値と分散の比較

	理論値		推定値	
	期待値	分散	期待値	分散
経路 1	63.65	6.60	63.67	6.45
経路 2	63.65	6.60	63.65	6.56
経路 3	22.69	9.64	22.67	9.58

定した分布の 2 つの分布を比較したグラフを図 3 に示す．棒グラフがサンプルによるヒストグラム，折れ線グラフが理論値である．

また，各経路交通量の期待値と分散について，生起確率から計算される理論値と，サンプルから計算される推定値を比較したものを表 2 に示す．

図 2 と表 2 から M-H アルゴリズムで期待値と分散の理論値を推定できていることがわかる．

旅行時間についても同様にサンプリング可能である．各経路旅行時間の期待値と分散，95 パーセンタイル値をの推定値を表 3 に示す．旅行時間のパーセンタイル値は，時間信頼性を評価する上で重要な指標である．特に 95 パーセンタイル値はプランニングタイム (planning time: PT) とよばれ，米国交通省道路局 (Federal Highway Administration: FMWA, Department of Transportation) によって，旅行時間の信頼性を測定する指標として設定している．また，95 パーセンタイル値から平均値を引いた値はバッファータイム (buffer time: BT) とよばれ，同様に重要な指標として設定されている [7]．

また，各リンク交通量や所要時間についても，同様の手法で分析可能である．

5. 結言

本研究では進化ゲーム理論に基づき定義された交通配分パターンの定常分布を，MCMC により定量的に分析する手法を提案した．本手法の特徴は，個々の道路利用者の行動をシミュレーションすることなしに，経路交通量や旅行時間などのネットワーク状態の確率的特性，特に分散やパーセンタイル値などを定量的に分析できることである．個々の利用者の行動をシミュレーションすることによる期待値や分散の推定は計算量が膨大であるため，シミュレーションと比較して本手法は効率的であると考えられる．

本研究で MCMC として用いた Metropolis-Hastings アルゴリズムは，マルコフ状態の次元の増大に従い，収束速度が著しく低下することがわかっている．今後，大規模なネットワークを対象とするためには，より効率的な推定手法を用いる必要があると考えられる．

表 3: 各経路旅行時間の期待値と分散，パーセンタイル値

	期待値	分散	95% タイル値
経路 1	7.81	0.43	8.94
経路 2	7.81	0.43	8.94
経路 3	10.73	0.49	11.95

参考文献

[1] Josef Hofbauer and William H. Sandholm. Evolution in games with randomly disturbed payoffs. *Journal of Economic Theory*, Vol. 132, No. 1, pp. 47–69, January 2007.

[2] William H. Sandholm. Potential Games with Continuous Player Sets. *Journal of Economic Theory*, Vol. 97, pp. 81–108, 2001.

[3] William H Sandholm. *Population Games and Evolutionary Dynamics*. 2009.

[4] Chong Wei, Yasuo Asakura, and Takamasa Iryo. The posterior probability distribution of traffic flow: a new scheme for the assignment of stochastic traffic flow. *Transportmetrica*, No. September 2014, pp. 1–19, 2012.

[5] Chong Wei, Yasuo Asakura, and Takamasa Iryo. Formulating the within-day dynamic stochastic traffic assignment problem from a Bayesian perspective. *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 59, pp. 45–57, 2014.

[6] 伊庭幸人, 種村正美, 大森裕浩, 和合肇, 佐藤整尚, 高橋明彦. 計算統計学 III: マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺統計科学のフロンティア 12. 岩波書店, 2005.

[7] 中山晶一郎, 朝倉康夫. 道路交通の信頼性評価. 2014.

[8] 土木学会. 交通ネットワークの均衡分析. 丸善 (株), 1998.

[9] 土木学会. 道路交通需要予測の理論と適用. 丸善 (株), 2003.

[10] 豊田秀樹. マルコフ連鎖モンテカルロ法 統計ライブラリー. 朝倉書店, 2008.