

# 算数文章題を対象とした問題構造組み立て演習の実現

## Building Exercise of Arithmetic Structure of Concepts in Solving of Arithmetical Word Problems

古久保和仁<sup>\*1</sup> 小田拳太<sup>\*1</sup> 室津光貴<sup>\*1</sup> 山元翔<sup>\*1</sup>前田一誠<sup>\*2</sup> 林雄介<sup>\*1</sup> 平嶋宗<sup>\*1</sup>Kazuhiro Furukubo Kenta Oda Mitsutaka Murotsu Sho Yamamoto  
Kazushige Maeda Yusuke Hayashi Tsukasa Hirashima<sup>\*1</sup> 広島大学大学院工学研究科<sup>\*2</sup> 広島大学附属小学校

Graduate School of Engineering Hiroshima University

Hiroshima University Attached Elementary School

Triangle block has been proposed as a framework to express arithmetic structure among concepts in an arithmetical word problem visually and operatably. Understanding of the arithmetic structure of concepts is indispensable to solve not only the arithmetical word problems but also all kinds of word problems that can be solved by using mathematical equations. The purpose of this study is to introduce the triangle block for learners in an elementary school. Because the triangle block connect statements composing a problem and numerical expression to solve the problem, it is important to let understand not only the relationship between the statement and the arithmetic triangle block but also the arithmetic triangle block and the expression. We developed the learning support system to make learners exercise these activities in several stages. We also used the system in 4<sup>th</sup> grade students in an elementary school. As the results of pre-test, post-test and logs of use of the system, we have confirmed the learning effect of the exercise.

### 1. はじめに

算数文章題の問題解決は、問題理解過程と問題解決過程の二つの過程を通して行われ、さらに問題理解過程は変換過程と統合過程、問題解決過程はプラン化過程と実行過程の下位過程にそれぞれ分けられる。変換過程において、問題文一文ごとの意味を理解し、統合過程で一文ごとの理解をひとつのまとまった理解にする。その後プラン化過程で立式を行い、実行過程で計算し、答えを求める[多鹿 95]。この中で統合過程が最も重要で難しいとされている。

この統合過程は、言語的な統合として捉えられる場合が多いが、言語的に統合するだけで、数量関係は導かれず、数量関係が導かれなければ、プランを立てることはできない。したがって、言語的に統合するだけでなく、数量関係を導くことができるような統合が必要であると共に、従来のモデル化においてはこの数量関係を導くための統合のモデル化が不足していたといえる。ここでは、問題文を読んで言語的に意味が分かることを言語的統合とし、また、数量関係が導かれて、その数量関係に対して解を導くためのプラン化が可能な状態を数量関係的統合ができた状態と考える。すると、残っているのは、言語的統合と数量関係的統合の間をつなぐこととなる。本研究では、言語的表現を構成する「数量を表す概念」間の算術的演算関係を見つけて、統合することがこの過程に相当すると考え、この過程を、「概念間の数量関係的統合過程」と呼び(以下では単に数量関係的統合と呼ぶ)、この過程の可視化と操作可能化を研究目的とする。

言語的統合に関しては、問題文という具体的な表現が存在しているが、数量関係的な統合を表すための具体的な表現はこれまでのところ存在していない。「言葉の式」[中川 10]は、この数量関係的統合を表現するための一つの試みであると思われるが、事例的な試みがあるに過ぎず、定式化されたものとはいえない。

連絡先: 古久保 和仁, 広島大学大学院工学研究科 学習工学研究室, 東広島市鏡山一丁目4番1号, (082) 424-7505, furukubo@lel.hiroshima-u.ac.jp

算数三角ブロックは、この数量間的統合を表現するための具体的で定式化された表現方式である。1回の四則演算で構成される算数の文章題(単位問題)を三つの単文で表現する三文構成モデル[林 13]に基づき、単位問題を三つの単文をそれぞれ頂点に持つ三角形で表現し、さらに、複数の演算で構成される複合問題の数量関係的統合を、三角形の頂点(つまり単文)での連結として表現することができる。

この算数三角ブロックを用いて、複合算数文章題の外化支援システムが既に開発されており、小学校 6 年生に利用してもらう実験が行われている。演習ログの分析とアンケートの結果から、この算数三角ブロックを用いた構造記述の妥当性が示されている[尾土井 13]。

本研究では、複合算数文章題の学習を始める 4 年生において、算数三角ブロックの導入を試みる。算数三角ブロックは問題文と式をつなぐものである。つまり、算数三角ブロックを用いた構造表現を理解させるためには、問題文と算数三角ブロックの関係、算数三角ブロックと式の関係をも理解させることが必要であると考えられる。これらを理解させるためにはいくつかの段階が必要である。段階的に演習を行うことで、構造的な理解を促す演習を実装した学習支援システム的设计・開発を行った。また、開発した学習支援システムを小学校授業に導入した。対象学年は小学 4 年生で、授業は 2 クラスで行った。1 時限 45 分で、1 組は計 7 回、2 組計 9 回行った。授業内で開発したシステムを利用してもらい、演習が実現可能であることを確認した。同時に、授業導入前後に構造定着を確認するテストを行い、結果分析により、本システムの学習効果の検証を行った。

### 2. 算数文章題の構造表現

#### 2.1 複合算数文章題

算数文章題の基本構造として、三文構成モデル[林 13]が提案されている。この三文構成モデルとは、1 回の二項演算で解ける問題(単位問題)の問題文は三つの単文で構成されるというものである。単文として、ある量の存在を表す存在文と他の量と

の関係を表す関係文の2種類が存在し、問題文は2つの存在文と1つの関係文で構成される。

ここで、複数の二項演算で解ける問題(複合問題)の問題文について考える。複合問題は、単位問題が組み合わせられてできていると考えられる。例えば、「はじめに500円持っています。鉛筆1本の値段は50円です。鉛筆を5本買います。残ったお金は何円ですか?」という問題があったとき、この問題は(A)「鉛筆1本の値段は50円です。鉛筆を5本買います。鉛筆5本の値段は何円ですか?」という問題と、(B)「はじめに500円持っています。鉛筆5本を買います。残ったお金は何円ですか?」という問題の二つで構成されていると考えられる。ここで、(A)内の「鉛筆5本の値段は何円ですか?」の結果から(B)内の「鉛筆5本を買います。」の鉛筆5本の値段が導かれている。つまり、鉛筆5本の値段により、単位問題(A)と(B)が接続されていると考えられる。このように、算数文章題の最小単位は三文構成モデルであり、複合問題は単位問題の組み合わせであることが分かる。

算数文章題のこのような構造を表すために数量関係の統合過程を表現するモデルである、算数三角ブロックを用いる。

## 2.2 算数三角ブロック

単位算数文章題の構造を、それを構成する三つの単文を頂点に持つ三角形として表現するのが、算数三角ブロック(以下、単に三角ブロック)である。一つの三角ブロックは和差乗除いずれかの演算子を底辺に持っており、底辺の両端の数量とその演算によって、底辺の対頂点にある数量が導かれる(図1)。また、一つの三角ブロックはその底辺をどの辺にするかによって、単文間の数量関係を保ったまま、三つの形で表現できる。図2は、図1では斜辺であった「鉛筆の代金」と「本数」の関係を底辺とした三角ブロックとなっている。

また前述のとおり、算数文章題は単位問題と複合問題が存在し、複合問題は単位問題が複数組み合わせられたものと考えられることができる。この組み合わせを表現するために、複数の二項演算を、三角ブロック同士を階層的につなぐことで表現する(図3)。二つの三角ブロックをつなぐ概念を中間概念と呼ぶ。この中間概念は複合問題の問題文中には直接でてこない概念であり、複合問題において重要であると考えられる。以上のように複合問題の構造の記述が可能になっている。

## 2.3 特徴的な構造記述

三角ブロックを用いた構造記述には三つの特徴的な構造記述が存在している。(i)物語形、(ii)求答形、(iii)積和標準形の三つである。物語形は、問題文の流れに則って組み立てられた形であり、求答形は答えを得るための計算手順に則って組み立てられた形である。また、積和標準形は+と×のみの演算関係で表現された形であり、標準化された形である。

この三角ブロックを用いた構造表現が妥当であることが実験を通して検証されている。問題文に対して、三角ブロックを構築させる学習支援システムを、既に算数文章題に対して深い理解をしていると思われる小学校6年生に利用してもらった。演習ログによって、この三つの構造記述が主に出てくることを確認した上、アンケートにより構造作成に違和感のないことを確認した。



図1:算数三角ブロック



図2:別の形の算数三角ブロック

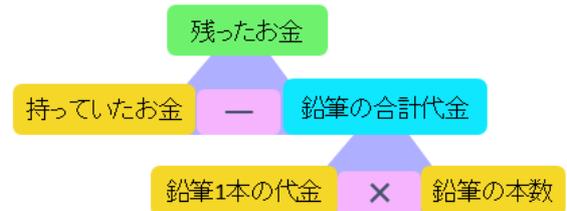


図3:階層的に表現

## 3. 算数文章題の構造的理解

2章で述べたとおり、算数文章題の問題構造は三角ブロックを用いて表現でき、この表現が妥当なものであることが確認されている。

算数文章題を構造的に理解させるためには、三角ブロックを用いた構造表現を理解させることが有用ではないかと考えられる。ただし、算数文章題は問題文と式を持っており、三角ブロックはそれらをつなぐものである。そこで、三角ブロックを用いた構造記述だけでなく、問題文と三角ブロックの関係、式と三角ブロックの関係も理解させる必要があると考えられる。そこで、これらを段階的に理解できる学習支援システム的设计・開発を行った。本システムは学習者の解答を自動で診断し、フィードバックを返すことで、学習者が効率よく演習を進めていくことが可能になっている。

### 3.1 三角ブロックを用いた構造記述の理解

算数文章題は一回の二項演算で解ける単位問題と、複数回の二項演算で解ける複合問題の二つに分けることができる。複合問題は一つの二項演算を最小単位とし、それを複数組み合わせることで成ると考えられる。この構造を理解させるためには、まず、単一の三角ブロック(単位三角ブロック)を理解させ、次に単位三角ブロックを組み合わせることで複数回の二項演算で解けるようになることを理解させることが必要であると考えられる。

### 3.2 単位三角ブロックの理解

そこで、まず単位三角ブロックを理解させるために、問題文や式から三角ブロックを構築させる演習が必要であると考えた。この演習では、三角ブロックの各頂点に当てはまる数量概念は与えており、学習者はそれらを各頂点のどこに当てはめるのかを考える(図4)。この演習を通して、単位三角ブロックについて理解できると考えられる。

次の段階として、単位三角ブロックが各頂点間の数量概念の数量関係を維持したまま他の形に変えることができることを理解させるために、単位三角ブロックと同じ意味の単位三角ブロックを選択させる演習を実装した。

これらの演習を通して、単位三角ブロックの理解と、単位問題の問題文と三角ブロックと式の関係を理解させることができると考えられる。

### 3.3 三角ブロックの組み合わせの理解

単位三角ブロックを理解した後、複合問題の問題構造は単位三角ブロックを複数つなげることで表現されることを理解させる必要があると考える。そこで、複数個の単位三角ブロックを与え、問題文に合うように単位三角ブロック同士をつなぐ演習を実装した(図5)。ただ単に同じ概念をつなぐのではなく、ダミーを用意することで問題に合う三角ブロック同士をつなぐ演習になっている。

### 3.4 問題文と三角ブロックの関係

次に、複合問題における問題文と三角ブロックの関係を理解させる。この関係を理解させるために、問題文から三角ブロックを選択する演習と三角ブロックから問題文を選択する演習を実装した。2章で述べた通り、三角ブロックを用いた構造記述には複数のパターンが存在しているため、三角ブロックを選択する演習に関しては複数の正解があるパターンも実装している。

### 3.5 式と三角ブロックの関係

最後に複合問題における三角ブロックと式の関係を理解させる。この関係を理解させるために、三角ブロックから式を選択させる演習を実装した。

実践手順としては、事前テスト、授業利用、事後テストである。授業は1時限45分を1組は計7回。2組は計9回行った。

## 4.1 事前・事後テスト

事前・事後テストとして、学習者の構造理解を測る、プライミングテストを行った。このプライミングテストにおいて、システムは問題文を一定時間おきに一文ずつ与える。また、最後の文を与えた時、問題文に合う式の選択肢を与える。学習者は与えられた文章から次にどのような文章が与えられるかを考えながら、次の文章が提示されるのを待つ。また、式の選択肢が与えられたとき、正しいと思う式を選択する。このテストでは、式の選択肢において正しい式を提示しない場合もあり、学習者は正しい式がないと判断した場合は「答えがない」を選択する。問題の構造を理解している学習者は一部の文が与えられたときに、次の文を構造に基づいて予測することができるため、正答率と回答時間でよい成績が出せることが期待できる。

また、プライミングテストとして、出題する問題は通常問題10問と情報過剰問題10問の計20問である。通常問題は、教科書通りの問題であるが、情報過剰問題は教科書に準拠しつつ、答えを導くのに不必要な数量を表す文を一つ追加したものである。通常問題は与えられた数量をすべて使う課題となっているが、情報過剰問題は、どの数量を利用するかについても判断が必要となる問題であり、問題を構造的に捉えることの有用性が高い問題となっている。

## 4.2 結果

1組と2組の学習者をまとめ、事前・事後テストの結果の分析を行った。分析対象のデータは正答率と回答時間の2つである。この分析では通常問題 10 問、情報過剰問題 10 問をそれぞれに着目して分析を行っている。また、事前テストの正答率の平均から上位群と下位群に分け、同様に分析を行った。全体の学習者の正答率のデータを図6、回答時間のデータを図7、上位群と下位群の正答率のデータを図8、上位群と下位群の回答時間のデータを図9に示す。

まず、学習者全体としての結果を述べる。通常問題の正答率 ( $p=2.909e-07$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) は向上し、効果量中 ( $|r|=0.41$ ) であった。また回答時間 ( $p=4.231e-09$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) も向上し、効果量中 ( $|r|=0.48$ ) であった。また、情報過剰問題の正答率 ( $p=3.278e-05$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) も向上し、効果量中 ( $|r|=0.34$ ) であった。回答時間 ( $p=7.768e-08$ , 2標本 t 検定) も向上し、効果量大 ( $|r|=0.55$ ) であった。

また、正答率に対して上位群と下位群にわけて分析した結果を述べる。通常問題における上位群の正答率 ( $p=0.8563$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) は有意差がなかった。また、下位群の正答率 ( $p=1.924e-10$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) は向上し、効果量大 ( $|r|=0.65$ ) であった。情報過剰問題における上位群の正答率 ( $p=0.0678$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) は有意差がなかったが、有意傾向がみられた。下位群の正答率 ( $p=6.843e-05$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) は向上し、効果量中 ( $|r|=0.40$ ) であった。なお、この検定は多重比較にあたるが、ボンフェローニ調整を行っても、検定結果は変わらない。

また、回答時間に対して上位群と下位群にわけて分析した結果を述べる。通常問題における上位群の回答時間 ( $p=0.0009$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) は向上し、効果量中 ( $|r|=0.45$ ) であった。また下位群の回答時間 ( $p=2.424e-07$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定) も向上し、効果量大 ( $|r|=0.52$ ) で

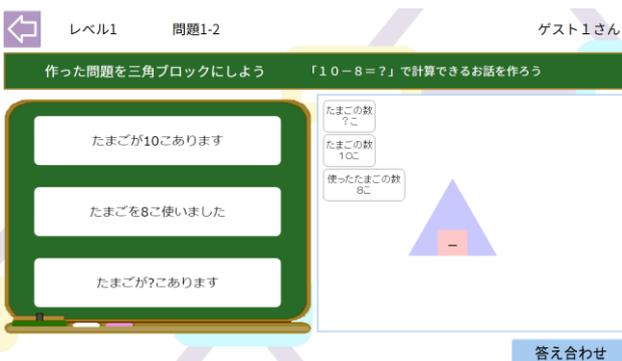


図4: 三角ブロックの構築

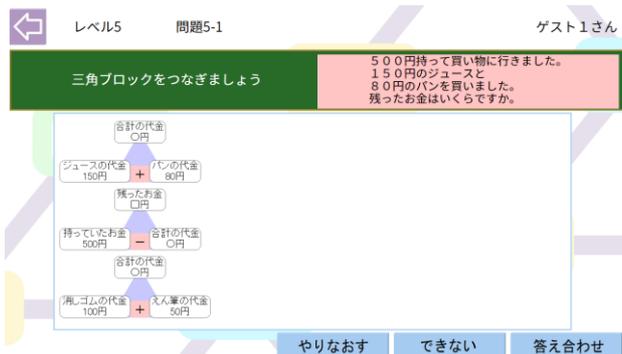


図5: 三角ブロック同士をつなぐ

## 4. 小学校実践

複数回の二項演算で解ける算数文章題を学習する小学4年生を対象に小学校実践を行った。広島大学附属小学校4年生2クラスの授業に本システムを導入し、利用してもらった。対象者は、1組37名、2組38名の計75名であった。

あった。情報過剰問題における上位群の回答時間( $p=.0678$ , ウィルコクソンの符号付き順位和検定)は有意差がなかったが、有意傾向があった。下位群の回答時間( $p=1.789e-05$ , 2標本 t 検定)は向上し、効果量大( $|r|=.55$ )であった。この検定についても多重比較にあたるが、ボンフェローニ調整を行っても、検定結果は変わらない。

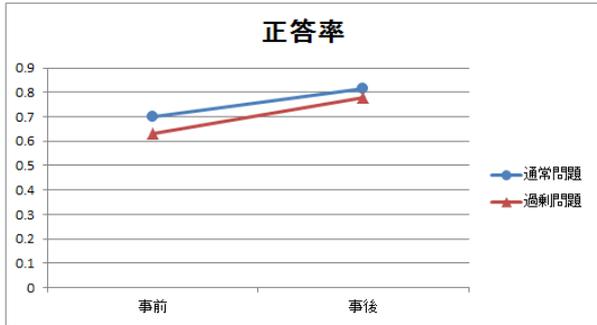


図6: 学習者全体の正答率

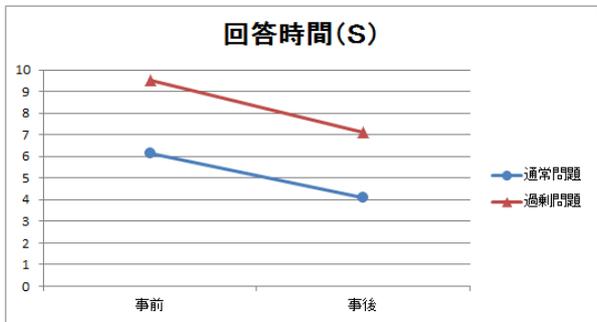


図7: 学習者全体の回答時間

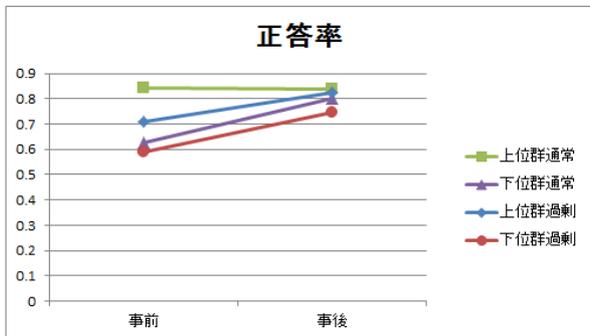


図8: 上位群, 下位群の正答率

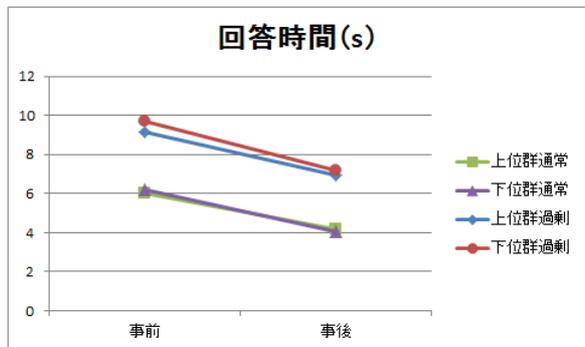


図9: 上位群, 下位群の回答時間

### 4.3 考察

学習者全体として、通常問題、情報過剰問題ともに正答率と回答時間の向上がみられた。このことから、演習を通して、より

正確に回答すること、かつ予測が可能になったといえ、構造の定着があったと考えられる。

正答率において、通常問題、情報過剰問題ともに上位群においては有意な向上はみられなかった。上位群は元々正答率が高かったため、大きな変化がみられなかったと考えられる。また、下位群においては、通常問題、情報過剰問題ともに向上がみられた。下位群において、より正確に回答できるようになっていることから、構造の定着に効果があったといえる。

また回答時間において、上位群においては通常問題に向上がみられた。また、下位群においてはどちらの問題も大きく向上しているといえる。特に下位群に構造の定着がみられたと考えられる。

以上から、本システムを用いた演習によって、構造の定着が見込めることが確認できた。予めかなりの理解があった上位群に関しても向上がみられる部分があり、下位群に関してはほとんどの項目において大幅な向上がみられた。つまり、元々算数文章題の構造を理解できている学習者にとっても効果的な演習である上、元々算数文章題の構造をあまり理解できていない学習者にとってはかなり効果のある演習であると考えられる。

### 5. まとめと今後の課題

本研究では、算数文章題を構造的に理解させるための演習を提案し、学習支援システムの設計・開発を行った。算数文章題の問題構造表現として、算数三角ブロックを用いて、算数三角ブロックを理解させることで算数文章題を構造的に理解させる支援を行っている。開発したシステムを小学校授業に導入し、演習の可能性を確認した。また、事前・事後テストとしてプライミングテストを行い、学習効果の検証も行った。結果としては全体として正答率と回答時間が有意に向上していることから、本システムを用いた演習に構造の定着の効果があったことが示唆された。特に下位群に大幅な向上がみられたことから、元々算数文章題の構造を理解できていない学習者に特に効果のある演習であることが示唆された。

今後の課題としては、本システムの改良があげられる。特にフィードバックに関して、現在は誤っていることの指摘のみとなっており、どのように誤っているのかの指摘はできていない。つまり、学習者が誤りの原因を見つけることがサポートできておらず、効率の良い学習にはなっていないと考えられる。このため、フィードバックの改良は今後の課題といえる。

また、構造定着のための演習として、作問学習が効果的であるといわれている。今後の課題としては、算数三角ブロックによる算数文章題の構造記述から、問題文を作問させるような演習が効果的ではないのかを考える。これを実現する学習支援システムの設計・開発も今後の課題である。

### 参考文献

- [多鹿 95] 多鹿秀継:「算数問題解決過程の分析」, 愛知教育大学研究報告, 44, pp. 157-167, (1995)
- [中川 10] 中川和之, 平嶋宗, 舟生日出男:「言葉の式」の階層的な外化による算数・数学の文章題に対する立式支援」, 人工知能学会研究会資料, 先進的学習科学と工学研究会, 58, pp. 73-78, (2010).
- [尾土井 13] 尾土井健太郎, 山元翔, 平嶋宗:「算数文章題の統合過程のモデル化とシステムによる外化支援の実現」, 2012年度 JSiSE 第6回研究会, (2013)
- [林 13] 林雄介, 山元翔, 平嶋宗:「算数文章題における物語の構造分析」, 先進的学習科学と工学研究会, 68, pp. 7-12, (2013)