

ライフゲームのネットワーク表現における ハブノードに依存した頑健性の検討

Robustness of rest-state network related to deletes of hub nodes in the Game of Life

香山 喜彦 今村 泰正
Yoshihiko Kayama Yasumasa Imamura

梅花女子大学 情報メディア学科
Department of Media and Information, BAIKA Women's University

Conway's Game of Life is one of the most famous cellular automata. In our previous works, we have proposed its network representation and investigated a scale-free property of a rest state induced from random initial configurations. In this article, we discuss robustness or resilience of the scale-free network. Successive deletes of hub nodes have no essential effects to it because such deletes are followed by huge avalanches and production of new hub nodes. We also try to make a scale-free network from typical still lifes, Beehive and Block, which are representatives of two types; whether they are accompanied by growth network or nongrowth one. The rest-state which contains only Beehives can construct the scale-free network.

1. はじめに

2次元2状態のセル・オートマトン(以下CAという)で最も有名なConwayのライフゲームは、生物集団が過疎・過密では生存に適さないという条件をルールに取り込んだものであり、その多様な振る舞いにより、様々な複雑系や生命進化のモデルとして多くの研究で利用されてきた[Gardner 1970, Berlekamp 1982]. 我々はCAの新たな可視化手法である”ネットワーク表現[Kayama 2011a]”をライフゲームに適用し、代表的なセル配位が個別のネットワークにより表現されるとともに、ランダムな初期配位からの遷移が沈静化した休止状態については、微小な摂動により雪崩現象が発生する緊張状態を、生き残ったセル配位を相互に連結する複雑ネットワークとして表現できることを示した[Kayama 2011b]. Bakらが提唱した自己組織化臨界[Bak 1987]はライフゲームについても当てはまり[Bak 1989], 論文[Kayama 2013]では、ネットワーク表現の枠内における議論から、雪崩の規模を表す指標の分布がスケールフリー性を示すかどうかを統計的手法[Clauset 2009]を用いて検討した. 特にネットワーク理論における重要な特性指標のout次数, すなわち各セルから出るリンクの数は, CAにおける自己組織化臨界の秩序変数としても有効であることが明らかになった.

スケールフリーネットワークは、一般にランダムなノードとハブノードの削除に対する頑健性と脆弱性をあわせ持つことが知られているが、動的モデルとしてのライフゲームにおいて、休止状態のネットワークはどうであろうか. 本稿では、特にハブノードの削除について、そのスケールフリー性が維持されるかどうかを検討する. ここでハブノードの削除とは、大きなout次数を持つセルのビットを反転し、雪崩を引き起こすことを意味するが、その沈静化により到達する休止状態もスケールフリー性を維持しているかどうかを評価する. 結果として、連続したハブノードの削除でも、そのスケールフリー性は損なわれなかった. また、休止状態に生き残る配位(固定物体)は、そのネットワークが成長するかしらないかの2種類に大別されるが、代表的なBeehiveとBlockを用いて休止状態を生成し

連絡先: 香山喜彦, 梅花女子大学情報メディア学科, 大阪府茨木市宿久庄 2-19-5, 072-643-6221, 072-643-8473, kayama@baika.ac.jp

たところ、スケールフリー性を導くためには、Beehiveのようにネットワークが成長する配位の存在が不可欠であることが分かった.

2. 休止状態ネットワークのスケールフリー性

CAのネットワーク表現は、ある初期配位の各セルに個別の1セル摂動を与え、時間発展後に摂動の有る・無しで状態が異なるセルをその摂動の影響を受けたものとみなし、摂動を付与したセルとエッジで連結して部分グラフを求め、すべてのセルに対して得られた部分グラフを統合して定義される. 摂動を付与する時刻を t_0 、以降の時間発展を t_I とすると、ライフゲームなど休止状態を持つルールの場合、 t_0 として過渡時間を超える値を設定すれば、休止状態に対するネットワークを求めることができる. 図1は、latticeサイズを $N = 1001$ 、 t_I の最大値を 3×10^4 ステップ、初期配位の数 n を100とした場合の休止状態ネットワークにおけるout次数の確率分布である. なお、ここでは周期的境界条件を採用している.

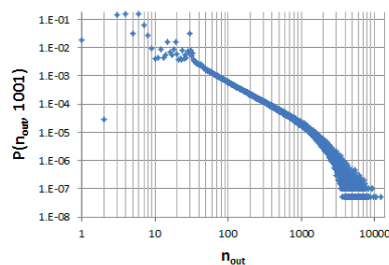


図1: 休止状態ネットワークにおけるout次数の確率分布(両対数, $N = 1001$)

有限サイズ効果を考慮してベキ則の検定[Clauset 2009]を行った結果が表1であり、ライフゲームの休止状態ネットワークがスケールフリー性を持つことがわかる. さらに scaling exponent(a, b, c)がいずれも1より大きな値を持つことは、latticeサイズ N が十分大きな領域で、これら秩序変数のコヒーレンス長も十分大きく、スケールフリー性と矛盾しないこ

data set	p 値	x_{min}	scaling	critical
lifetime	1.00	363	$a = 1.25$	$\alpha = 1.83$
size	0.84	61	$b = 1.63$	$\beta = 1.86$
out 次数	1.00	684	$c = 1.2$	$\gamma = 1.74$

表 1: 有限サイズスケーリング効果を考慮したベキ則の検定. p 値が 1.0 に近いほど強くベキ則に従う.

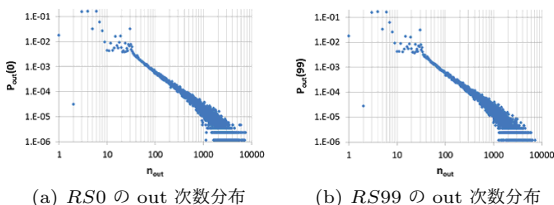


図 2: (a) ランダムな初期配位から得られた最初の休止状態 $RS0$ の out 次数分布と, (b) ハブノードを削除し続けた後の休止状態 $RS99$ の out 次数分布 (両対数, $N = 500$, 異なる初期配位の数 20).

とを意味している.

2.1 頑健性の検討

一般にスケールフリーネットワークでは, ハブの削除に対して脆弱性を持つ. 但しそれは静的なネットワークであって, Web やニューラルネット等では, 程度の差こそあれ, その影響は時間とともに回復する. 同様の頑健性ないしは回復力をライフゲームの休止状態ネットワークにおいても期待できるので, 以下の手順で実際に確認する. lattice サイズを $N = 500$ とし, ランダムな初期配位を時間発展させて休止状態 ($RS0$) のネットワークを求め, out 次数が最大のセルをハブノードと判断して削除する. すなわち, そのセルの摂動により雪崩を発生させ, 結果として休止状態 ($RS1$) を得る. 続いて $RS1$ のネットワークを求め, out 次数が最大のセルを削除して休止状態 ($RS2$) を得る. この手順を繰り返して, それぞれの休止状態での out 次数の分布を比較する. ハブノードの削除は 99 回行い ($RS0 \sim RS99$), 異なる 20 の初期配位から得られた $RS0$ と $RS99$ の out 次数分布をそれぞれ統合したのが図 2 であり, 統計的な検定でどちらもベキ則に従うことが分かった. $RS1$ から $RS98$ の分布でも目立った変動はないことから, 休止状態ネットワークのスケールフリー性は, ハブノードの削除について頑健性 (回復力) を持つことが分かる. これは, スケールフリー性がトポロジカルな歪み, ないしは対称性の破れを起源とするものであり, ハブノードが削除されても周期的境界条件によってその歪みは維持されるのではないかと推測される.

2.2 固定物体とスケールフリー性

では, スケールフリーでないネットワークを持つ休止状態を作り, そのハブノードを削除した場合はどうであろうか. そのような休止状態を作成するために, 固定物体 (still life) の特徴を利用する. 論文 [Kayama 2011b] では, それらのネットワークが成長し続けるか, ある時間で停止するかの 2 種類に分類できることを示したが, ここではそれらをそれぞれ Type G および Type NG と呼び, 前者として Beehive, 後者として Block を取り上げる. これらは最も代表的な固定物体であり, Block のみ, ないしは Beehive のみを lattice 上に配置すれば, スケールフリーでないネットワークの休止状態が得られると予

想される. 相互に干渉しない距離を保って配置した Block のみの場合は, 確かに Block 単独の out 次数分布と同一になり, 最大の out 次数は 6 でハブノードは存在せず, ノードの削除によって自明な配位へと移行する. しかし Beehive のみの場合は, 単にネットワークの成長による規模の大きな部分グラフだけが存在するのではなく, 図 3 のようにスケールフリー性を示す. すなわち, Beehive のみの休止状態からもスケールフリーネットワークを構成することができ, ハブノードを削除すれば, 通常の固定物体を含んだ休止状態へと移行する. 但しこの結果は, Block などの Type NG の配位がスケールフリー性に不要であることを意味するのではなく, 雪崩現象の過程で, Type G の成長するネットワークを Type NG が阻害することで, 多様な長さの部分グラフが混在することになると考えられる. 実際に Block と Beehive を混合した休止状態の out 次数分布を求めると, スケールフリー性を持つと同時にネットワークの成長が阻害されていることが確認できる.

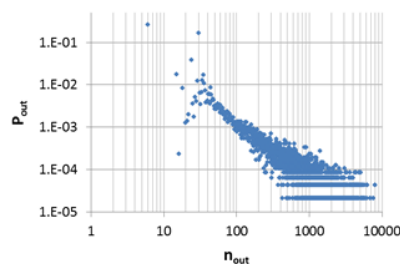


図 3: Beehive 1250 個を $N = 500$ の lattice 上に配置した休止状態の out 次数分布 (両対数).

3. まとめ

ネットワーク表現により, ライフゲームの休止状態に潜む緊張状態は, 生き残ったセル配位を結びつけるスケールフリーネットワークとして可視化される. そのスケールフリー性はハブノードを削除しても回復し, 動的ネットワークとして頑健性を持つことが明らかになった. また, ネットワークの成長の違いで 2 種類に区別される固定物体を用いて休止状態を作ると, ネットワークが成長する配位だけでスケールフリー性が再現されることも示された. 但し, 多様な規模の部分グラフが混在するには, これら 2 種類の配位の混合が重要であると推測される. 今後, 具体的な時間発展を追うことによって, 固定物体が生成される過程や対称性の破れなどの関連性など, 詳細な機構を明らかにすることが目標となる.

参考文献

- [Gardner 1970] M. Gardner, “Mathematical games,” *Scientific American*, vol. 223, pp. 102–123, 1970.
- [Berlekamp 1982] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. Academic, New York, 1982.
- [Kayama 2011a] Y. Kayama, “Network representation of cellular automata,” in *2011 IEEE Symposium on Artificial Life (IEEE ALIFE 2011) at SSCI 2011*, pp. 194–202, 2011.

- [Kayama 2011b] Y. Kayama and Y. Imamura, “Network representation of the game of life,” *Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing Research*, vol. 1 (3), pp. 233–240, 2011.
- [Bak 1987] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, “Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise,” *Physical Review Letters*, vol. 59 (4), pp. 381–384, 1987.
- [Bak 1989] P. Bak, K. Chen, and M. Creutz, “Self-organized criticality in the ‘game of life’,” *Nature (London)*, vol. 342, p. 780, 1989.
- [Kayama 2013] Y. Kayama, “Network representation of the game of life and self-organized criticality,” in *Artificial Life (ALIFE), 2013 IEEE Symposium on*, pp. 60–66, IEEE, 2013.
- [Clauset 2009] A. Clauset, C. R. Shalizi, and M. E. J. Newman, “Power-law distributions in empirical data,” *SIAM Review*, vol. 51, pp. 661–703, 2009.