3F3-2

接続行列分解に基づく複数種類の多項関係の同時予測

Higher-order Relation Prediction on Multi-relational Network
by Hypergraph Incidence Matrix Factorization

則のぞみ[*1] ボレガラ ダヌシカ[*2] 鹿島久嗣[*1]
Nozomi Nori Danushka Bollegala Hisashi Kashima

[*1]京都大学情報学研究科
Guraduate School of Informatics, Kyoto University

[*2]リヴァプール大学計算機科学科
Department of Computer Science, The University of Liverpool

We propose a prediction method for higher-order relational data from multiple sources. The high-dimensional property of higher-order relations causes problems associated with sparse observations. To cope with this problem, we propose a method to integrate higher-order relational data from multiple sources. Our target task is the simultaneous decomposition of higher-order, multi-relational data, which corresponds to the simultaneous decomposition of multiple tensors. However, we transform each tensor into an incidence matrix for the corresponding hypergraph and apply a nonlinear dimensionality reduction technique that results in a generalized eigenvalue problem guaranteeing global optimal solutions. We also extend our method to incorporate objects' attribute information to improve prediction for unseen/unobserved objects. To the best of our knowledge, this is the first reported method that can make predictions for (1) higher-order relations (2) with multi-relational data (3) with object attribute information and which (4) guarantees global optimal solutions. Using real-world datasets from social web services, we demonstrate that our proposed method is more robust against data sparsity than state-of-the-art methods for higher-order, single/multi-relational data including nonnegative multiple tensor factorization.

1. はじめに

複数の情報源からの関係データが分析のために与えられる問題設定は，Web マイニング [Ma 11, Gupta 10, Pan 10, Jiang 12, Hu 13] やバイオインフォマティクス [Acar 13b, Acar 12, Acar 13a, Smilde 00] など様々な分野で一般的なものとなりつつある．例えば，Web アプリケーションを用いてユーザーは他のユーザーと “friend” などの関係を築く一方で，ニュース記事を閲覧し，それに関するコメントを投稿したり，情報の再発信を行ったりしているが，これらユーザーとリソースの間の異なる “関係” はそれぞれ対象に対する補完的な性質を反映していると期待できるため，複数の情報源からの関係データを統合することで関連するアプリケーションの質を向上させることができると期待されている．

複数の情報源からの関係データ統合にあたっては，我々は以下のようなデータの多様性を扱う必要がある．(1) 我々は二項関係だけでなく多項関係も扱う必要がある．(2) 我々は関係データの他にオブジェクトの属性情報も活用する必要がある．多項関係は，三つ以上のオブジェクトを巻き込む関係を指す．現実世界においては例えば**花子が太郎から薦められたあるアイテムを購入した**などいった複数のエンティティの間の相互作用が観測されるため，多項関係を的確に扱う必要が生じる．(1) の要請は複数テンソルの同時分解の枠組み [Acar 11, Acar 13b, Yılmaz 11, Lin 09] によって探求されてきた．しかしながら，それらの多くは非凸最適化問題として定式化されるため，特にデータが疎である場合には局所解による精度悪化が問題となっている．したがって我々は (3) データ過疎に頑健な多項関係分析のための手法を構築する必要がある．二項関係の分析においては，複数の情報源からのデータを組み合わせることでデータ過疎へより良く対処でき，例えば予測精度を向上させることができることが示されている [Bouchard 13, Ma 11, Pan 10]．したがって，多項関係予測にあたっても複数の情報源からのデータを統合することにより，データ過疎により良く対処できるようになることが期待できる．

本論文では，多項関係分析の様々なタスクの中でもとりわけ意思決定に直接結びつく予測問題を扱い，複数の情報源からの多項関係データを統合する多項関係予測のための手法を提案する．我々の提案手法は上記の三つの要請を満たす手法である．表 1 に，我々の提案手法と，実験で比較した既存手法の比較をまとめた．我々の提案手法はハイパーグラフの接続行列分解に相当するため，英訳である Hypergraph Incidence Matrix Factorization の頭文字を取って提案手法を “HIMFAC” と命名する．

表 1: 多項関係予測の実験で用いた様々な手法の比較

手法	多項関係	複数種類の関係	属性	大域解
HIMFAC	✓	✓	✓	✓
METAFAC	✓	✓		
PARAFAC	✓			
Tucker	✓			

2. 提案手法

2.1 問題設定

K 種類のオブジェクト集合，$S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(K)}$, があり，それぞれの集合が $N^{(k)}$ $(1 \leq k \leq K)$ 個のオブジェクトを有するとする．これらのオブジェクトは合計で R 種類の関係に関与し，r 番目の種類の関係について，$M^{(r)}(1 \leq r \leq R)$ 個の関係インスタンスが観測されているとする．$I^{(r)}$ は，r 番目の関係に関与したオブジェクトの種類のインデックス集合である．$S^{(k)}$ 中の i 番目のオブジェクトを $s^{(k,i)}$ によって示す．例えば，$s^{(1,1)}$ はユーザーの花子である．我々はまた，各 $r = 1, 2, \ldots, R$ について，$M^{(r)}$ 個の関係インスタンス集合として $O^{(r)} \subset S^{(r_1)} \times S^{(r_2)} \times \cdots$ を得ているとする．ここで $r_i \subset I^{(r)}$ である．観測された各関係インスタンスは，ある特定の種類の関係 (r 番目の種類の関係) が，オブジェクトのあ

連絡先: 則のぞみ，京都大学情報学研究科知能情報学専攻，nozomi@ml.ist.i.kyoto-u.ac.jp

る特定の組み合わせについて成立することを示している．例えば，$o^{(r,1)} \in O^{(r)}$ は $Like$(花子 , `ai-gakkai.or.jp`, 太郎) であり，これは，**花子は太郎が薦めた *“ai-gakkai.or.jp”* のサイトを気に入る**ということを示している．

多くの現実的な状況では，各オブジェクトはそれ自身に関する情報と紐付けることができる．例えば，人であれば年齢や性別などのデモグラフィックな情報を，ウェブページであればドメインやテキストなどの情報を紐付けることができるだろう．したがって，$s^{(k,i)}$ に対して $D^{(k)}$ 次元の属性ベクトル $\boldsymbol{x}^{(k,i)}$ を紐付け，各 $k = 1, 2, \ldots, K$ について，まとめて計画行列

$$\boldsymbol{\Phi}^{(k)} \equiv (\boldsymbol{x}^{(k,1)}, \boldsymbol{x}^{(k,2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k,N^{(k)})})^\top,$$

とする．本論文が提案する関係予測問題は，以下のような入出力を持つ問題として定義できる．

問題: 複数種類の多項関係予測

- **入力:**
  - $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(K)}$: K 種類のオブジェクト集合
  - $I^{(r)}$: r 番目の種類の関係 ($r = 1, 2, \ldots, R$) に含まれるオブジェクトの種類のインデックス集合
  - $O^{(r)}$ ($\subset S^{(r_1)} \times S^{(r_2)} \times \cdots$): r 番目の種類の関係について $M^{(r)}$ 個の観測された関係インスタンス集合 ($r_i \subset I^{(r)}$)
  - $\boldsymbol{\Phi}^{(1)}, \boldsymbol{\Phi}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\Phi}^{(K)}$: オブジェクトの属性を表現する K 個の計画行列
- **出力:** 各 $r (r = 1, 2, \ldots, R)$ について，各オブジェクト ($\subset I^{(r)}$) の $O^{(r)}$ に含まれない組み合わせの関係の生じやすさ．

2.2 次元削減を用いた多項関係予測

K 種類の各オブジェクト集合と R 種類の各関係について，一つの二値行列を構築し，合計で $K \times R$ 個の行列を得る．これらの行列は，**オブジェクトと関係インスタンスの間の関係**を表現するものであり，（ハイパー）グラフ理論の接続行列に相当する．各行列の各要素は，ある特定のオブジェクトがある特定の関係インスタンスに所属するかを示す．もし k 番目の種類のオブジェクトが r 番目の種類の関係に関与しない場合，対応する行列は零行列となる．

行列 $\boldsymbol{A}^{(k,r)}$ を，$S^{(k)}$ に所属するオブジェクトの，r 番目の種類の関係への参加情報をまとめた $N^{(k)} \times M^{(r)}$ の二値行列とする．$A^{(k,r)}$ の各要素は以下のように定義される．

$$[\boldsymbol{A}^{(k,r)}]_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & (s^{(k,i)} \in S^{(k)} \text{ が } o^{(r,j)} \in O^{(r)} \text{ に参加する場合}) \\ 0 & (\text{そうでない場合}). \end{cases}$$

二部グラフ予測問題 [Yamanishi 09] と似たアイデアにより，各オブジェクトと，そのオブジェクトが参加した関係インスタンスが，潜在空間で近傍に位置するような潜在空間への写像を学習し，異種オブジェクトと関係インスタンスを共通の潜在空間に埋め込む．まず最初に簡単のため一次元への埋め込みを考えるが，我々の提案手法は一般に D 次元への埋め込みにも適用可能である．実際，最終的に導出される一般化固有値問題は，D 次元への埋め込みの場合にも成立する．

サイズ $N^{(1)}$ のオブジェクト集合 $S^{(1)}$ は長さ $N^{(1)}$ のベクトル $\boldsymbol{f}^{(1)}$ として埋め込まれる．同様に，オブジェクト集合 $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(K)}$ はそれぞれベクトル $\boldsymbol{f}^{(2)}, \boldsymbol{f}^{(3)}, \ldots, \boldsymbol{f}^{(K)}$ として埋め込まれる．同様にして，r 番目の種類の関係は長さ $M^{(r)}$ のベクトル $\bar{\boldsymbol{f}}^{(r)}$ として共通の潜在空間に埋め込まれる．各オブジェクトを，参加した関係インスタンスの近傍に埋め込むことを考えると，最小化すべき目的関数は以下のようになる[*1]．

$$\begin{aligned} J = & \sum_{k,r,i,j} [\boldsymbol{A}^{(k,r)}]_{i,j} \left([\boldsymbol{f}^{(k)}]_i - [\bar{\boldsymbol{f}}^{(r)}]_j \right)^2 \\ = & \sum_{k,r} \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{D}^{(k,r)} \boldsymbol{f}^{(k)} + \sum_r \bar{\boldsymbol{f}}^{(r)\top} \bar{\boldsymbol{D}}^{(r)} \bar{\boldsymbol{f}}^{(r)} \\ & - 2 \sum_{k,r} \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{A}^{(k,r)} \bar{\boldsymbol{f}}^{(r)}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{D}^{(k,r)}$ は (i,i) 番目の要素が $[\boldsymbol{D}^{(k,r)}]_{i,i} \equiv \sum_j [\boldsymbol{A}^{(k,r)}]_{i,j}$ として定義される対角行列であり，$\bar{\boldsymbol{D}}^{(r)}$ は同様に $[\bar{\boldsymbol{D}}^{(r)}]_{i,i} \equiv \sum_k \sum_j [\boldsymbol{A}^{(k,r)}]_{j,i}$ として定義される．ここで，各 j について $\sum_i [\boldsymbol{A}^{(k,r)}]_{i,j} = 1$ であることを用いた．

この目的関数は $\boldsymbol{f}^{(k)} \equiv \boldsymbol{0}$ かつ $\bar{\boldsymbol{f}}^{(r)} \equiv \boldsymbol{0}$ としてしまうことで容易に最小化できてしまうので，このような望ましくない解を避けるために下記のスケーリング制約を加える．

$$\sum_{k,r} \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{D}^{(k,r)} \boldsymbol{f}^{(k)} = 1. \tag{2}$$

目的関数 J の $\bar{\boldsymbol{f}}^{(r)}$ に関する最小値は以下のように得られる．

$$\bar{\boldsymbol{f}}^{(r)} = \bar{\boldsymbol{D}}^{(r)^{-1}} \sum_k \boldsymbol{A}^{(k,r)\top} \boldsymbol{f}^{(k)}. \tag{3}$$

式 (3) を，J の正負を逆手させたものに代入することで，以下の最大化問題を得る．

$$\sum_{k,\ell,r} \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{A}^{(k,r)} \bar{\boldsymbol{D}}^{(r)^{-1}} \boldsymbol{A}^{(\ell,r)\top} \boldsymbol{f}^{(\ell)} - \sum_{k,r} \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{D}^{(k,r)} \boldsymbol{f}^{(k)}. \tag{4}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} & -J - \lambda \left(\sum_{k,r} \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{D}^{(k,r)} \boldsymbol{f}^{(k)} - 1 \right) \\ & = \sum_{k,\ell,r} \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{A}^{(k,r)} \bar{\boldsymbol{D}}^{(r)^{-1}} \boldsymbol{A}^{(\ell,r)\top} \boldsymbol{f}^{(\ell)} - \sum_{k,r} \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{D}^{(k,r)} \boldsymbol{f}^{(k)} \\ & - \lambda \left(\sum_k \sum_r \boldsymbol{f}^{(k)\top} \boldsymbol{D}^{(k,r)} \boldsymbol{f}^{(k)} - 1 \right), \end{aligned} \tag{5}$$

として定義されるラグランジュ関数を最大化することで以下を得る．

$$\sum_{\ell,r} \boldsymbol{A}^{(k,r)} \bar{\boldsymbol{D}}^{(r)^{-1}} \boldsymbol{A}^{(\ell,r)\top} \boldsymbol{f}^{(\ell)} = 2(\lambda + 1) \sum_r \boldsymbol{D}^{(k,r)} \boldsymbol{f}^{(k)}. \tag{6}$$

*1 関係の種類の影響を調整するためのパラメータを追加することは可能であり，実際この拡張は容易である．その場合に導出される最終的な一般化固有値問題は今回導出される一般化固有値問題と大差ないものとなる．実験では，このスケーリングパラメータの考慮の有無による精度差があまりなかったため，本論文では簡単のためスケーリングパラメータは考慮しない．

ここで以下の行列を定義する．

$$\boldsymbol{f} \equiv (\boldsymbol{f}^{(1)^\top}, \boldsymbol{f}^{(2)^\top}, \dots, \boldsymbol{f}^{(K)^\top})^\top.$$

$$\bar{\boldsymbol{D}} \equiv \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{D}}^{(1)} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \bar{\boldsymbol{D}}^{(R)} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{D}}^{(r)} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^{(1,r)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{D}^{(K,r)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{(1,1)} & \dots & \boldsymbol{A}^{(1,R)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}^{(K,1)} & \dots & \boldsymbol{A}^{(K,R)} \end{bmatrix}$$

すると，式 (6) は以下の一般化固有値問題として書き直すことができる．

$$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{D}}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{f} = \tilde{\lambda}(\sum_r \tilde{\boldsymbol{D}}^{(r)})\boldsymbol{f}. \tag{7}$$

最大固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{f}$ が，オブジェクトの一次元空間での最適な埋め込み先である．D 次元の空間における埋め込み先 $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots, \boldsymbol{f}_D$ を得るためには，固有値の大きい順に上位 D 個の固有ベクトルを取得すれば良い．

最後に，オブジェクトの組み合わせ $o^{(r,j)} \equiv (s^{(r_1,i_1)}, s^{(r_2,i_2)}, \dots)$ が与えられたとき，式 (3) は関係インスタンス $o^{(r,j)}$ に含まれる各オブジェクトとその組み合わせの最適な埋め込み先の間にも成立する．よって，$o^{(r,j)}$ の最適な埋め込み先は，関与したオブジェクトの埋め込みベクトルの重心として与えられる．式 (1) で定義されるように，オブジェクトと関係インスタンスの間の距離が小さい程，それらのオブジェクトはその関係インスタンスに関与しやすいと考えられるため，関係インスタンス $o^{(r,j)}$ は下記の値が小さい程生じやすいと考えられる．

$$\sum_d \sum_{k \subset I^{(r)}} \left([\boldsymbol{f}_d^{(k)}]_{i_k} - \frac{1}{|I^{(r)}|} \sum_{k' \subset I^{(r)}} [\boldsymbol{f}_d^{(k')}]_{i_{k'}} \right)^2. \tag{8}$$

2.3 オブジェクトの属性の活用

次に，オブジェクトの属性情報 $\{\boldsymbol{\Phi}^{(k)}\}_{k=1}^K$ を統合することを考える．

線形写像：

$$\boldsymbol{f}^{(k)} \equiv \boldsymbol{\Phi}^{(k)} \boldsymbol{w}^{(k)},$$

を考える．ここで $\boldsymbol{w}^{(k)}$ は $D^{(k)}$ 次元の属性ベクトルを一次元の潜在空間に写像する $D^{(k)}$ 次元のパラメタである．最終的に得られる一般化固有値問題は D 次元への埋め込みにも適用される．属性を活用しない場合と同様にして，

$$\sum_{\ell,r} \boldsymbol{\Phi}^{(k)^\top} \boldsymbol{A}^{(k,r)} \bar{\boldsymbol{D}}^{(r)^{-1}} \boldsymbol{A}^{(\ell,r)^\top} \boldsymbol{\Phi}^{(\ell)} \boldsymbol{w}^{(\ell)} = 2(\lambda + 1) \sum_r \boldsymbol{\Phi}^{(k)^\top} \boldsymbol{D}^{(k,r)} \boldsymbol{\Phi}^{(k)} \boldsymbol{w}^{(k)},$$

を得ることができ，これは下記の一般化固有値問題として表現できる．

$$\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{D}}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{w} = \tilde{\lambda} \left(\sum_r \boldsymbol{\Phi}^\top \tilde{\boldsymbol{D}}^{(r)} \boldsymbol{\Phi} \right) \boldsymbol{w}. \tag{9}$$

ここで

$$\boldsymbol{\Phi} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(1)} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{\Phi}^{(K)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{w} \equiv (\boldsymbol{w}^{(1)^\top}, \boldsymbol{w}^{(2)^\top}, \dots, \boldsymbol{w}^{(K)^\top})^\top.$$

である．

属性ベクトルの次元が大きい場合．次元の呪いと呼ばれる効果により予測性能はしばしば悪化する．これを避けるために，正の値である正則化パラメタ $\sigma > 0$ により正則化項を追加するのが一般的である．この場合，我々の一般化固有値問題，式 (9) は以下のように修正される．

$$\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{D}}^{-1}\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{w} = \tilde{\lambda} \left(\left(\sum_r \boldsymbol{\Phi}^\top \tilde{\boldsymbol{D}}^{(r)} \boldsymbol{\Phi} \right) + \sigma \boldsymbol{I} \right) \boldsymbol{w}. \tag{10}$$

3. 実験

本章では提案手法の有用性を評価するために，ソーシャルメディアから取得した現実のデータセットを用いた実験結果を示す．データとしてソーシャルメディアのデータを選んだのは，ソーシャルメディアにおける関係予測は複数種類の多項関係予測における典型的なタスク例であるためである．しかし，我々の提案手法は他のタスクでも有用であると期待する．

3.1 実験条件

3.1.1 データセット

[Nori 12] で用いられた *Twitter* のデータセットを用いた[*2]．データの詳細は表 2 にまとめられている．*Twitter* データセットには，二種類の関係：“retweet” (R-1) と “favorite” (R-2) が含まれる．各関係は三種類のオブジェクト：subjective user, URL, original user を含む．各タプルは，特定の URL を含む original user の発言に対して subjective user が “retweet” ないし “favorite” の行為を行ったことを表している．R-1 の関係を予測する対象の関係として，R-2 の関係を補助情報として用いた．

3.1.2 比較手法

提案手法を下記の手法と比較した．手法の比較は，表 1 にまとめた．(1) **METAFAC** は Lin ら [Lin 09] によって提案された非負テンソル同時分解手法である．我々は Lin らの公開コードを実装として用いた．(2) **PARAFAC** と (3) **Tucker** は多項関係予測に広く使われる典型的なテンソル分解手法である [Kolda 09]．これら二つの手法は一つの多項関係を対象とした分解手法である．我々は Tensor Toolbox[*3] を実装として用いた．

3.1.3 予測設定

本実験では “コールドオブジェクト” とは少数の関係にしか関与しないオブジェクトとして定義する．補助情報の関係インスタンス数は固定し，予測する関係種類の関係インスタンス数は一定の条件の下変化させた．具体的には，全関係インスタンスの 20% を訓練データとしてサンプルし，残りの 80% を

*2 `norizm.org/datasets.html` から取得可能．

*3 `www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox`

表 2: 実験で用いたデータセットの詳細

関係の種類	関係インスタンス数	オブジェクト	オブジェクト数
R1	14,221	subjective user	1,144
		original user	7,935
(retweet)		URL	11,335
R2	22,755	subjective user	1,125
		original user	10,049
(favorite)		URL	18,244

表 3: コールドオブジェクトを含む予測における平均 AUC の比較．t 検定で統計的に有意 ($p < 0.05$) であった手法が太文字で記されている．

	全ユーザー	コールドユーザー
閾値 θ	1.0	0.8
HIMFAC	0.873	**0.851**
METAFAC (multi)	0.878	0.780
METAFAC (single)	0.823	0.690
PARAFAC	0.633	0.503
TUCKER	0.501	0.519

評価データとして用いた．このサンプリング，評価の一連のプロセスを 5 回繰り返し，t 検定 ($p < 0.05$) を行った．一つのサンプルをデベロップメントデータセットとして全てのパラメタ（潜在次元数）を $\{2^0, 2^1, \ldots, 2^{11}\}$ の範囲で調整した．予測精度の評価指標としては AUC を採用した．

3.2 結果

全ユーザーに対する予測精度とコールドオブジェクトに相当するユーザー（コールドユーザー）に対する予測精度を評価した．我々は，行為主体のユーザー（subjective user）を行為の回数（“retweet” の関係なら “retweet” を行った回数）で昇順にソートし，上位 80% をコールドユーザーとして抽出した．この割合を以下では θ と呼ぶ．表 3 に，全ユーザー ($\theta = 1.0$) とコールドユーザー ($\theta = 0.8$) に対する AUC の平均を示した．t 検定 ($p < 0.05$) で統計的に有意であった手法が太文字で記されている．全ユーザーに対する予測精度を評価したとき ($\theta = 1.0$) には，我々の手法 (HIMFAC) と比較手法 (METAFAC (multi)) の間に統計的な有意差は観察されなかったが，コールドユーザーに対する予測精度を評価したとき ($\theta = 0.8$) には，提案手法は他の全手法を上回る精度を実現した．コールドユーザーに対する予測を行うときに提案手法の恩恵が得られたことは特筆すべきである．この観察は，近年の研究 [Acar 13b] の観察とも一致する．

4. おわりに

本論文では，複数の情報源からの多項関係データを統合する多項関係予測のための手法を提案した．大域解を保証する定式化と複数の情報源からの関係データ統合により，データが過疎な状況下で，提案手法は既存の複数テンソルの同時分解手法や，一種類のテンソル分解手法を上回る予測精度を実現した．

参考文献

[Acar 11] Acar, E., Kolda, T. G., and Dunlavy, D. M.: All-at-once Optimization for Coupled Matrix and Tensor Factorizations, in *MLG'11* (2011)

[Acar 12] Acar, E., Gurdeniz, G., Rasmussen, M. A., Rago, D., Dragsted, L. O., and Bro, R.: Coupled Matrix Factorization with Sparse Factors to Identify Potential Biomarkers in Metabolomics, *International Journal of Knowledge Discovery in Bioinformatics*, Vol. 3, No. 3, pp. 22–43 (2012)

[Acar 13a] Acar, E., Lawaetz, A. J., Rasmussen, M. A., and Bro, R.: Structure-Revealing Data Fusion Model with Applications in Metabolomics, in *EMBS '13*, pp. 6023–6026 (2013)

[Acar 13b] Acar, E., Rasmussen, M. A., Savorani, F., Næs, T., and Bro, R.: Understanding data fusion within the framework of coupled matrix and tensor factorizations, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, Vol. 129, No. 0, pp. 53–63 (2013)

[Bouchard 13] Bouchard, G., Yin, D., and Guo, S.: Convex Collective Matrix Factorization, in *AISTATS '13*, pp. 144–152 (2013)

[Gupta 10] Gupta, S. K., Phung, D., Adams, B., Tran, T., and Venkatesh, S.: Nonnegative Shared Subspace Learning and Its Application to Social Media Retrieval, in *KDD '10*, pp. 1169–1178 (2010)

[Hu 13] Hu, L., Cao, J., Xu, G., Cao, L., Gu, Z., and Zhu, C.: Personalized Recommendation via Cross-domain Triadic Factorization, in *WWW '13*, pp. 595–606 (2013)

[Jiang 12] Jiang, M., Cui, P., Wang, F., Yang, Q., Zhu, W., and Yang, S.: Social Recommendation Across Multiple Relational Domains, in *CIKM '12*, pp. 1422–1431 (2012)

[Kolda 09] Kolda, T. G. and Bader, B. W.: Tensor Decompositions and Applications, *SIAM Review*, Vol. 51, No. 3, pp. 455–500 (2009)

[Lin 09] Lin, Y.-R., Sun, J., Castro, P., Konuru, R., Sundaram, H., and Kelliher, A.: MetaFac: Community Discovery via Relational Hypergraph Factorization, in *KDD '09*, pp. 527–536 (2009)

[Ma 11] Ma, H., Zhou, D., Liu, C., Lyu, M. R., and King, I.: Recommender Systems with Social Regularization, in *WSDM '11*, pp. 287–296 (2011)

[Nori 12] Nori, N., Bollegala, D., and Kashima, H.: Multinomial Relation Prediction in Social Data: A Dimension Reduction Approach, in *AAAI '12*, pp. 115–121 (2012)

[Pan 10] Pan, W., Xiang, E. W., Liu, N. N., and Yang, Q.: Transfer Learning in Collaborative Filtering for Sparsity Reduction, in *AAAI '10*, pp. 617–624 (2010)

[Smilde 00] Smilde, A., Westerhuis, J. A., and Boque, R.: Multiway multiblock component and covariates regression models, *Journal of Chemometrics*, Vol. 14, No. 3, pp. 301–331 (2000)

[Yamanishi 09] Yamanishi, Y.: Supervised Bipartite Graph Inference, in *NIPS '09*, pp. 1841–1848 (2009)

[Yılmaz 11] Yılmaz, K. Y., Cemgil, A. T., and Simsekli, U.: Generalised coupled tensor factorisation, in *NIPS '11*, pp. 2151–2159 (2011)