

# グループ推薦のための非線形行列分解

## Non-linear Matrix Factorization for Group Recommendation

吉川 友也\*<sup>1</sup> 岩田 具治\*<sup>2</sup> 澤田 宏\*<sup>3</sup>  
Yuya Yoshikawa Tomoharu Iwata Hiroshi Sawada

\*<sup>1</sup>奈良先端科学技術大学院大学 NAIST \*<sup>2</sup>NTT コミュニケーション科学基礎研究所  
NTT Communication Science Laboratories

\*<sup>3</sup>NTT サービスエボリューション研究所  
NTT Service Evolution Laboratories

The group recommendation is a task to recommend items to groups such as households and communities. In this paper, we propose a non-linear matrix factorization method, which can be applied to the group recommendation. The proposed method assumes that each member in groups has its own latent vector, and the behavior of each group is determined by the probability distribution of the members' latent vectors. Recommending the items are performed by using non-linear functions mapping the distributions of the groups into the scores for the items. The functions are generated from a Gaussian process, which is defined by the similarities between the groups. To measure the similarities, the method first represent each distribution (group) as an element in a reproducing kernel Hilbert space (RKHS). Then, the similarities are calculated by using kernels in the RKHS. In the experiments, we demonstrate the effectiveness of the method using two synthetic datasets in two prediction tasks.

### 1. はじめに

グループ推薦は家族やオンラインコミュニティなどのグループに対してアイテムを推薦するタスクである。個人に対する推薦とは異なり、グループ推薦では各グループが複数人の個人(メンバー)から構成されるため、グループメンバーの嗜好を上手くまとめ、グループの嗜好として表現する必要がある。例えば [Gorla 13] は、全てのメンバーが好きなアイテムや少なくとも一人のメンバーが好きなアイテムを推薦するようにモデル化した。

本稿では、グループ推薦に適用可能な非線形行列分解手法を提案する。図 1 は提案法の概略図である。提案法は、メンバーは潜在ベクトルを持ち、グループの振る舞いはグループメンバーの潜在ベクトルの確率分布によって決まると仮定する。そして、アイテムの推薦は、グループの確率分布からアイテムに対するスコアを出力する関数を推定することによって行われる。この関数はグループ間の類似度によって定義されるガウス過程によって生成されると仮定する。グループ間の類似度を測るために、提案法はカーネル埋め込みの枠組みに基づき、各グループの確率分布を再生核ヒルベルト空間 (RKHS) 上の点で表現する。その後、類似度は RKHS 上のカーネルを使って計算する。メンバーの潜在ベクトルなどのパラメータは、準ニュートン法などの勾配に基づく最適化法を使って推定される。一度パラメータを推定すれば、提案法は新しいアイテムに対するグループの評価の予測を行える。さらに、既存のメンバーから構成される学習データに含まれないグループの評価も同様に予測できる。実験では、人工データを使って提案法の予測性能を評価し、提案法が既存手法と比較して優れていることを示す。

既存手法では、グループの嗜好を表現するために一部のメンバーの嗜好を選択したり、グループメンバー全体の平均的な嗜好を利用している。しかし、この方法はメンバーの嗜好の多

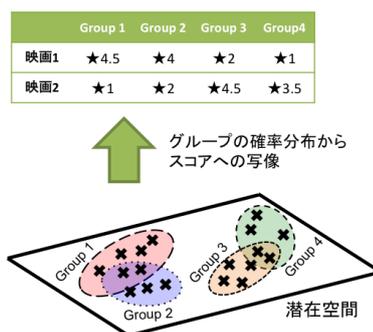


図 1: 提案法の概略図。×印はメンバーの潜在ベクトルを表す。グループメンバーの確率分布が類似するグループは類似のスコアを付けるようにモデル化される。

様性を適切に捉えることができない。一方、提案法はカーネル埋め込みによって確率分布の高次モーメント(共分散構造など)を保存してグループを表現することができる。これによって、メンバー平均では同じ嗜好を持つグループであっても、メンバーの嗜好の偏り方の違いを捉えて、違うアイテムを推薦することができる。また、これまでのグループ推薦手法は、アイテムとグループ、もしくはグループとグループの線形な関係のみを捉えていた。これに対し提案法は、非線形カーネルを使ってグループの挙動の類似度を測るため、非線形な関係を捉えることができる。

### 2. 提案法

#### 2.1 グループ推薦のための線形行列分解

最初に、グループ推薦のための線形行列分解モデルを考える。各アイテム  $n = 1, 2, \dots, N$  に対して、グループが付与するスコアベクトル  $\mathbf{y}_n = (y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,|G|})^\top$  が観測されるとする。 $y_{n,g}$  はアイテム  $n$  に対するグループ  $g$  のスコアを意味す

る．ここで  $G$  はグループ集合を表す．また，各グループ  $g \in G$  に属するメンバー集合  $M_g = \{m_{g,1}, m_{g,2}, \dots, m_{g,|M_g|}\}$  も観測されるとする．

メンバーは  $D$  次元の潜在ベクトル  $\mathbf{x}$  を持つと仮定する．ここで， $\mathbf{I}_D$  は  $D$  次元単位行列である．グループ  $g$  のメンバーの潜在ベクトル集合を  $\mathbf{X}_g = \{\mathbf{x}_m \mid m \in M_g\}$  と表記する．メンバーの潜在ベクトル集合を用いてグループの特徴を表現するための方法の一つとして以下の平均が考えられる．

$$\phi(\mathbf{X}_g) = \frac{1}{|M_g|} \sum_{m \in M_g} \mathbf{x}_m. \quad (1)$$

以下では， $\phi(\mathbf{X}_g)$  をグループ  $g$  の潜在ベクトルと呼ぶ．また， $\Phi(\mathbf{X}) = (\phi(\mathbf{X}_1), \phi(\mathbf{X}_2), \dots, \phi(\mathbf{X}_{|G|}))$  と定義する．

線形行列分解では，スコア行列  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^\top$  を  $\mathbf{Y} \approx \Phi(\mathbf{X})^\top \mathbf{W}$  となるように分解することである．ここで， $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N)$  はアイテムの線形射影行列を表し， $\mathbf{w}_n = (w_{n,1}, w_{n,2}, \dots, w_{n,D})^\top$  はアイテム  $n$  の線形射影ベクトルである．確率的行列分解 [Salakhutdinov 07] の枠組みでこの線形行列分解モデルを表現すると，以下のようになる．

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \mathbf{W}, \beta, \phi) = \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_n | \Phi(\mathbf{X})^\top \mathbf{w}_n, \beta^{-1} \mathbf{I}_N), \quad (2)$$

ここで， $\beta$  はノイズ項の精度パラメータである．

## 2.2 線形から非線形へ

まず，アイテムの線形射影行列  $\mathbf{W}$  を積分消去することを考え，これによって，スコア行列がグループの平均ベクトルの類似度によって計算されることを示す． $\mathbf{W}$  の事前分布として正規分布  $p(\mathbf{W}|\alpha) = \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(\mathbf{w}_n | 0, \alpha^{-1} \mathbf{I}_D)$  を置くことにより，以下の周辺尤度を得ることができる．

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \alpha, \beta, \phi) & \\ &= \int p(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \mathbf{W}, \beta, \phi) p(\mathbf{W}|\alpha) d\mathbf{W} \\ &= \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_n | 0, \alpha^{-1} \Phi(\mathbf{X})^\top \Phi(\mathbf{X}) + \beta^{-1} \mathbf{I}_N). \end{aligned} \quad (3)$$

なお，平均と共分散行列は  $\mathbb{E}[y_n] = \Phi(\mathbf{X})^\top \mathbb{E}[\mathbf{w}_n] = 0$  と  $\mathbb{E}[y_n y_n^\top] = \Phi(\mathbf{X})^\top \mathbb{E}[\mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^\top] \Phi(\mathbf{X}) + \beta^{-1} \mathbf{I}_N = \alpha^{-1} \Phi(\mathbf{X})^\top \Phi(\mathbf{X}) + \beta^{-1} \mathbf{I}_N$  から求められる．ここで，上記の共分散行列は  $\Phi(\mathbf{X})$  の内積によって計算されていることに注意する．これはグループの潜在ベクトルを使って線形カーネルを計算していることと等価である．そこで， $K(i, j)$  をグループ  $i$  とグループ  $j$  の間のノイズ項付き線形カーネル，

$$K(i, j) = \alpha^{-1} \phi(\mathbf{X}_i)^\top \phi(\mathbf{X}_j) + \beta^{-1} \delta_{i,j} \quad (4)$$

と定義する．式 (3) の共分散行列をカーネル (グラム) 行列  $\mathbf{K} = [K(i, j)]_{i=1, j=1}^G$  で置き換えることにより，以下の式を得る．

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \alpha, \beta, \phi) = \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_n | 0, \mathbf{K}). \quad (5)$$

これはガウス過程回帰モデルの尤度と等価である [Rasmussen 05]．ガウス過程回帰モデルは  $K(i, j)$  として非線形カーネルを用いることにより，非線形回帰モデル

を実現する．次節で示すように，提案法はレベル 1 カーネルとレベル 2 カーネルを使うことによって，グループ間の非線形な関係を表現する．

欠損値への対応．式 (5) は欠損値を含まないスコア行列  $\mathbf{Y}$  に対する尤度であった．しかしグループ推薦の場合， $\mathbf{Y}$  は欠損値を含むため，これに対応した尤度を定義する必要がある．アイテム  $n$  にスコア付けたグループ集合を  $g_n$  と表記する．その上で，グループ集合  $g_n$  に存在するグループのみからなるスコアベクトル  $\mathbf{y}_{n, g_n}$  とカーネル行列  $\mathbf{K}_{g_n, g_n}$  を定義する．最終的に，欠損値ありスコア行列  $\mathbf{Y}$  の尤度は，

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \alpha, \beta, \phi) = \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_{n, g_n} | 0, \mathbf{K}_{g_n, g_n}). \quad (6)$$

となる．

## 2.3 グループ間のカーネル

グループ間のカーネルの値を計算するために，提案法は (1) カーネル埋め込みによって各グループを再生核ヒルベルト空間 (RKHS) 中の元として表現し，(2) レベル 2 カーネルによってグループ間のカーネルの値を計算する．以下では，(1), (2) それぞれを順に説明する．

### 2.3.1 カーネル埋め込み

確率分布のカーネル埋め込みの枠組み [Smola 07] に基づいて，各グループ  $g$  におけるメンバーの潜在ベクトルの確率分布は，カーネル  $k$  で定まる RKHS  $\mathcal{H}_k$  上の点  $\mu_g$  として，以下のように表現される．

$$\mu_g = \frac{1}{|M_g|} \sum_{m \in M_g} k(\cdot, \mathbf{x}_m) \in \mathcal{H}_k. \quad (7)$$

ここで， $k$  はカーネル関数である． $k$  として特性的なカーネルを使うことにより，確率分布の高次モーメントの情報が保存される [Sriperumbudur 10]．

### 2.3.2 レベル 2 カーネル

次に，カーネル埋め込みによって得られたグループ表現とレベル 2 カーネルを使って，尤度 (6) の評価に必要なカーネル行列  $\mathbf{K}$  を計算する．レベル 2 カーネルは，RKHS 上のグループ表現  $\mu_{P_i}, \mu_{P_j}$  の類似度を測るためのカーネルである．レベル 2 カーネルとして，線形カーネル，RBF カーネル，多項式カーネルなどを使うことができる．例えば，線形カーネルでは，グループ  $i$  と  $j$  のカーネルの値は RKHS 上の内積  $\langle \mu_{P_i}, \mu_{P_j} \rangle_{\mathcal{H}_k}$  に基づいて計算される．具体的には，この内積は次式となる．

$$\begin{aligned} \langle \mu_{P_i}, \mu_{P_j} \rangle_{\mathcal{H}_k} & \\ &= \left\langle \frac{1}{|M_i|} \sum_{s \in M_i} k(\cdot, \mathbf{x}_s), \frac{1}{|M_j|} \sum_{t \in M_j} k(\cdot, \mathbf{x}_t) \right\rangle_{\mathcal{H}_k} \\ &= \frac{1}{|M_i| |M_j|} \sum_{s \in M_i} \sum_{t \in M_j} k(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t). \end{aligned} \quad (8)$$

式 (4) の内積項をこの内積で置き換えることにより，各グループペアのカーネル  $K(i, j)$  が計算できる．

まとめると，本稿では埋め込みカーネルを変更することにより，二種類のグループ間カーネルを考える． $K_{LL}(i, j)$  は線形の埋め込みカーネルと線形のレベル 2 カーネルを持つグループ間カーネルを表し， $K_{RL}(i, j)$  は RBF カーネルによる埋め込みカーネルと線形のレベル 2 カーネルを持つグループ間カー

ネルを表す．これらはそれぞれ，

$$K_{LL}(i, j) = \frac{\alpha^{-1}}{|M_i||M_j|} \sum_{s \in M_i} \sum_{t \in M_j} k_{\text{Lin}}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t) + \beta^{-1} \delta_{i,j} \quad (9)$$

$$K_{RL}(i, j) = \frac{\alpha^{-1}}{|M_i||M_j|} \sum_{s \in M_i} \sum_{t \in M_j} k_{\text{RBF}}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t) + \beta^{-1} \delta_{i,j} \quad (10)$$

となる．ここで，

$$k_{\text{Lin}}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t) = \mathbf{x}_s^\top \mathbf{x}_t, \quad (11)$$

$$k_{\text{RBF}}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_t\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (12)$$

である．

## 2.4 パラメータ推定

アイテムに対するスコアを予測するために，パラメータ  $\mathbf{X}, \alpha, \beta$  とカーネル依存のパラメータを推定する必要がある．目的関数  $L$  は周辺尤度 (6) の対数で，

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_{\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_n}^{-1} \mathbf{y}_{n, \mathbf{g}_n} \mathbf{y}_{n, \mathbf{g}_n}^\top + |\mathbf{g}_n| \log \det(\mathbf{K}_{\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_n}) - \frac{\beta^{-1}}{2} \sum_{m \in \mathcal{M}} \|\mathbf{x}_m\|^2 \quad (13)$$

である．ここで，最後の項は L2 正則化項で，潜在ベクトル  $\mathbf{x}$  の事前確率に相当する．この  $L$  を最大にするパラメータを準ニュートン法によって求める．準ニュートン法は，パラメータに関する一階微分の値を利用する最適化手法である．各メンバー  $m \in \mathcal{M}$  に関して，潜在ベクトル  $\mathbf{x}_m$  の一階微分は以下で計算される．

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_m} = \sum_{i \in G} \sum_{j \in G} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{K}} \right)_{i,j} \frac{\partial \mathbf{K}_{i,j}}{\partial \mathbf{x}_m} - \beta^{-1} \mathbf{x}_m \quad (14)$$

ここで，第一因子は周辺対数尤度のカーネルによる微分で，

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{K}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \mathbf{K}_{\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_n}^{-1} \mathbf{y}_{n, \mathbf{g}_n} \mathbf{y}_{n, \mathbf{g}_n}^\top \mathbf{K}_{\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_n}^{-1} - |\mathbf{g}_n| \mathbf{K}_{\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_n}^{-1} \quad (15)$$

である．なお，この微分はカーネルの選択には依存しない．第二因子は  $\mathbf{x}_m$  に関するカーネル  $K(i, j)$  の微分である．これはカーネルの選択に依存する．

$$\frac{\partial K_{LL}(i, j)}{\partial \mathbf{x}_m} \quad (16)$$

$$= \frac{\alpha^{-1}}{|M_i||M_j|} \sum_{s \in M_i} \sum_{t \in M_j} \begin{cases} \mathbf{x}_t & (m = s \wedge m \neq t) \\ \mathbf{x}_s & (m = t \wedge m \neq s) \\ 2\mathbf{x}_m & (m = t \wedge m = s) \end{cases}$$

$$\frac{\partial K_{RL}(i, j)}{\partial \mathbf{x}_m} = \frac{\alpha^{-1}}{|M_i||M_j|} \sum_{s \in M_i} \sum_{t \in M_j} k_{\text{RBF}}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_t) \quad (17)$$

$$\times \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s) & (m = s \wedge m \neq t) \\ \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_t) & (m = t \wedge m \neq s) \\ \mathbf{0} & (m = t \wedge m = s) \end{cases}$$

他のパラメータの更新式も， $\mathbf{x}_m$  の場合と同様の方法で導出される．

## 2.5 スコア予測

新しいアイテムに対するスコアを予測においては，ガウス過程回帰における予測式を使うことができる [Rasmussen 05]．アイテム  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  に対するグループ  $g \in G$  のスコアの予測値は，

$$\hat{y}_{n,g} = \mathbf{y}_{n, \mathbf{g}_n} (\mathbf{K}_{\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_n} + \beta^{-1} \mathbf{I}_{|\mathbf{g}_n|})^{-1} \mathbf{k}_{g, \mathbf{g}_n}. \quad (18)$$

で与えられる．ここで， $\mathbf{k}_{g, \mathbf{g}_n}$  はグループ  $g$  とアイテム  $n$  にスコアを付けたグループのカーネルベクトルである．

提案法では，新しく作られたグループによるスコアも予測することができる．新しく作られたグループを  $*$ ，そのグループのメンバー集合を  $M_* \subset \mathcal{M}$  と表記する．次に，既存グループと新しく作られたグループのカーネルベクトル  $\mathbf{k}^*$  を以下のように計算する．

$$\mathbf{k}^* = (K(*, 1), K(*, 2), \dots, K(*, |G|))^\top. \quad (19)$$

最終的に，アイテム  $n$  に対するスコアの予測値は，式 (18) と同じように，

$$\hat{y}_{n,*} = \mathbf{y}_{n, \mathbf{g}_n} (\mathbf{K}_{\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_n} + \beta^{-1} \mathbf{I}_{|\mathbf{g}_n|})^{-1} \mathbf{k}_{*, \mathbf{g}_n}. \quad (20)$$

で計算される．

## 3. 実験

この節では，二種類の人工データを使ってグループ推薦における予測タスクを行い，提案法の有効性を示す．

人工データは異なる生成方法によって二種類生成した．一つ目のデータは，2次元正方形格子状に49人のメンバーを配置し，各グループがランダムにメンバー8人を選ぶことにより25グループを生成した．以下では，このデータを格子データと呼ぶ．二つ目のデータは，4次元の正規分布  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_4)$  からメンバー80人の潜在ベクトルを生成した後，50グループは2人のメンバーをランダムに選び，それぞれの近傍メンバー5人をグループメンバーとした．以下では，このデータを近傍データと呼ぶ．このようにしてメンバーの潜在ベクトルとグループメンバーの割り当てを作成したあと，埋め込みカーネルとしてRBF，レベル2カーネルとして線形カーネルを持つ提案法に基いて，300アイテムから成るスコア行列を作成した．なお，生成時の提案法のパラメータは  $\sigma = 1, \alpha = 0.1, \beta = 10$  である．

提案法の有効性を評価するために，4種類の手法と比較する．GP-LVM(RBF) は，RBFカーネルを使ったガウス過程に基づく非線形行列分解モデルである．この手法はユーザに対する推薦タスクで最高性能を達成している [Lawrence 09]．SVD は線形な行列分解モデルである．上の2つの行列分解モデルは，スコア行列  $\mathbf{Y}$  を分解して復元し直すことによって，欠損したスコアを予測することができる．Ridge はグループメンバーを特徴量として使ったリッジ回帰である．Mean はアイテムに対するスコアの平均値を欠損値の予測値とする方法である．なお，提案法，GP-LVM(RBF)，Ridge の正則化項のパラメータは全て1.0に固定した．

### 3.1 既存グループのスコア予測

学習データ中に現れるグループの未知アイテムに対するスコアを予測し，その精度を評価する．評価用に真のスコア行列からランダムに50%のスコアを欠損させた行列を5セット作り，これらを使って各手法を学習する．

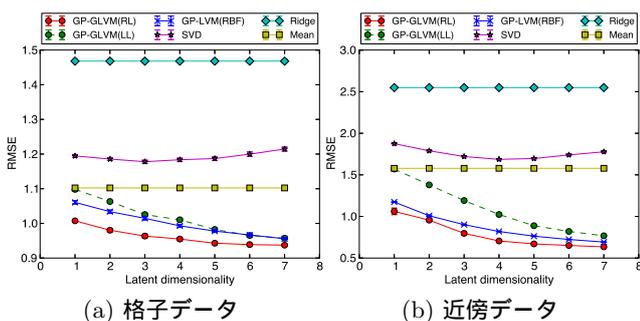


図 2: 既存グループに対するスコア予測誤差

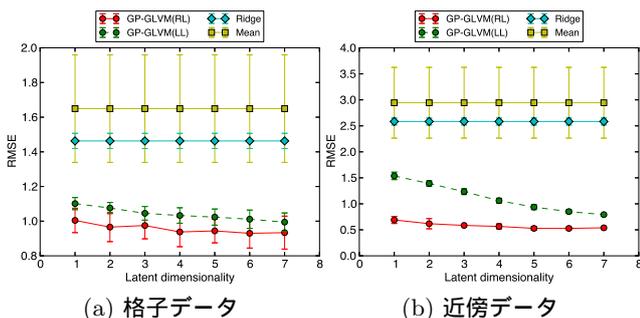


図 3: 新しいグループに対するスコア予測誤差

図 2 は、既存グループに対するスコア予測値の RMSE を示す。横軸は提案法、GP-LVM、SVD の潜在ベクトルの次元数である。なお、Ridge と Mean は潜在ベクトルがないため、横軸に対して RMSE は一定である。また、各点のエラーバーは学習データ 5 セットそれぞれの RMSE の標準誤差を示す。図を見て分かるように、格子データ、近傍データともに、提案法 GP-GLVM(RL) が他の手法よりも良いことが分かる。データ生成は GP-GLVM(RL) に基づいて行われているため、学習によって GP-GLVM(RL) がデータ生成の挙動を復元できていることを意味している。また、提案法 GP-GLVM(LL) はグループ間の線形な関係のみを捉えるモデルであるが、次元数が大きくなるとともに予測性能が上がっていくことが見て取れる。GP-LVM(R) は GP-GLVM(RL) の次に良い性能を示している。これは、GP-LVM(R) はメンバーは考慮しないもののグループ間の非線形な関係は捉えることができるためである。SVD は GP-LVM(R) で RBF カーネルの代わりに線形カーネルを使ったものと同等とみなせるが、この場合では Mean よりも悪くなること示された。

### 3.2 新しいグループのスコア予測

次に、学習データに現れないグループの各アイテムに対するスコアを予測する実験を行い、その精度を評価する。この実験では、学習データとして真のスコア行列からランダムに 20% のグループを欠損させたスコア行列を 5 セット作成し、これらを使って各手法を学習する。なお、GP-LVM(R) と SVD は未知のグループには対応できないため、これらとの比較は行うことができないことに留意する。

図 3 は、新しいグループのスコア予測値の RMSE を示す。格子データ、近傍データともに、提案法 GP-GLVM(RL) が他の手法よりも優れていることが分かる。また次元数が大きくなっても、予測性能はほとんど変わらないことから、提案法は良い汎化性能を持っていることが分かる。また、次元数が大きくなると、提案法 GP-GLVM(LL) の予測性能は GP-GLVM(RL)

に近づくことも分かる。

## 4. おわりに

本稿では、グループ推薦に適用可能な非線形行列分解手法を提案した。提案法は、メンバーは潜在ベクトルを持ち、グループの振る舞いはグループメンバーの潜在ベクトルの確率分布によって決まると仮定する。そして、アイテムの推薦は、グループの確率分布からアイテムに対するスコアを出力する関数を推定することによって行われる。この関数はグループ間の類似度によって定義されるガウス過程によって生成されると仮定する。グループ間の類似度を測るために、提案法はカーネル埋め込みの枠組みに基づき、各グループの確率分布を再生核ヒルベルト空間 (RKHS) 上の元で表現する。その後、類似度は RKHS 上のカーネルを使って計算する。メンバーの潜在ベクトルなどのパラメータは、準ニュートン法などの勾配に基づく最適化法を使って推定される。一度パラメータを推定すれば、提案法は新しいアイテムに対するグループの評価の予測を行える。さらに、新たに作られたグループの評価も同様に予測できる。実験では、二種類の人工データを使って提案法の予測性能を評価し、提案法が四つの既存手法と比較して優れていることを示した。

今後の研究では、実データを使った実験を行い、提案法を有用性を確かめる。また、提案法は現状、大規模なデータを使った学習を行うことができない。これに対しては、確率的勾配降下法などのオンライン学習を導入したり、[Lawrence 07] のような近似法を適用することによって、効率的な計算が行えるように改善していきたい。

### 謝辞

本研究は JSPS 特別研究員奨励費の助成を受けたものです。

## 参考文献

[Gorla 13] Gorla, J., Lathia, N., Robertson, S., and Wang, J.: Probabilistic Group Recommendation via Information Matching, *WWW* (2013)

[Lawrence 07] Lawrence, N.: Learning for Larger Datasets with The Gaussian Process Latent Variable Model, in *The Eleventh International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics* (2007)

[Lawrence 09] Lawrence, N. and Urtasun, R.: Non-linear Matrix Factorization with Gaussian Processes, *ICML* (2009)

[Rasmussen 05] Rasmussen, C. E. and Williams, C. K. I.: *Gaussian Processes for Machine Learning*, The MIT Press (2005)

[Salakhutdinov 07] Salakhutdinov, R. and Mnih, A.: Probabilistic Matrix Factorization., *NIPS* (2007)

[Smola 07] Smola, A., Gretton, A., Song, L., and Schölkopf, B.: A Hilbert Space Embedding for Distributions, *Algorithmic Learning Theory* (2007)

[Sriperumbudur 10] Sriperumbudur, B. and Gretton, A.: Hilbert Space Embeddings and Metrics on Probability Measures, *JMLR*, Vol. 11, pp. 1517–1561 (2010)