1D5-OS-11b-5in

フーリエ変換を用いた命題論理式の充足可能性に関する考察 —第2報—

A Secondary Report on Analyzing Satisfiability of Propositional Formulas with the Fourier Transform

宮城 智輝[*1] 山本 泰生[*2] 岩沼 宏治[*2]
Tomoki Miyagi Yoshitaka Yamamoto Koji Iwanuma

[*1]山梨大学大学院医学工学総合教育部コンピュータ・メディア工学専攻
Department of Computer Science and Media Engineering,
Interdisciplinary Graduate School of Medicine and Engineering, University of Yamanashi

[*2]山梨大学大学院医学工学総合研究部
Department of Research Interdisciplinary Graduate School of Medicine and Engineering, University of Yamanashi

This paper presents an algorithm for counting non-zero Fourier coefficients in Boolean functions. Given a Boolean function f, the number of non-zero Fourier coefficients, called *t-value*, is known as an important parameter to analysis the satisfiability of f. In fact, it is made known that f is unsatisfiable if and only if its t-value is zero. In this study, we consider a specific problem to compute t-value from the vector $\vec{f}$ consisting of the 2^n outputs for f with the n variables. We first propose a baseline algorithm for this problem that computes t-value in the divide and conquer manner. We next improve this algorithm using several permutation operations that enable to reduce the original $\vec{f}$ provided that the t-value is not changed. Finally, we show experimental results obtained using randomly generated sparse $\vec{f}$ with about 1000 variables.

1. はじめに

本研究では，ブール関数の直交基底表現を用いた充足可能性判定 (*Satisfiability Test*, 以下，SAT と略す) 問題の新しい解法ならびに分析手法を検討している．一般に SAT 問題は連言標準形 (*Conjunctive Normal Form*, CNF) で与えられる．近年，SAT 問題に関するさまざまな研究 [1, 2] が進められているが，[3] では元の SAT 問題をある時系列信号に変換しその時系列信号から充足可能性を判定する手法が提案されている．この中でいくつかの信号変換手法が提案されているが，直交性を持たない変換手法の性能が問題サイズに応じて大きく低下することが報告されている．

そこで著者らは，次にブール関数のフーリエ変換に着目し，この変換により得られる直交基底表現から SAT 問題を解析する課題に取り組んだ [4]．ブール関数のフーリエ表現は，各基底関数とそのフーリエ係数の線形結合で与えられる．[4] では，このスペクトル表現において非ゼロフーリエ係数の存在性と元問題の充足可能性が等価であることを示した．すなわち，非ゼロフーリエ係数の個数を **t 値**と呼ぶとき，充足可能な非恒真 SAT 問題は $t \geq 1$ となる．この性質はシンプルであるが，SAT 問題とフーリエ変換を結びつける基礎的な知見となる．また，t 値はフーリエ表現における問題の記述長とみなすことができる．CNF 形式における記述長は節数に相当するが，これはランダム SAT 問題の充足可能性や求解困難性を決定づける重要な因子であることが知られている [2]．本研究では，t 値を用いてこのような SAT 問題解析に取り組むことを目標とし，その最初のステップとして，本論文ではブール関数 f のベクトル形式 $\vec{f_n}$ から t 値を算出する手法を提案する．このベースラインとなる手法は分割統治法に基づく．また，$\vec{f_n}$ に対する 2 つの置換: **末尾置換**と**変数順序置換**を検討し，これらの操作によって t 値は変わらないことを示す．ランダム問題に対する計算機実験の結果，これら 2 つの置換操作を導入した手法は，モデル数に関して制約があるものの，数千変数程度の問題であれば実時間で t 値の求解が可能であることを確認している．本論文で示される提案法を用いることにより，今後，比較的大規模な SAT 問題に対して，フーリエ表現に基づく新しい特徴分析を行うことが期待できる．

連絡先: 宮城 智輝，山梨大学大学院医学工学総合教育部コンピュータ・メディア工学専攻，住所: 〒400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11 E-mail: yyamamoto@yamanashi.ac.jp

2. 準備

2.1 SAT 問題

命題論理の**充足可能性判定** (*propositional satisfiability* (*testing*); SAT) は与えられた命題論理式の充足可能性を判定する問題である [10, 11]．SAT の各インスタンスは **SAT 問題** (*SAT problem instance*) と呼ばれる．

ある SAT 問題に出現する命題変数を $x_1, x_2, ..., x_n$ で表し，命題変数の集合を V とする．このとき, V の各命題変数は 1 または 0 の値を取り，それぞれ**真** (*true*) または**偽** (*false*) に対応する．V に対する (真偽値) **割当て**は関数 $A : V \rightarrow \{1, 0\}^n$ と定義される．**リテラル** (*literal*) はある命題変数またはその否定である．**節** (*clause*) はリテラルの選言である．節の連言は**連言標準形** (*conjuctive normal form*; CNF) と呼ばれる．SAT 問題は, 通常 CNF 式の論理式で与えられる．

φ をある CNF 式, V を φ 中に出現する変数集合とし，A を V に対する割当てとする．割当て A により φ が真となるとき, A は φ を**充足する** (*satisfy*) といい, A は φ の**モデル** (*model*) であるという．CNF 式 φ が**充足可能** (*satisfiable*) であるとは, φ のモデルが存在することを意味し，**充足不能** (*unsatisfiable*) であるとは, φ のモデルが存在しないことを意味する．

2.2 ブール関数のフーリエ変換

n 変数のブール関数 $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ において，各割当て $\vec{x_i} =< x_1, x_2, ..., x_n >$ $(1 \leq i \leq 2^n)$ に対する f の値 $f(\vec{x_i}) = \alpha_i$ を要素とするベクトル $\vec{f_n} =< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n} >$ を f の真

理値ベクトル $\vec{f_n}$ と呼ぶ．ただし，ある j $(1 \leq j \leq 2^n)$ に対応する割当て $\vec{x_j}$ は $j-1$ を 2 進数で表現し，$x_1, x_2, ..., x_n$ をその最上位ビットから順々に最下位ビットまで割当てて得られるベクトルとする．また，α_i を反転した値を $\bar{\alpha_i}$ とすると，f の否定 $\neg f$ は $< \bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2}, \ldots, \bar{\alpha_{2^n}} >$ と表記される．f の期待値を $E[f] = \frac{1}{2^n}\sum_{\vec{x}\in\{0,1\}^n} f(\vec{x})$ とする．また，ある基底ベクトル $\vec{z} \in \{0,1\}^n$ が与えられたとき，$\chi_{\vec{z}}(\vec{x}) = (-1)^{\vec{z}\cdot\vec{x}}$ を $\vec{z}$ に対する基底関数とする．このとき，基底ベクトル $\vec{z}$ に対する **f のフーリエ係数**は，$\hat{f}(\vec{z}) = E[f \times \chi_{\vec{z}}]$ と定義される．任意の f は，フーリエ係数を用いて，以下の形式で表される [6, 12]．

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{z}\in\{0,1\}^n} \hat{f}(\vec{z})\chi_{\vec{z}}(\vec{x})$$

この f のスペクトル表現を **f のフーリエ表現**と呼び，フーリエ表現へ変換することを**フーリエ変換**と呼ぶ．

f のフーリエ表現は，**アダマール行列** (*Hadamard matrix*) H を用いて表すことができる．アダマール行列 H は以下の 3 つの条件を満たす行列である [12]．

1. 行列 H は正方行列である;
2. 要素は 1 か -1 である;
3. 任意の 2 つの行ベクトルはすべて直交する．

このような条件を満たす行列式として以下のものがある．

定義 1 (*Sylvester* **型アダマール行列**)

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ H_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ H_{2^{n+1}} &= \begin{bmatrix} H_{2^n} & H_{2^n} \\ H_{2^n} & -H_{2^n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上記のアダマール行列は各基底ベクトル $\vec{z}$ における基底関数ベクトル $A(\vec{z})$ を要素とするベクトルに相当する．すなわち，フーリエ係数ベクトル $C_n(f)$ を n 変数ブール関数 f の各フーリエ係数を要素とするベクトルとすると，以下の式を用いて，H_{2^n} と $\vec{f}$ から $C_n(f)$ を求めることができる．

$$C_n(f) = \frac{1}{2^n}(\vec{f}H_{2^n}) \qquad (1)$$

2.3 関連研究

これまで，ブール関数におけるフーリエ変換はブール関数の学習などに利用されてきた [7, 9, 6]. ブール関数の学習では，関数の出力値に影響を与える変数に注目することが，学習効率の面から重要である．以下では関数の出力値に影響を与える変数の定義を行う．

ある割当て $A \in \{0,1\}^n$ において，1 箇所だけ A と割当ての異なる A' を A の**隣接インスタンス**と呼ぶ．すなわち，$\vec{\alpha} \in \{0,1\}^{k-1}$, $\vec{\beta} \in \{0,1\}^{n-k}$ において $\vec{\alpha}\circ 0 \circ \vec{\beta}$ は $\vec{\alpha}\circ 1 \circ \vec{\beta}$ の隣接インスタンスである．特に $k = i$ ならば, その 2 つを i 番目の変数 x_i における隣接インスタンスと呼ぶ．この隣接インスタンスを用いて関連変数は以下のように定義される．

定義 2 (関連変数) $\{0,1\}^n$ を入力とする関数 f について, i 番目の変数 x_i における隣接インスタンス A, A' において $f(A) \neq f(A')$ となる A, A' が存在するとき, x_i を f の**関連変数**という.

関連変数はブール関数の学習において重要な概念であり，様々な高速抽出法が提案されている [8]．その中で，関連変数とフーリエ係数の間には以下の補題が成り立つ事が知られている．

補題 1 ([8]) x_i $(1 \leq i \leq n)$ が関連変数でないときまたそのときに限り，任意の $\vec{\alpha} \in \{0,1\}^{i-1}$，$\vec{\beta} \in \{0,1\}^{n-i}$ において，$\hat{f}(\vec{\alpha}\circ 1 \circ \vec{\beta}) = 0$ である．

2.4 フーリエ係数と充足可能性の関係

ブール関数 f のフーリエ係数と関連変数の間には以下の命題が成り立つ．

命題 1 恒真でないブール関数 f が関連変数を持つならば，f は充足可能である．

これらの補題 1 と命題 1 を用いるとフーリエ係数と充足可能性に関する以下の関係が成り立つ．

定理 1 ([4]) 恒真でないブール関数 f において，非ゼロフーリエ係数が存在するときまたそのときに限り，f は充足可能である．

定理 1 は，ブール関数の充足可能性がフーリエ表現における非ゼロフーリエ係数と密接に関係することを示唆している．実際，フーリエ表現におけるブール関数の記述長は非ゼロフーリエ係数の個数である t 値に相当するが，CNF 表現における記述長である節数はすでに制約密度などの SAT 問題の難しさを特徴づける重要なパラメータとして理解されている．しかしながら，t 値を用いて SAT 問題の特徴を解析する研究は筆者の知る限りなされていない．例えば，フーリエ表現における制約密度の概念を t 値を用いて定義できるが，一般の制約密度と同様の性質を持つのかよくわかっていない．本論文では，このような解析を行うための前準備として，t 値を効率的に求める手法を検討する．

3. t 値を求める基本アルゴリズム

任意の形式のブール関数から t 値を求めることは，充足可能性の判定問題を含んでおり，効率的に解くことは難しい．そこで本論文では，最初のステップとして f のベクトル形式 $\vec{f}$ から，t 値を求める問題を扱う．この問題設定では式 (1) を用いて各フーリエ係数を求めることができる．これは直交符号化法の一つである**ウォルシュ・アダマール変換** (*Walsh Hadamard Tranform*, 以下 WHT と略す) を行うことに相当する．ただし，扱う問題は以下の性質を持つことに留意する必要がある．

1. 真理値ベクトル $\vec{f_n}$ は 2^n 個の要素を持つ．
2. そのほとんどの要素が 0 である ($\vec{f}$ はスパース)．
3. 非ゼロフーリエ係数を数え上げるだけで十分．

性質 1 より従来の WHT 法 (Fast WHT 等) をそのまま適用することは難しいが，性質 2 と 3 をもとに工夫することが可能である．

提案法では以下に述べる漸化式を用いて，$\vec{f}$ を分割しながら再帰的に t 値を算出する．

定義 3 真理値ベクトル $\vec{f_n} =< \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n} >$ において，$\vec{f_n^1} =< \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^{n-1}} >$ と $\vec{f_n^2} =< \alpha_{2^{n-1}+1}, \ldots, \alpha_{2^n} >$ をそれぞれ $\vec{f_n}$ の前ベクトルと後ベクトルと呼ぶ．このとき 2 つのベクトルの連結 $\vec{f_n^1} \circ \vec{f_n^2}$ は $\vec{f_n}$ と一致する．

命題 2 $\vec{f_n}$ において，以下の漸化式が成り立つ:

$$\vec{f_n} H_{2^n} = (\vec{f_n^1} + \vec{f_n^2}) H_{2^{n-1}} \circ (\vec{f_n^1} - \vec{f_n^2}) H_{2^{n-1}}$$

この命題から，元の真理値ベクトル $\vec{f_n}$ の t 値は，その前ベクトルと後ベクトルの和と差の t 値をそれぞれ求め，それらを足せば良いことがわかる．この知見を用いた基本アルゴリズムを図 1 に示す．このアルゴリズムでは，元の真理値ベクトル $\vec{f_n}$ を $n = 1$ となるまで分割し再帰的に t 値を求める．このため，n に対し指数オーダーの計算コストが必要となり，実問題を解くことは困難である．

ただし，もし元の $\vec{f_n}$ の性質からただちに t 値を求めることができれば分割する必要はない．そこで次章では，t 値に関する性質を検討し，t 値が一意に定まるような $\vec{f_n}$ の条件および t 値が変化しない $\vec{f_n}$ に対する操作を明らかにする．次に，これらの性質を用いて基本アルゴリズムを効率化する．

Input: 真理値ベクトル $\vec{f_n}$
Output: 真理値ベクトル $\vec{f_n}$ の t 値

compute$(\vec{f_n})$/* f_n の t 値を求める */
Begin
1.$n = 1$ の場合
　$\vec{f_1} H_2$ を求め，その非ゼロ要素数を返す
2.$n > 1$ の場合
　$\vec{f_{n-1}} = \vec{f_n^1} + \vec{f_n^2}$
　$\vec{g_{n-1}} = \vec{f_n^1} - \vec{f_n^2}$
　compute$(\vec{f_{n-1}})$ + *compute*$(\vec{g_{n-1}})$ を返す
End

図 1: t 値を求める基本アルゴリズム

4. t 値に関する性質

非ゼロなフーリエ係数の個数を **t 値**と呼ぶとき，t 値に関する性質として，以下の定理が成り立つ．

定理 2 ([5]) 充足可能でかつ恒真でない真理値ベクトル $\vec{f_n}$ の t 値とその否定 $\neg\vec{f_n}$ の t 値は一致する．

定理 3 ([5]) 真理値ベクトル $\vec{f_n} =< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n} >$ の t 値とその左右対称のベクトル $\vec{f_n} =< \alpha_{2^n}, \alpha_{2^{n-1}}, ..., \alpha_1 >$ の t 値は一致する．

定理 4 ([5]) 真理値ベクトル $\vec{f_n}$ の各要素の値の総和が奇数ならば t 値は 2^n となる．

定理 5 ([5]) 真理値ベクトル $\vec{f_n}$ のモデル数が奇数ならば t 値は 2^n となる．

定理 6 ([5]) 前 (後) ベクトル $\vec{f_n^1}$ ($\vec{f_n^2}$) の要素がすべて 0 であるとき，元の $\vec{f_n}$ の t 値は，前 (後) ベクトルの t 値の 2 倍となる．

次に，次元縮小をより効率的に誘導させる置換操作として，**末尾置換** (*Tail index permutation*, T 置換) と**変数順序置換** (*Variable order permutation*, V 置換) について取り上げる．この 2 つの置換操作の定義は，以下のモデル行列を用いて示す．

定義 4 (モデル行列) n 変数のブール関数 $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ において，各割当てに対する f の値を要素とするベクトルを f の真理値ベクトル $\vec{f_n}$ と呼ぶ．このとき，真理値ベクトル $\vec{f_n}$ のモデル行列は以下のように定義される．

$$M_{\vec{f_n}} = {}^t< \vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, , \ldots, \vec{\alpha_m} >$$

ただし，m はモデル数を示し，$\vec{\alpha_i} =< x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i >$ は i 番目 $(1 \leq i \leq m)$ のモデルに相当する．また，x_k^i $(1 \leq k \leq n)$ はこのモデルにおける k 番目の変数の真偽値を示す．

定義 5 (末尾置換 (T 置換)) 2 つの組 $P_1 = (y_1^1, y_2^1)$, $P_2 = (y_1^2, y_2^2)$ に関する $M_{\vec{f_n}}$ の T 置換 $T_{P_1,P_2}(M_{\vec{f_n}})$ を次のように定義する．(ただし，$y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2 \in \{0,1\}, P_1 \neq P_2$)

$$T_{P_1,P_2}(M_{\vec{f_n}}) = {}^t< \vec{\alpha'_1}, \vec{\alpha'_2}, \ldots, \vec{\alpha'_m} >$$

ただし，i 番目 $(1 \leq i \leq n)$ のモデルの各割当ては以下の通りである．

$$\vec{\alpha'_i} =< r_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n-1}^i, x_n^i >$$

このとき，1 番目の変数 r_1^i は以下の規則に従い置換を行う．

$$r_1^i = \begin{cases} \bar{x}_1^i & (x_{n-1}^i, x_n^i) = P_1 \text{ または } (x_{n-1}^i, x_n^i) = P_2 \\ x_1^i & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

定理 7 $n \geq 3$ のとき，$M_{\vec{f_n}}$ の t 値と T 置換後 $T_{P_1,P_2}(M_{\vec{f_n}})$ の t 値は同じである．(ただし，$P_1 = (y_1^1, y_2^1), P_2 = (y_1^2, y_2^2)$, $y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2 \in \{0,1\}, P_1 \neq P_2$)

証明 7 任意の 2 つの組 $P_1 = (y_1^1, y_2^1)$, $P_2 = (y_1^2, y_2^2)$ (ただし，$y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2 \in \{0,1\}, P_1 \neq P_2$) に関する $M_{\vec{f_n}}$ の T 置換 $T_{P_1,P_2}(M_{\vec{f_n}})$ は文献 [5] の $\vec{f_n}$ に対する各種の系列置換を組み合わせて表現可能であることから，T 置換後 $T_{P_1,P_2}(M_{\vec{f_n}})$ の t 値と系列置換後の t 値は等しい．また，系列置換の前後で t 値は不変であることから，$M_{\vec{f_n}}$ の t 値と T 置換後 $T_{P_1,P_2}(M_{\vec{f_n}})$ の t 値は等しい．□

定義 6 (変数順序置換 (V 置換)) u 番目の変数 x_u と v 番目の変数 x_v に関する $M_{\vec{f_n}}$ の V 置換 $V_{u,v}(M_{\vec{f_n}})$ を次のように定義する．(ただし，$1 \leq u \leq n$, $1 \leq v \leq n$, $u \neq v$)

$$V_{u,v}(M_{\vec{f_n}}) = {}^t< \vec{\alpha'_1}, \vec{\alpha'_2}, \ldots, \vec{\alpha'_m} >$$

ただし，i 番目 $(1 \leq i \leq n)$ のモデルの各割当ては以下の通りである．

$$\vec{\alpha'_i} =< y_1^i, y_2^i, \ldots, y_u^i, y_v^i, \ldots, y_n^i >$$

このとき，k 番目 $(1 \leq k \leq n)$ の変数 y_k^i は以下の規則に従い置換を行う．

$$y_k^i = \begin{cases} x_v^i & k = u \text{ のとき} \\ x_u^i & k = v \text{ のとき} \\ x_k^i & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

定理 8 $n \geq 2$ のとき，$M_{\vec{f_n}}$ の t 値と V 置換後 $V_{u,v}(M_{\vec{f_n}})$ の t 値は同じである．(ただし，$1 \leq u \leq n$, $1 \leq v \leq n$, $u \neq v$)

証明 8 任意のブール関数 f のフーリエ表現は一意に存在することから，V 置換の前後で t 値は変わらない．□

5. 提案手法

本章では，大規模 SAT 問題のベクトル形式から非ゼロフーリエ係数を効率的に数え上げるアルゴリズムを提案する．図 2 に提案手法を示す．

Input: 真理値ベクトル $\vec{f_n}$
Output: 真理値ベクトル $\vec{f_n}$ の t 値
$compute(\vec{f_n})$/* f_n の t 値を求める */
Begin
1.$n = 1$ の場合
  $\vec{f_1}H_2$ を求め，その非ゼロ要素数を返す
2.$n > 1$ の場合
if $\vec{f_n}$ のすべての要素が 0
  $t = 0$ を返す

while ある T 置換と V 置換が存在し，その置換操作で
    $\vec{f_n}$ の $\vec{f_n^1}(\vec{f_n^2})$ の要素がすべて 0
  $\vec{f_n^1}(\vec{f_n^2})$ を取り除き，$\vec{f_n}$ の
  次元縮小 ($\vec{f}_{n-1} = \vec{f_n^2}$ ($\vec{f}_{n-1} = \vec{f_n^1}$)) を行う

$\vec{f_n}$ の正規化を行う

if $\vec{f_n}$ の各要素の総和が奇数
  $t = 2^n$ を返す
else
  $\vec{f}_{n-1} = \vec{f_n^1} + \vec{f_n^2}$
  $\vec{g}_{n-1} = \vec{f_n^1} - \vec{f_n^2}$
  $compute(\vec{f}_{n-1}) +\ compute(\vec{g}_{n-1})$ を返す
End

図 2: 提案手法

6. 大規模問題に対する性能評価

提案手法の性能を評価する実験を行った．変数の数 (50 ～ 1000; 50 刻み) のランダム問題の真理値ベクトル $\vec{f_n}$ に対して，t 値の求解に要した探索空間のサイズ (再帰の呼び出し回数) を各モデル数 (2 ～ 8; 2 刻み) で比較を行った．実験の結果を図 3 に示す．

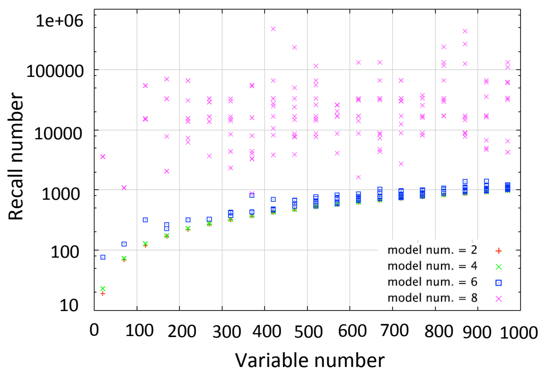

図 3: 大規模問題における探索空間のサイズ

図 3 の縦軸は t 値の求解に要した探索空間のサイズ (再帰の呼び出し回数) を示し，横軸はランダム問題の変数の数を示す．結果より，モデル数が 2, 4, 6 のランダム問題の探索空間のサイズは変数の数が増加しても探索空間のサイズはほとんど増加しないことが確認された．その一方で，モデル数が 8 のランダム問題の探索空間のサイズはモデル数が 2, 4, 6 の場合と比べて非常に大きな値を取ることが確認された．

7. まとめと今後の課題

提案手法は，t 値に関する性質をもとに再帰的に問題を分割して非ゼロフーリエ係数を数え上げている．この手法はモデル数が奇数の場合やモデル数が少ない場合，モデルが偏って出現する場合に大規模問題の t 値を高速に求めることができるが，モデル数が偶数で各モデルが疎らに出現する場合は，30 変数以上の問題で t 値の求解は困難となる．今後の課題として，t 値問題の特殊解や置換についてさらなる検討を行い，t 値をより効率的に求める手法を開発したい．また，t 値を指定して CNF 式を生成する方法についても検討をしていきたい．

謝辞

本研究は一部，文科省科学研究費補助金（若手 B：No.22700141）および文科省科学研究費補助金（基盤 C：No.22500127）の援助を受けている．

参考文献

[1] Cook, S.: The complexity of theorem-proving procedures, *Proc. the 3rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing (STOC'71)*, pp. 151-158, ACM (1971)

[2] Mitchell, D. G. and Selman, B.: Hard and easy distributions of SAT problems. *Proc. AAAI-92*, pp. 459-465 (1992).

[3] 宮城 智輝, 山本 泰生，岩沼 宏治: 時系列信号処理に基づく SAT 解法: wave-SAT ソルバの実現に向けて, 第 26 回人工知能学会全国大会 (2012)

[4] 宮城 智輝, 山本 泰生，岩沼 宏治: フーリエ変換を用いた命題論理式の充足可能性に関する一考察, 第 27 回人工知能学会全国大会 (2013)

[5] 宮城 智輝, 山本 泰生，岩沼 宏治: 大規模 SAT 問題における効率的な非ゼロフーリエ係数の数え上げ, 第 92 回人工知能基本問題研究会 (2014)

[6] Bruck, J.: Chapter 12 in the book "Boolean Models and Methods in Mathematics, Computer Science, and Engineering". Cambridge University Press, pp. 531-553 (2010)

[7] Mossel, E. and O'Donnell, R.: Learning Juntas. *Computer Science Department*, Paper1180, pp. 1-13 (2004)

[8] 飯田 雅臣: フーリエ変換を用いた関連変数の発見法, 電子情報通信学会 信学技報, Vol. 101, No. 431, pp. 43-50, (2001)

[9] 天野 一幸, 瀧本 英二: ブール関数のフーリエ変換とその応用, 電子情報通信学会誌, Vol. 82, No. 12, pp. 1270-1272 (1999)

[10] 鍋島 英知, 宋剛秀: 高速 SAT ソルバーの原理, 人工知能学会誌, Vol. 25, No. 1, pp. 68-76 (2010)

[11] 井上 克巳, 田村直之: SAT ソルバーの基礎, 人工知能学会誌, Vol. 25, No. 1, pp. 57-67 (2010)

[12] 喜安善市: アダマール行列とその応用．電子通信通信学会 (1980)