

効率性と誘因制約を両立可能な物々交換モデルの特徴付け

Characterization of the Exchange Models Satisfying Efficiency and Incentive Constraints

苑田 堯久 東藤 大樹 横尾 真
Akihisa Sonoda Taiki Todo Makoto Yokoo

九州大学大学院システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering at Kyushu University

Individual rationality, Pareto efficiency, and strategyproofness are crucial properties of decision making functions, or *mechanisms*, in social choice literature. In this paper we investigate mechanisms for exchange models where each agent is initially endowed with a set of goods and may have indifference on distinct bundles of goods, and monetary transfers are not allowed. Sönmez (1999) showed that in such models, those three properties are not compatible in general. The impossibility, however, only holds under an assumption on preference domains. The main purpose of this paper is to discuss the compatibility of those three properties when the assumption does not hold. We first establish a preference domain called *top-only preferences*, which violates the assumption, and develop a class of exchange mechanisms that satisfy all those properties. We also find a class of preference domains called *m-chotomous preferences*, where the assumption fails and these properties are incompatible.

1. 序論

Shapley らが提起したハウジングマーケット問題 (housing market problem) [Shapley 74] は, 物々交換モデルにおいて最も基本的な問題である. ハウジングマーケット問題では, 各参加者が部屋などの非分割財を 1 つだけ所持しており, 貨幣によるやり取りを行うことなく財を交換する. 参加者が財に対して厳密な選好順序を持つ場合, Gale の top-trading-cycles (TTC) は, 個人合理性, パレート効率性, 戦略的操作不可能性の 3 性質を同時に満足する唯一のメカニズムであることが知られている [Ma 94]. 参加者の選好に無差別性が含まれる場合の研究も行われており, 上記 3 性質を同時に満足するメカニズムやそのクラスが提案されている [Alcalde-Unzu 11, Jaramillo 12, Saban 13]. また, 各参加者が 1 つ以上の財を所持する物々交換モデルも存在する. このようなモデルにおいて Sönmez は, 選好が含む無差別性に関していくつかの仮定を導入し, それらの仮定のもとで上記 3 性質を同時に満足するメカニズムは存在しないことを示した [Sönmez 99]. とりわけ重要な仮定は, 各参加者は自身の初期保有財以外の任意の財について, 初期保有財と無差別とはならない, というものである.

本論文では, 各参加者が 1 つ以上の財を所持し, かつ選好に無差別性が存在する物々交換モデルを扱う. 特に, Sönmez の仮定の及ばない選好ドメインにおいて, 上記 3 性質を同時に満足可能であるかを議論する. そのような選好ドメインとして, 我々は top-only 選好ドメインと *m-chotomous* 選好ドメインを提案する. Top-only 選好は, 参加者が得た財の中で最も好ましい財により効用が決定し, 上記 3 性質を同時に満足するメカニズムが存在する. このメカニズムは, 文献 [Saban 13] で提案されたメカニズムのクラスを拡張することで得られる. *m-chotomous* 選好は, 参加者の選好が *m* 段階に分かれており, 提案メカニズムにより個人合理性とパレート効率性を両立する割当が可能である. ただし, 戦略的操作不可能性まで含めると, 提案メカニズムだけでなく, あらゆるメカニズムが上記 3 性質を同時に満足することはできない.

連絡先: 苑田 堯久, 九州大学大学院システム情報科学府, 812-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地, (092)802-3576, sonoda@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

2. 準備

本論文で扱う物々交換マーケットのモデルを以下に記す. マーケットに存在する非分割財の集合を K , 参加者の集合を $N = \{1, \dots, n\}$ とする. 各参加者 $i \in N$ には, 非分割財 K の部分集合として初期保有財 $w_i \subseteq K$ が与えられる. 各財は異質財であることを仮定し, 任意の参加者 $i, j (\neq i) \in N$ について $w_i \cap w_j = \emptyset$, $\bigcup_{i \in N} w_i = K$ とする. また, 参加者全員の初期保有財をリスト $w = (w_i)_{i \in N}$ で表現する.

参加者全員に対するすべての実現可能な財の割当を \mathcal{X}_N とする. 参加者 $i \in N$ に対する財の割当は x_i とし, 参加者全員に対する実現可能な割当はリスト $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathcal{X}_N$ で表現する. このとき, 任意の参加者 $i, j (\neq i) \in N$ について $x_i \cap x_j = \emptyset$, $\bigcup_{i \in N} x_i = K$ とする. 任意の初期保有財のリスト w は, 財の割当とみなすことができ $w \in \mathcal{X}_N$ である.

各参加者 $i \in N$ は, 財の集合 K のすべての実現可能な部分集合に対して選好順序 (または単に選好) R_i を持っている. R_i は完全性を満たし, 反射的, 推移的であるものとする. 任意の財の部分集合 $L, L' \subseteq K$ について, LR_iL' は L を L' 以上に好むことを意味する. L を L' よりも厳密に好む場合には LP_iL' , L と L' が無差別な (同程度に好む) 場合には LI_iI と記述する. また, \mathcal{R} をすべての実現可能な選好の集合とし, 参加者全員の選好をリスト $R = (R_i)_{i \in N} \in \mathcal{R}^n$ で表現する. さらに, 特定の参加者 $i \in N$ を除いた選好リストを $R_{-i} = (R_j)_{j \in N \setminus \{i\}} \in \mathcal{R}^{n-1}$ と記述する.

物々交換メカニズム $\varphi: \mathcal{X}_N \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{X}_N$ は, 初期保有財のリスト $w \in \mathcal{X}_N$ と選好のリスト $R \in \mathcal{R}^n$ から, 実現可能な割当 $\varphi(w, R) \in \mathcal{X}_N$ を返す関数である. 物々交換メカニズム φ による参加者 $i \in N$ に対する財の割当は $\varphi_i(w, R)$ と記述する.

続いて, 個人合理性, パレート効率性, 戦略的操作不可能性の定義を行う.

定義 1 (個人合理性) 初期保有財 $w \in \mathcal{X}_N$ のもとで, 割当 $x \in \mathcal{X}_N$ が個人合理性を満たすとき, 任意の参加者 $i \in N$ について $x_i R_i w_i$ が成立する. メカニズム φ が個人合理的であるとは, $\forall N, \forall K, \forall w \in \mathcal{X}_N, \forall R \in \mathcal{R}^n$ について, $\varphi(w, R)$ が, 初期保有財 w のもとで個人合理性を満たすことをいう.

個人合理性を満足する物々交換メカニズムでは、参加者が自身の選好について正直な申告を行う限り、その参加者の効用が減少しないことが保証される。これにより、各参加者は物々交換に参加する誘因を持つ。

定義 2 (パレート効率性) 選好リスト R が与えられたときに、割当 $y \in \mathcal{X}_N$ が割当 $x \in \mathcal{X}_N$ をパレート支配するとは、 $\forall i \in N, y_i R_i x_i$ かつ $\exists j \in N, y_j P_j x_j$ が成立することをいう。 $\forall N, \forall K, \forall w \in \mathcal{X}_N, \forall R \in \mathcal{R}^n$ について、どのような割当 $y \in \mathcal{X}_N$ に対しても物々交換メカニズム $\varphi(w, R)$ がパレート支配されないとき、 φ をパレート効率的であるという。

パレート効率的な物々交換メカニズムは、社会的余剰を最大化するという意味で最適な割当を行う。これ以降は、選好リスト R のもとで、割当 $y \in \mathcal{X}_N$ が割当 $x \in \mathcal{X}_N$ をパレート支配することを $y \rightarrow_R x$ と表現する。

定義 3 (戦略的操作不可能性) $\forall N, \forall K, \forall w \in \mathcal{X}_N, \forall R \in \mathcal{R}^n, \forall i \in N, \forall R'_i \in \mathcal{R}$ について $\varphi_i(w, R) R_i \varphi_i(w, (R'_i, R_{-i}))$ を満たすとき、物々交換メカニズム φ は戦略的操作不可能であるという。

戦略的操作不可能な物々交換メカニズムのもとでは、すべての参加者は自身の選好を正直に申告することが支配戦略となる。

3. 提案メカニズム

本章では、各参加者が1つ以上の財を所持する物々交換モデルにおいて適用可能なメカニズムを提案する。基本的なアイデアは非常に単純である。まずは Algorithm 1 の 2-6 行目で、各参加者 $i \in N$ は $|w_i|$ 人の子参加者の集合 $\{i_j | j \in w_i\}$ に置換される。子参加者 i_j は参加者 i の選好 R_i を引き継ぎ、初期保有財として $j \in w_i$ を持つ。また、 w_{i_j} を子参加者 i_j の所持する財とする。これにより、1人複数財の物々交換マーケットを1人1財の物々交換マーケットとみなすことができる。そのあとは文献 [Saban 13] で提案されたメカニズムを適用する。Algorithm 1 の 7-18 行目は、基本的に文献 [Saban 13] で提案されたメカニズムのクラスを表現している。このメカニズムのクラスは、1人1財の物々交換マーケットにおいて個人合理性とパレート効率性を両立する割当を行う。のちに述べる F-RULE を適切に選択すれば戦略的操作不可能性も満足することができる。

物々交換マーケットは、財を所持した参加者を頂点とする有向グラフで表現される。まずは有向グラフに関する用語をいくつか紹介する。ある有向グラフの任意の2頂点間に有向路が存在するとき、その有向グラフは強連結 (strongly connected) であるという。また、極大で強連結な部分グラフを強連結成分 (strongly connected components) という。任意の有向グラフ上の強連結成分を S とする。 S に含まれる任意の頂点から S に含まれない任意の頂点への有向路が存在しないとき、そのような S をシンク (sink) という。特に、シンクに含まれるすべての頂点が自分自身への有向辺 (自己ループ) を持つとき、そのシンクをターミナルシンク (terminal-sink) という。

次に、提案メカニズムを表現するために必要な5つの関数、TTC-GRAPH, TERMINAL-SINK, CYCLE, UPDATE-TOPS, F-RULE を紹介する。

TTC-GRAPH は、頂点 (子参加者) の集合 N' と、参加者が最も欲しい財の集合のリスト $T = (T_i)_{i \in N}$ が与えられると、

Algorithm 1 New Trading Family

Input: w, R

Output: $\varphi = (\varphi_i)_{i \in N}$

```

1:  $N' \leftarrow \emptyset, K' \leftarrow K$ 
2: for  $i \in N$  do
3:    $\phi_i \leftarrow \emptyset$ 
4:    $T_i \leftarrow \text{UPDATE-TOPS}(R_i, \phi_i, K')$ 
5:   for  $j \in w_i$  do
6:      $N' \leftarrow N' \cup \{i_j\}, \omega_{i_j} \leftarrow j$ 
7:   while  $N' \neq \emptyset$  do
8:      $G \leftarrow \text{TTC-GRAPH}(N', T)$ 
9:     while  $\text{TERMINAL-SINK}(G) \neq \emptyset$  do
10:      for  $i_j \in \text{TERMINAL-SINK}(G)$  do
11:         $\phi_i \leftarrow \phi_i \cup \{\omega_{i_j}\}$ 
12:         $N' \leftarrow N' \setminus \{i_j\}, K' \leftarrow K' \setminus \{\omega_{i_j}\}$ 
13:      for  $i \in N$  do
14:         $T_i \leftarrow \text{UPDATE-TOPS}(R_i, \phi_i, K')$ 
15:       $G \leftarrow \text{TTC-GRAPH}(N', T)$ 
16:       $G \leftarrow \text{F-RULE}(G), \omega' \leftarrow w$ 
17:      for  $(i_j, i'_j) \in \text{CYCLE}(G)$  do
18:         $\omega_{i_j} \leftarrow \omega'_{i'_j}$ 
19: return  $\varphi = (\phi_i)_{i \in N}$ 

```

それをもとに有向グラフ G を構成する。つまり、マーケットに残っているすべての子参加者 $i_j \in N'$ と、 T_i に含まれている財を所持するすべての子参加者 i'_j に対して、 i_j から i'_j への有向辺を返す。TERMINAL-SINK は与えられた有向グラフ G に対して、ターミナルシンクに含まれている頂点の集合を返す。CYCLE は与えられた有向グラフ G に対して、サイクルを構成するすべての有向辺を返す。

UPDATE-TOPS は、参加者の選好 R_i 、現在所持している財 ϕ_i から、マーケットに残っている財 K' の中で、参加者 i にとって最も好ましい財の集合 T_i を求める関数である。1人の参加者が複数の財を所持する場合、アルゴリズムの動作中に参加者の最も欲しい財が変化する可能性がある。そのため、この関数は提案メカニズムにおいて重要な役割を果たす。たとえば、何も財を割り当てられていなければ財 a が欲しいが、別の b という財を割り当てられたので財 a がなくても構わないという状況が考えられる。この関数の返り値は選好ドメインの特性によるため、正確な記述は4章と5章で述べる。

F-RULE [Saban 13] は、集合 T_i からただ1つの財を選ぶ。そのためならば物々交換を開始してからあらゆる情報 (履歴) を利用可能であるが、簡単のため F-RULE の引数はグラフ G のみにしている。F-RULE は、アルゴリズムの停止性や戦略的操作不可能性を満足するために適切に設定する必要がある。本論文では、文献 [Alcalde-Unzu 11] で提案された top trading absorbing set (TTAS) を F-RULE として使用することにする。TTAS を表現する F-RULE を以下に示す。

K に属する個々の財に対して共通の優先順位が与えられる。すべての子参加者 i_j は、優先順位にしたがって T_i の中から今までに所持したことのない財を選択する。もし、 T_i に含まれるすべての財を m 回以上所持したことがあれば、 $m+1$ 回所持したことのない財を選択する。

ほかにも、top cycles rule (TCR) [Jaramillo 12] や highest priority object (HPO) rule [Saban 13] を F-RULE として使用することもできる。

4. Top-only 選好ドメイン

本章では、top-only 選好ドメインの定義を行う。また、前章で提案したメカニズムの動作例を説明し、その特徴について述べる。

定義 4 (Top-only 選好) 選好 R_i から導かれる個々の財に対する厳密な選好順序を \succ_i とする。 \succ_i のもとで、財の集合 L に含まれる最も好ましい 1 つの財を $t(\succ_i, L)$ と表す。任意の財の部分集合 $L, L' \subseteq K$ について、次の条件を満たす選好 R_i の集合を top-only 選好ドメイン \mathcal{R}_T という。

- (i) $LP_iL' \Leftrightarrow [t(\succ_i, L) \succ_i t(\succ_i, L') \text{ or } (t(\succ_i, L) = t(\succ_i, L'), L' \text{ and } |L| > |L'|)]$,
- (ii) $LI_iL' \Leftrightarrow [t(\succ_i, L) = t(\succ_i, L') \text{ and } |L| = |L'|]$.

直感的には、ある参加者 i が財の部分集合 $L \subseteq K$ を手に入れたとき、その参加者の効用は L の中で最も好ましい財 $t(\succ_i, L)$ によって決定する。ただし、残りの財についても、参加者 i に一定の効用を与える。Top-only 選好の具体例として、上映日時が被った異なる映画のチケットを複数枚所持している状況が考えられる。この場合、実際に観ることができる映画は 1 つだけであるため、一番観たいと思う映画のチケットさえ持っていればよい。残りのチケットに関して、払い戻しを行えば 1 枚につき一定の金額を得ることができる。

また、提案メカニズムの UPDATE-TOPS 関数は、top-only 選好ドメインにおいて以下のように定式化される。

$$\text{UPDATE-TOPS}(R_i, \phi_i, K') = \begin{cases} \{t(\succ_i, K')\} & \text{if } \phi_i = \emptyset, \\ K' & \text{otherwise.} \end{cases}$$

アルゴリズムの各ラウンドにおいて、top-only 選好ドメインにおける UPDATE-TOPS 関数は、(i) 参加者が何か 1 つでも財を得るまでは、マーケットに残っている財の中で最も好ましい財を、(ii) 参加者が何か 1 つでも財を得たら、マーケットに残っているすべての財を T_i として返す。実際に top-only 選好では、マーケットに存在する最も好ましい財を得たエージェントは、残りの財に対して無差別な選好を持つ。パレート効率性を達成するためには、UPDATE-TOPS 関数により、動的に変化する参加者の選好を考慮しなければならない。

例 1 Top-only 選好ドメインにおける提案メカニズムの動作例を記す。参加者の集合を $N = \{1, 2\}$ 、財の集合を $K = \{a, b, c\}$ 、初期保有財を $w = (\{a, b\}, \{c\})$ 、参加者の選好を $R = (R_1, R_2) \in \mathcal{R}_T^2$ とする。 R_1, R_2 に対応する個々の財の選好順序を \succ_1, \succ_2 とし、それぞれ $R_1 : a \succ_1 b \succ_1 c$, $R_2 : b \succ_2 c \succ_2 a$ であるとする。 F-RULE 関数は前章で述べた TTAS を用いるものとする。今回の例では、個々の財に対する優先順位は必要ない。

図 1(a1) は、Algorithm 1 の 8 行目で構成されるグラフ G である。 a のみを含むターミナルシンクが存在するため、10–12 行目で子参加者 1_a に財を割り当て、マーケットから取り除く。 13–14 行目の UPDATE-TOPS 関数により T_1 が更新され、15 行目で子参加者 1_b は、 b と c の両方を指す。ここで、子参加者 1_b はまだ一度も財 c を所持したことがない。したがって、16 行目の F-RULE 関数は、子参加者 1_b に c を指させる (図 1(b1))。

17–18 行目では、財 b と c が交換され (この時点ではまだマーケットから取り除かれない)、次のラウンド (7 行目) へと移行する。子参加者 2_c は現在所持している b のみを指す (ター

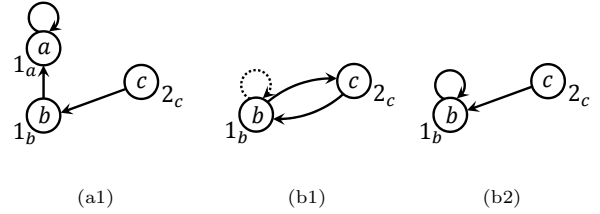


図 1: 提案メカニズムの動作例

ミナルシンクである) ため、子参加者 2_c に b を与えてマーケットから取り除く。残った c は子参加者 1_b に与えてマーケットから取り除く。結果として、参加者 1 と 2 はそれぞれ財 $\{a, c\}$ と $\{b\}$ を得る。これは、選好 R_1, R_2 のもとでパレート効率的な割当である。

ちなみに、UPDATE-TOPS 関数がなければ、最終的な割当がパレート効率的である保証はない。上記の例で、子参加者 1_a が財 a を持ってマーケットから出ていったあとの状況を考える (図 1(b2))。UPDATE-TOPS 関数がなければ、子参加者 1_b は自分が所持している b だけを指す。そのため子参加者 1_b はターミナルシンクを構成してマーケットから取り除かれる。最終的な割当は $(\{a, b\}, \{c\})$ となるが、これは割当 $(\{a, c\}, \{b\})$ にパレート支配される (Top-only 選好のもとで、参加者 1 は $\{a, b\}$ と $\{a, c\}$ はどちらでもよい)。

続いて top-only 選好ドメインにおける提案メカニズムの性質を述べる。まず top-only 選好ドメインにおいて、提案メカニズムは個人合理性を満足する。なぜならば、(i) 各参加者は初期保有財以上に好む財しか指さず、(ii) 各参加者に割り当てられる財の個数は初期保有財の個数と等しいためである。

定理 1 Top-only 選好ドメインのもとで提案メカニズムは個人合理性を満足する。

次に、パレート効率性と戦略的操作不可能性を証明する上で重要な 2 つの性質を紹介する。

性質 1 $\forall N, \forall K, \forall R \in \mathcal{R}_T^N, \forall z \in \mathcal{X}_N$ について、 $y \rightarrow_R z$ なる割当 $y \in \mathcal{X}_N$ が存在するならば、 $x \rightarrow_R z$ かつ $\forall i \in N, |x_i| = |z_i|$ を満足する別の割当 $x \in \mathcal{X}_N$ も存在する。

性質 2 提案メカニズムによる財の割当を φ とする。また、 $\forall N, \forall K, \forall w \in \mathcal{X}_N, \forall R \in \mathcal{R}_T^N, \forall i \in N$ について $D_i := \{g \in K \mid g \succ_i t(\succ_i, \varphi_i(w, R))\}$ を定義する。このとき、任意の参加者 $i \in N$ の任意の $g \in D_i$ について $g = t(\succ_i, \varphi_i(w, R))$ を満たすような参加者 $i' \neq i$ が存在する。

性質 2 は、任意の参加者 i が提案メカニズム φ によって得た最も好ましい財 $t(\succ_i, \varphi_i(w, R))$ よりも良い財は、ほかの参加者にとっての最も好ましい財であることを意味する。

紙面の都合により証明は割愛するが、上記 2 つの性質を用いることでパレート効率性と戦略的操作不可能性が示される。

定理 2 Top-only 選好ドメインのもとで提案メカニズムはパレート効率的である。

定理 3 Top-only 選好ドメインのもとで提案メカニズムは戦略的操作不可能である。

5. m -chotomous 選好ドメイン

本章では、 m -chotomous 選好ドメインの定義を行い、その性質を述べる。

定義 5 (m -chotomous 選好) 任意の財の部分集合 $L, L' \subseteq K$ と、財の集合 K に対する $m \in \{1, \dots, |K|\}$ 個の分割 (A_1, A_2, \dots, A_m) を考える。次の条件を満たす選好 R_i の集合を m -chotomous 選好ドメイン \mathcal{R}_m という。

$$(i) LP_i L' \Leftrightarrow [\exists q \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \{|A_q \cap L| > |A_q \cap L'| \text{ and } (\forall q' \in \{1, \dots, q-1\}, |A_{q'} \cap L| = |A_{q'} \cap L'|)],$$

$$(ii) LI_i L' \Leftrightarrow [\forall q \in \{1, \dots, m\}, |A_q \cap L| = |A_q \cap L'|].$$

m -chotomous 選好ドメインは、よく用いられる加算的な選好ドメインに制限を加えたものとなっている。そのため、基本的にはより多くの財を得ることができれば効用は増加する。大きな違いは、 A_{q+1} 以降に属する財をどんなに多く手に入れることができたとしても、 A_q に属する 1 つの財を所持している方が好ましいという点である。 m -chotomous 選好ドメインは、任意の整数 $m \in \{1, \dots, |K| - 1\}$ について Sönmez の仮定に違反する。ただし $|K|$ -chotomous 選好ドメインに限っては、個々の財に対して明確な選好順序を持つことになるため Sönmez の仮定を満足する。

m -chotomous 選好ドメインは、代替不可能な財や、財同士に支配関係がある状況を表現している。たとえば、特定の資格などを持った人物を雇用しようとするとき、このような状況にあてはまる。運転免許で例えるならば、引越し業者やバス会社は、普通免許を持っている人物よりも大型免許を持っている人物を好む。普通免許を持っている人物をいくら雇ったとしても、大型トラックやバスを運転することはできないからである。

次に m -chotomous 選好ドメインにおける UPDATE-TOPS 関数の定式化を行う。

$$\text{UPDATE-TOPS}(R_i, \phi_i, K') = \{g \in K' \mid \forall h \in K', \{g\} R_i \{h\}\}$$

m -chotomous 選好ドメインにおける UPDATE-TOPS 関数は、マーケットに残っている財の中から、参加者が最も好んでいる財の集合（無差別なクラス）を返す。Top-only 選好ドメインの場合と異なり、返り値は ϕ_i にはよらないことに注意したい。また top-only 選好ドメインの場合と同様の理屈で、 m -chotomous 選好ドメインも個人合理性を満足する。

定理 4 $\forall K, \forall m \in \{1, \dots, |K|\}$ について、 m -chotomous 選好ドメインのもとで提案メカニズムは個人合理性を満足する。

さらに m -chotomous 選好ドメインにおいても性質 1 と同様のことが成立し、パレート効率性を証明することができる。

性質 3 $\forall N, \forall K, \forall m \in \{1, \dots, |K|\}, \forall R \in \mathcal{R}_m^n, \forall z \in \mathcal{X}_N$ について、 $y \rightarrow_R z$ なる割当 $y \in \mathcal{X}_N$ が存在するならば、 $x \rightarrow_R z$ かつ $\forall i \in N, |x_i| = |z_i|$ を満足する別の割当 $x \in \mathcal{X}_N$ も存在する。

定理 5 $\forall K, \forall m \in \{1, \dots, |K|\}$ について、提案メカニズムは m -chotomous 選好ドメインのもとでパレート効率的である。

しかし、戦略的操作不可能性についてはどのようなメカニズムを用いても満足することはできない。

定理 6 $\forall K, \forall m(3 \leq m \leq |K|)$ について、 m -chotomous 選好ドメインのもとで個人合理性、パレート効率性、戦略的操作不可能性を同時に満たす物々交換メカニズムは存在しない。

たとえば参加者 1 が $\{a\}$ 、参加者 2 が $\{b, c, d\}$ を所持し、2 人の選好が $R_1 : (\{b\}, \{a, c\}, \{d\})$ 、 $R_2 : (\{a, b\}, \{c\}, \{d\})$ という分割に対応している場合に定理 6 を示すことができる。これをもとに任意の $m(3 \leq m \leq |K| - 1)$ について定理 6 が示される。 $m = |K|$ のときは、個々の財に対して明確な選好順序を持つことになるため Sönmez による不可能性を適用することができる。一方で $m = 1$ のときは何も交換を行わないメカニズムが 3 性質を同時に満足することができる。 $m = 2$ のときについても 3 性質を同時に満足するメカニズムが存在する可能性があるが、詳細は明らかになっていない。

6. 結論

本論文では、個人合理性、パレート効率性、戦略的操作不可能性を同時に満足可能な選好ドメインについて議論した。Top-only 選好ドメインのもとでは、提案メカニズムにより上記 3 性質を同時に満足可能である。また、任意の整数 $m(3 \leq m \leq |K|)$ について m -chotomous 選好ドメインのもとでは上記 3 性質を同時に満足可能なメカニズムは存在しない。本研究は Sönmez の研究の補完的な役割を果たした。

今後の課題として、3 性質を同時に満足する物々交換メカニズムが存在可能な選好ドメインについて、完全な特徴付けを行うことが挙げられる。特に、2-chotomous 選好ドメインにおける戦略的操作不可能性は明らかにされていない。架空名義操作や財の秘匿など、戦略的操作以外の誘因について検証することも考えられる。

参考文献

- [Alcalde-Unzu 11] Alcalde-Unzu, J. and Molis, E.: Exchange of indivisible goods and indifferences: The Top Trading Absorbing Sets mechanisms, *Games and Economic Behavior*, Vol. 73, No. 1, pp. 1–16 (2011)
- [Jaramillo 12] Jaramillo, P. and Manjunath, V.: The difference indifference makes in strategy-proof allocation of objects, *Journal of Economic Theory*, Vol. 147, No. 5, pp. 1913–1946 (2012)
- [Ma 94] Ma, J.: Strategy-proofness and the strict core in a market with indivisibilities, *International Journal of Game Theory*, Vol. 23, No. 1, pp. 75–83 (1994)
- [Saban 13] Saban, D. and Sethuraman, J.: House Allocation with Indifferences: A Generalization and a Unified View, in *Proceedings of the Fourteenth ACM Conference on Electronic Commerce*, EC '13, pp. 803–820, New York, NY, USA (2013), ACM
- [Shapley 74] Shapley, L. and Scarf, H.: On cores and indivisibility, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 1, No. 1, pp. 23–37 (1974)
- [Sönmez 99] Sönmez, T.: Strategy-proofness and Essentially Single-valued Cores, *Econometrica*, Vol. 67, No. 3, pp. 677–689 (1999)