1M2-3

効率的な資源利用のための利用予測申告と実行動に関する一考察

A study on an agent's prediction and action to use resources effectively

不動 顕[*1] 岡 雅晃[*2] 東藤 大樹[*3] 櫻井 祐子[*4] 横尾 真[*3]
Akira Fudo Masaaki Oka Taiki Todo Yuko Sakurai Makoto Yokoo

[*1]九州大学 Kyushu University
[*2]九州大学大学院システム情報科学府 ISEE, Kyushu University
[*3]九州大学大学院システム情報科学研究院 ISEE, Kyushu University
[*4]九州大学大学院システム情報研究院，JST さきがけ ISEE, Kyushu University, JST PRESTO

We investigate a mechanism for giving a right incentive to each agent to predict her future actions and to declare her predictions truthfully. Obtaining an accurate prediction of customer actions is valuable for certain providers who are required to meet customer demands. If an agent predicts an external event she cannot control, any proper scoring rule can give a right incentive. In this paper, an agent needs to predict her action she can control. We prove that a mechanism that utilizes any strictly proper scoring rule can satisfy our goal, assuming an agent can find an optimal declaration that maximizes her expected utility. This declaration is *self-fulfilling*; if she acts to maximize her utility, the probabilistic distribution of her action matches her declaration, assuming her prediction about the external event is correct. Furthermore, we develop an approximation algorithm, which efficiently finds a self-fulfilling semi-optimal declaration.

1. 序論

近年，予測市場やクラウドソーシングなどの群衆の知識を活用するサービスの発展に伴い，エージェントから確率的な情報を引き出すためのメカニズム設計の研究が盛んにおこなわれている [Chen 10, Conitzer 09, Law 11, Witkowski 12]. 本論文では，エージェント自身の将来の行動予測を申告させ，その申告通りに行動することが最適となるようなメカニズムについて検討を行う．顧客の需要を満たす必要がある電力会社やバス会社にとって，エージェントの将来の行動，たとえば，各時間帯に対する利用確率に関して正確な予測を得ることは有益であると考えられる．

本論文では，明日の天気予報を専門家に正直に申告させるために提案されている strictly proper scoring rule [Brier 50, Gneiting 07, Savage 71] の適用を検討する．Strictly proper scoring rule は，従来，予測対象を予測者であるエージェントが操作できない状況を対象としてきた．一方，本論文ではエージェント自身の行動 (利用) 予測を申告させるため，実際の行動を選択する際，予測通りに行動を選択することが最適とは限らない．このように，予測対象をエージェント自らで操作可能な場合において，strictly proper scoring rule がどのように機能するかを検討する．より具体的には，strictly proper scoring rule を適用することで，予測通りに行動することが最適戦略となる，自己充足性 (self-filling) を満たすことが可能かどうかを示す．これまで，strictly proper socring rule に関する研究は多数存在するが，本論文のようにエージェント自身の将来を予測させる状況に適用されることはなかった．

本論文ではまず，エージェントが期待利得を最大化する申告を求解可能な場合，任意の strictly proper scoring rule は自己充足性を満たすことを証明する．さらに，エージェントにとって期待利得を最大化する申告を求解するためには莫大な計算量が必要となるため，高速に準最適な申告を求解可能な近似アルゴリズムを提案する．この近似アルゴリズムで得られる準最適な申告は自己充足性を満たすことを保証することを示す. 最後に，近似アルゴリズムが非常に少ない反復回数で求解可能であることと，得られる期待利得は最適な値と比較して 92% 以上の品質であることを計算機実験により示す.

連絡先: 櫻井祐子，九州大学大学院システム情報研究院，JST さきがけ，ysakurai@inf.kyushu-u.ac.jp

2. 準備

本章では，本論文で扱う問題設定を説明する．エージェントが選択可能な行動の集合を $M = \{1, \ldots, m\}$ と表し，エージェントは M から翌日の行動 i を選ぶとする．たとえば，エージェントが翌日のいつ洗濯機を使うかを決める場合，M の要素は “昼” や “夜” といった時間帯の選択肢とみなせる．エージェントが予測するイベントを示すシナリオの集合を $N = \{1, \ldots, n\}$ と表し，N から翌日発生するシナリオ j が選ばれるとする．たとえば翌日の天気を予測する場合，シナリオを “晴れ”，“曇り”，“雨” とみなせる．また，シナリオの発生確率は n 個の要素からなる列ベクトル $p = {}^t(p_1, \ldots, p_n)$ を用いて表す．p_j はシナリオ j の発生確率とし，任意の $j \in N$ について $0 \leq p_j \leq 1$ および $\sum_{j \in N} p_j = 1$ が成り立つとする．たとえば天気の例で考える場合，$p = {}^t(0.7, 0.2, 0.1)$ とすると，エージェントは翌日の天気を 70% の確率で晴れ，20% の確率で曇り，10% の確率で雨と予測しているとみなせる．

エージェントは発生したシナリオと選択した行動の組によってグロス効用（gross utility）を得られるとする．本論文においてグロス効用 G は $m \times n$ の行列を用いて次のように表す.

$$G = \begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m,1} & \cdots & g_{m,n} \end{pmatrix}$$

$g_{i,j}$ は，シナリオ j においてエージェントが行動 i を選択したときのグロス効用の値を表す．また G は列ベクトルからなる配列 $G = (g_1, \ldots, g_n)$ とも扱う．g_j はシナリオ j におけるエージェントのグロス効用を表す．例として，エージェントが洗濯機を昼・夜どちらに使うかを申告する場合におけるグロス効用 G を考える．エージェントが翌日の天気が晴れならば昼，雨ならば夜に使いたい，曇りならば昼でも夜でも構わないと思っているとき，グロス効用 G は次の表のように表せる．

	晴れ	曇り	雨
昼	10	5	0
夜	0	5	8

本論文ではエージェントはリスク中立的であり，グロス効用は準線形 (quasi-linear) であると仮定する．すなわちエージェントの効用はグロス効用と報酬の和であるとする．

また本論文では，エージェントの行動確率を m 個の要素からなる列ベクトルを用いて $\pi = {}^t(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ と表す．π は任意の $i \in M$ について $0 \leq \pi_i \leq 1$ および $\sum_{i \in M} \pi_i = 1$ が成り立つとする．π_i はエージェントが行動 i を選ぶ確率とみなせる．このような π の集合を Π とする．

次に各シナリオにおけるエージェントの行動戦略について考える．この行動戦略は確率的なものでも構わないため，任意のシナリオ j におけるエージェントの行動戦略は行動戦略ベクトル $s_j \in \Pi$ で表すことができる．

N に含まれるすべてのシナリオに対するエージェントの行動戦略は，行動戦略ベクトルからなる配列 S として $S = (s_1, \ldots, s_n)$ と表す．s_j は Π の要素であるため，エージェントの行動戦略 S は $m \times n$ の行列を用いて次のように表す．

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & \ldots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m,1} & \ldots & s_{m,n} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{S}$ をすべての行動戦略の集合とする．エージェントが行動戦略 S をとるとき，エージェントが各行動を選ぶ確率は Sp となる．

翌日の洗濯機の使用時間を予測・申告させる例を用いて考える．前述よりエージェントは翌日晴れならば昼，雨ならば夜，曇りならば昼か夜に半々の確率で使うと考えられるため，エージェントの行動戦略 S は次の表のように表せる．

	晴れ	曇り	雨
昼	1.0	0.5	0
夜	0	0.5	1.0

したがって "晴れ"，"曇り"，"雨" の確率が $p = {}^t(0.7, 0.2, 0.1)$ となるとすると，エージェントが行動戦略 S に基づいて各行動を選ぶ確率は $Sp = {}^t(0.8, 0.2)$ となる．

次に，エージェントが行動戦略 S をとるときの期待グロス効用について考える．まず $G \otimes S$ を n 個の要素からなる行ベクトル $(v_1, \ldots, v_n)$ とし，$v_j = g_j \cdot s_j$ と表すと，任意の v_j は，シナリオ j が発生した場合において行動戦略 S をとるエージェントが得られるグロス効用を表す．したがって $(G \otimes S)p$ は行動戦略 S におけるエージェントの期待グロス効用となる．具体的に前述の設定を用いて考えると，$G \otimes S = (10, 5, 8)$ となるため，$p = {}^t(0.7, 0.2, 0.1)$ より，このエージェントの期待グロス効用は $(G \otimes S)p = 8.8$ となる．

本論文の問題設定において，供給者は各エージェントに自身の行動確率 $\pi \in \Pi$ を申告してもらう．その申告に従って，供給者はエージェントに報酬を支払う．この報酬を決める報酬関数 $r(\cdot)$ はエージェントからの申告を入力として，各行動に対する報酬の値をベクトルとして返す関数であり，$r(\pi) = {}^t(r_1, \ldots, r_m)$ と表す．r_i は，エージェントが行動 i を選択したときに支払われる報酬額を表す．本論文では，エージェントは報酬関数を知っているとし，報酬関数はエージェントが申告した時点で固定されるとする．報酬関数として strictly proper scoring rule を用いた場合，報酬関数は次の性質をもつ．

定義 1 (Strictly proper scoring rule) $r(\cdot)$ が *strictly proper scoring rule* であるとき，$\pi \neq \pi'$ である任意の π, π' について $\pi \cdot r(\pi) > \pi \cdot r(\pi')$ が成り立つ．

すなわち strictly proper scoring rule において，自身の予測を正直に申告することでエージェントは報酬の期待値を最大化できる．ここで spherical proper scoring rule (SPSR) と呼ばれる strictly proper scoring rule の代表例を示す．

$$r_i = \alpha \frac{\pi_i}{\sqrt{\sum_{1 \leq k \leq m} \pi_k^2}}$$

α は報酬の上限である．例として $\pi = {}^t(0.8, 0.2)$，$\alpha = 5$ とすると，報酬関数 SPSR は $r(\pi) = {}^t(4.85, 1.21)$ となる．

次にエージェントが行動戦略 S をとり，π を申告したときエージェントの期待利得 $u(S, \pi)$ を次のように表す．

$$\begin{aligned} u(S,\pi) &= \sum_{j \in N} p_j (g_j \cdot s_j + r(\pi) \cdot s_j) \\ &= \sum_{j \in N} p_j (g_j \cdot s_j) + \sum_{j \in N} p_j (r(\pi) \cdot s_j) \\ &= (G \otimes S)p + (Sp) \cdot r(\pi) \end{aligned}$$

翌日の洗濯機の使用時間を予測・申告させる例では，$u(S, \pi) = 8.8 + {}^t(0.8, 0.2) \cdot {}^t(4.85, 1.21) = 12.92$ となる．

ここで，申告と行動戦略がもつ性質について定義する．

定義 2 (真実申告 (Truthfulness)) 行動戦略 S と申告 π が $Sp = \pi$ を満たすとき，S と π は真実申告であるとする．

定義 3 (自己充足 (Self-fulfillingness)) 行動戦略 S と申告 π が真実申告であり $\forall j, \forall \pi'$, $g_j \cdot s_j + r(\pi) \cdot s_j \geq g_j \cdot \pi' + r(\pi) \cdot \pi'$ が成り立つとき，S と π は自己充足的であるとする．

したがって行動戦略 S と申告 π が自己充足的であるとき，エージェントはシナリオが発生した後に行動戦略を変える誘因をもたないため，申告通りの確率で行動する．すなわちエージェントの実際の行動確率が $Sp = \pi$ となる．翌日の洗濯機の使用時間を予測・申告させる例において，行動戦略 S と申告 $\pi = {}^t(0.8, 0.2)$ は真実申告であるが，自己充足的ではない．天気が曇りのとき，エージェントの効用は ${}^t(5, 5) + {}^t(4.85, 1.21) = {}^t(9.85, 6.21)$ となり，昼か夜に半々の確率で使うより，昼に使う方がエージェントは高い効用を得られる．

次に本論文で解くべき問題を述べる．エージェントは本日，$G, p, r(\cdot)$ に基づいて，$\pi^* = \arg\max_{\pi \in \Pi} (\max_{S \in \mathbf{S}} u(S, \pi))$ をみつけ，供給者に申告する必要がある．そして翌日，発生したシナリオ j および g_j，$r(\pi^*)$ に基づく $s_j^* = \arg\max_{s_j \in \Pi} (g_j +$

$r(\pi^*)) \cdot s_j$ にしたがって行動する必要がある．供給者はエージェントが自己充足的な申告 π が最適な申告となる適切な報酬関数 $r(\cdot)$ を決定する必要がある．この $r(\cdot)$ において，エージェントが最適な申告をみつけられない場合でも，エージェントが準最適で自己充足的な申告 π' をみつけられる必要がある．

3. Proper scoring rule の適用可能性に対する分析

本論文では以下のメカニズムを検討する．供給者はエージェントに翌日の行動確率に関する予測を申告してもらい，その後，供給者はエージェントの申告と実際の行動に応じて，エージェントに strictly proper scoring rule に基づいた報酬を与える．本章ではこのメカニズムの特性および，エージェントが最適な申告と行動戦略を得るために解決すべき問題を分析する．

2. 章より，最適な申告 $\pi^* = \arg\max_{\pi\in\Pi}(\max_{S\in\mathbf{S}} u(S,\pi))$ をみつけることがエージェントの目的である．π を固定するとエージェントの効用が決まるため，期待利得を最大化する行動戦略も容易にみつけられる．しかし π は無限個存在するため，すべてを調べることは不可能である．

ここでエージェントが最適な申告 π^* と行動戦略 S^* をみつけられると仮定する．このとき，申告 π^* および行動戦略 S^* は自己充足的であることを示す.

定理 4 S^*，π^* がエージェントの期待利得を最大化するとき，S^*，π^* は自己充足的である．

証明 まず S^* と π^* が真実申告であることを示す．$S^*p^* \neq \pi^*$ と仮定すると，$u(S^*, S^*p)$ は行動戦略 S^* をとるエージェントが π^* のかわりに S^*p を申告した場合の期待利得となる．Strictly proper scoring rule の性質より $u(S^*,S^*p) - u(S^*,\pi) = (S^*p)\cdot r(S^*p) - (S^*p)\cdot r(\pi) > 0$ となるため $u(S^*,S^*p) > u(S^*,\pi)$ が成り立つ．これは S^*，π^* が最適であるという仮定に反する．

次に S^*，π^* が自己充足的であることを示す．$g_j\cdot\pi' + r(\pi^*)\cdot\pi' > g_j\cdot s_j^* + r(\pi^*)\cdot s_j^*$ を満たす $j \in N$，π を仮定する．ここで行動戦略 S^* の j 番目の列が π' に置き換わった行動戦略 S' を考える．このとき $u(S',\pi^*) > u(S^*,\pi^*)$ が成り立つ．これは S^*，π^* が最適であるという仮定に反する． □

これは，以下のように一般化できる．

定理 5 $\forall S \in \mathbf{S}, \forall\pi$ において，$Sp \neq \pi$, であるとき $u(S,Sp) > u(S,\pi)$ が成り立つ．

証明 （左辺）−（右辺）より $u(S,Sp) - u(S,\pi) = (Sp)\cdot r(Sp) - (Sp)\cdot r(\pi)$ となる．これは strictly proper scoring rule の性質から 0 より大きい． □

定理 5 より，エージェントが行動戦略 S を用いるならば，真実申告が最適であるため，エージェントは最適な申告をみつけられる．したがって，エージェントは π^* を探すかわりに，期待利得を最大化する行動戦略 $S^* = \arg\max_{S\in\mathbf{S}} u(S,Sp)$ を探すことで最適な申告をみつけられる．しかし $|\mathbf{S}|$ も無限であるため，全てを調べることは不可能である．この問題を解決するために，有限個の要素からなる行動戦略の部分集合を考える．

定義 6 (決定的な行動戦略 (Deterministic strategy)) 行動戦略ベクトル s_j が要素としてある *1* 要素で *1* の値をとり，他の要素では *0* の値をとるとき，s_j は決定的であるとし，S に含まれるすべての行動戦略ベクトルが決定的であるとき，S は決定的な行動戦略であるとする．

エージェントがとりうるすべての決定的な行動戦略の集合を $\mathbf{S_d}$ とする．決定的な行動戦略について，次の定理が成り立つ．

定理 7 $\forall S \in \mathbf{S}, \forall\pi$ において，$u(S',\pi) \geq u(S,\pi)$ を満たす $S' \in \mathbf{S_d}$ が存在する．

証明 π を固定した状態を考える．このとき任意のシナリオ $j \in N$ について $g_j + r(\pi)$ が最大となる行動を i とする行動戦略 S' を考える．つまり S' を構成する任意の行動戦略ベクトル s_j は i 番目の要素で 1 をとり，他の要素が 0 となる決定的な行動戦略ベクトルである．このとき任意の S に対して，明らかに $u(S',\pi)$ は，エージェントにとって $u(S,\pi)$ と少なくとも同程度によいものである． □

決定的な行動戦略の具体例を，2. 章にて用いた翌日の洗濯機の使用時間を予測・申告させる例において考える．申告 $\pi = {}^t(0.8, 0.2)$ とし，決定的な行動戦略 S' を以下とする．

	晴れ	曇り	雨
昼	1.0	1.0	0
夜	0	0	1.0

このとき $u(S',\pi) = 8.8 + {}^t(9.9, 0.1)\cdot{}^t(4.85, 1.21) = 13.29$ となり $u(S,\pi) = 12.92$ よりも大きくなる．

定理 7 より，エージェントはシナリオが発生した後に非決定的な行動戦略を用いる必要はない．しかし行動戦略は申告の決定に影響を与え，申告は報酬の決定に影響を与える．そのためエージェントは，非決定的な行動戦略により期待利得を改善できる可能性がある．次の定理において，エージェントは探索空間を決定的な行動戦略に限定してよいことを示す.

定理 8 行動戦略 $\hat{S} = \arg\max_{S\in\mathbf{S_d}} u(S,Sp)$ であるとき，$\forall S \in \mathbf{S}, \forall\pi$, $u(\hat{S},\hat{S}p) \geq u(S,\pi)$ が成り立つ．

証明 $u(\hat{S},\hat{S}p) < u(S,\pi)$ となる行動戦略 S，申告 π が存在すると仮定する．このとき定理 7 より，$u(S',\pi) \geq u(S,\pi)$ を満たす $S' \in \mathbf{S_d}$ が存在する．さらに定理 5 より，$u(S',S'p) \geq u(S',\pi)$ が成り立つ．したがって，$u(S',S'p) > u(\hat{S},\hat{S}p)$ となるが，これは $\hat{S}$ の選び方に反する． □

定理 8 は $\hat{S} = S^*$ および $\pi^* = S^*p$ が成り立つことを意味している．したがって $\mathbf{S_d}$ は有限であるため $\hat{S} = S^*$ をみつけることができる．前述で用いた翌日の洗濯機の使用時間を予測・申告させる例で考えると決定的な行動戦略 S' をとり，$S'p$ を申告した場合 $u(S',S'p) = 8.8 + {}^t(0.9, 0.1)\cdot{}^t(4.97, 0.55) = 13.33$ となる．

行動戦略集合 $\mathbf{S_d}$ に含まれる要素は $|\mathbf{S_d}| = m^n$ である．そのため m, n の増加にしたがい，$\hat{S}$ をみつけることが困難になる．したがって，準最適な行動戦略を効率的に見つける近似アルゴリズムを提案する．この近似アルゴリズムは，繰り返し数の増加に伴い，解を改善することを保証する．

定理 9 近似アルゴリズムは有限回の繰り返しで終了し，得られる準最適な行動戦略 S' と申告 $S'p$ は自己充足的である．

証明 近似アルゴリズムから得られる π の系列を $\pi_1, \pi_2, \ldots$, S' の系列を $S'_1, S'_2, \ldots$ とすると $S'_k p = \pi_{k+1}$ なので $u(S'_1,\pi_1) < u(S'_1,\pi_2) \leq u(S'_2,\pi_2) < u(S'_2,\pi_3) \leq u(S'_3,\pi_3) < \ldots$ となる．$S'_1, S'_2, \ldots$ は有限集合 $\mathbf{S_d}$ の要素であるため，この手続きは有限の繰り返しで終了する．

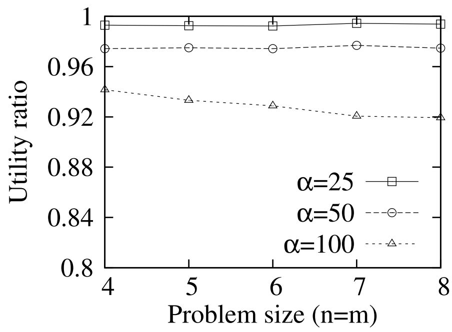

図 1: 最適と比較した近似アルゴリズムの期待利得比

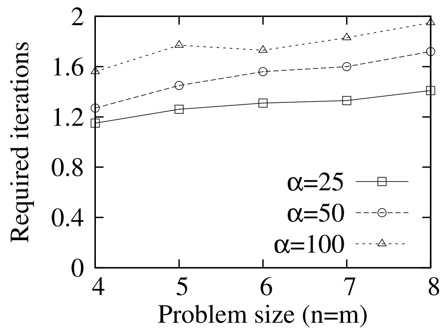

図 2: 近似アルゴリズムの反復回数

Algorithm 1 準最適な行動戦略をみつける近似アルゴリズム

1: 初期値として π を適当に選ぶ.
2: 任意のシナリオ $j \in N$ について $g_j + r(\pi)$ が最大となる行動 i を選ぶ確率を 1 とし，他の行動を選ぶ確率を 0 とする決定的な行動戦略ベクトル s_j から構成される決定的な行動戦略を S' とする
3: $S'p = \pi$ なら S' を返す．そうでなければ $\pi \leftarrow S'p$ として 2 に戻る．

定義より，$S'p$ と S は真実申告である．また，$g_j \cdot \pi + r(S'p) \cdot \pi > g_j \cdot s'_j + r(S'p) \cdot s'_j$ を満たす $j \in N$ と π が存在するならば，この近似アルゴリズムは S' で終了しない． □

したがってエージェントは，最適な申告を求められない場合においても，近似アルゴリズムにより自己充足的な申告を行うことができる．翌日の洗濯機の使用時間を予測・申告させる例での近似アルゴリズムの手順を示す．初期値 $\pi = {}^t(0.8, 0.2)$ とする．近似アルゴリズムは，この申告に対して最適な行動戦略を S' とする．したがって $S'p \neq \pi$ より，新たな $\pi = S'p = {}^t(0.9, 0.1)$ を代入し，手順 2 に戻る．この π に対する最適な行動戦略は S' であり，$\pi = S'p$ となるため，S' を返して終了する．

4. 計算機実験

本章では，計算機シミュレーションによって近似アルゴリズム評価を行う．本実験では，$n, m \in \{4, \cdots, 8\} (n = m)$，任意の $p_j = \frac{1}{n}$ とし，任意の $g_{i,j}$ を [0,100] でランダムに設定した．報酬関数は SPSR を用い，$\alpha = 25, 50, 100$ とした．初期値 π は，報酬がない場合に効用を最大化する決定的な行動戦略に基づく申告とした．各実験設定に対し 100 インスタンス生成した．

図 1 に，最適な期待利得と近似アルゴリズムで得られた期待利得との比較を示す．問題サイズの大きさの変化に対する，近似アルゴリズムで得られた期待利得の品質の変化を示す．図 2 は，近似アルゴリズムの反復回数の平均を示す．ここでは，問題サイズの大きさの変化に対する，近似アルゴリズムの反復回数の変化を示す．図 1 より，近似アルゴリズムは最適なものに比べ 92% 以上の期待利得が得られることが分かる．また近似アルゴリズムの反復回数について図 2 より，2 回以下の反復で準最適な行動戦略を求められていることが分かる．したがって，近似アルゴリズムが非常に効率よく準最適な行動戦略を求めていることがいえる．また，α が大きくなるにつれて，最適と準最適とで期待利得の差が大きくなり，反復回数が 2 回に近づいているのが分かる．これは α が大きくなるにつれて，最適・準最適な申告が初期値 π から離れるからであると考えられる．

5. 結論

本論文ではエージェントの行動予測に対するメカニズム設計の検討を行った．エージェントのイベントに対する予測が正しい場合，任意の strictly proper scoring rule の適用によりエージェントから真実申告を得られることを証明した．さらに，準最適な申告を効率的に求解可能な近似アルゴリズムを提案し，得られる申告が自己充足的であることを示した．

今後の課題として，最適な申告を求める最適化問題は NP 困難であると予想されるが，理論的な証明を与える必要がある．また，エージェント間に相関関係がある場合など，複雑な状況を考慮することを検討する．

参考文献

[Brier 50] Brier, G. W.: Verification of forecasts expressed in terms of probability, *Monthly Weather Review*, Vol. 78, No. 1, pp. 1–3 (1950)

[Chen 10] Chen, Y. and Pennock, D. M.: Designing Markets for Prediction, *AI Magazine*, Vol. 31, No. 4, pp. 42–52 (2010)

[Conitzer 09] Conitzer, V.: Prediction Markets, Mechanism Design, and Cooperative Game Theory, in *Proceedings of the 25th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI2009)*, pp. 101–108 (2009)

[Gneiting 07] Gneiting, T. and Raftery, A. E.: Strictly Proper Scoring Rules, Prediction, and Estimation, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 102, No. 477, pp. 359–378 (2007)

[Law 11] Law, E. and Ahn, L. V.: *Human Computation*, Morgan & Claypool Publishers (2011)

[Savage 71] Savage, L. J.: Elicitation of personal probabilities and expectations, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, No. 336, pp. 783–801 (1971)

[Witkowski 12] Witkowski, J. and Parkes, D. C.: A Robust Bayesian Truth Serum for Small Populations, in *Proceedings of the 26th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2012)*, pp. 1492–1498 (2012)