2A4-2

数式処理による入試数学問題の解法と 言語処理との接合における課題

A Symbolic Approach to University Entrance Examination Problems in Mathematics and Issues Combining with National Language Processing

岩根 秀直[*1] 松崎 拓也[*2] 穴井 宏和[*1*3] 新井 紀子[*2]
Hidenao Iwane Takuya Matsuzaki Hirokazu Anai Noriko Arai

[*1](株) 富士通研究所 [*2]国立情報学研究所 [*3]九州大学
Fujitsu Laboratories Ltd. National Institute of Informatics Kyushu University

In this paper we present an effective automatic math problem solving method for university entrance examination using quantifier elimination over the reals combining with natural language processing techniques. We also discuss difficulties and issues occurring in our approach.

1. はじめに

本稿は人工頭脳プロジェクト「東大はロボットに入れるか」における数学チームの取り組みに関するものである．数学入試問題をコンピュータに解かせる研究は，これまで多くの試みがある．従来の多くのシステムは，対象とする問題の分野を限定した上で，言語解析と公式による計算処理を一体化して実現するアプローチをとっていた．これに対して，我々は言語解析と計算処理の機能を独立させ両者を接合するという方法をとる．本稿では，本アプローチにおける言語処理手法 [松崎 13] により構築された問題文と同等の Zermelo-Fraenkel (ZF) の式を，一階述語論理式に帰着し，数式処理手法により「問題を解く」計算処理を中心に述べる．

計算処理には数式処理アルゴリズムである実閉体 (RCF) 上の限量記号消去法 (quantifier elimination: QE) を用いている．QE の入力となる一階述語論理式の記述能力は高く，QE を用いれば二次関数はもちろん不等式・領域の問題や平面図形の問題など入試問題における広い分野が適用範囲となる．

しかし，分野を制限することで必要となる知識の量を削減していた場合に対して，本手法は計算処理における計算量が増加するなどいくつかの課題が見えてきた．本稿では，数式処理アルゴリズム QE による数学入試問題の解法を紹介し，言語処理との接合において確認できた課題について述べる．

2. 数式処理による数学入試問題の解法

数式処理は, 入力された数式に対して計算機上で代数的な記号演算を行い数式を出力する．多くの計算では浮動小数ではなく任意多倍長の整数または有理数を用い，誤差のない結果を返す．例えば，数式処理により多項式の最大公約因子や因数分解などの計算ができる．数式処理を実現する商用の数式処理システムとしては Maple や Mathematica, フリーでは Risa/Asir などがある．数学入試問題では誤差のない計算が要求されるため，数式処理システムの活用は有効な手段であると考えられる．本章では数式処理アルゴリズムのひとつである QE による入試問題の解法について紹介する．

2.1 限量記号消去法

QE は，限量記号がついた一階述語論理式を入力として，それと等価で限量記号のない論理式を出力するアルゴリズムである．例えば，$\exists x(x^2+bx+c=0)$ に対して QE を適用すると，それと等価で限量記号がついた変数 x のない論理式 $b^2-4c \geq 0$ を得る．一階述語論理式は，限量記号である $\forall$（全称限量記号）, $\exists$（存在限量記号）, 多項式の等式・不等式からなる原子論理式，$\wedge$（かつ）・$\vee$（または）・$\neg$（否定）などの論理演算子から成る．一階述語論理は広い記述能力を持ち，最適化問題などの重要な応用問題を統一的に取り扱うことが可能であるため，計算機科学や各種の理工学分野の研究者が QE を活用するようになっている．QE は，フリーのソフトウェアとしては，QEPCAD と REDUCE 上の REDLOG パッケージ，商用では Mathematica などに実装されている．筆者らの研究グループは商用 の Maple 上で QE パッケージ SyNRAC [Yanami 07, Iwane 13] を開発中であり，現在, Maple ユーザ言語で実装した CAD による QE コマンドをフリーで公開している．QE アルゴリズムとその応用に関する詳細は [穴井 11, Caviness 98] を参照されたい．

2.2 数学入試問題の求解

本節では QE による数学問題の解法について紹介する．入試問題の QE による解法は [穴井 11] でも解説されている．ここでは，北海道大学 2011 前期理系 $\boxed{3}$-(2) を用いて QE による解法を紹介する．

> t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2, t+2, t)$ がつくる直線を l とする．3 点 $O(0,0,0)$, $A'(2,1,0)$, $B'(1,2,0)$ を通り，中心を $C(a,b,c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，a, b, c の満たす条件を求めよ．

球面 S の半径の 2 乗を r とするとき，この問題を一階述語論理式で記述すると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\exists r \exists t \quad & ((0-a)^2+(0-b)^2+(0-c)^2=r \quad \wedge && \text{(1a)}\\
& (2-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2=r \quad \wedge && \text{(1b)}\\
& (1-a)^2+(2-b)^2+(0-c)^2=r \quad \wedge && \text{(1c)}\\
& ((t+2)-a)^2+((t+2)-b)^2+(t-c)^2=r) && \text{(1d)}
\end{aligned}
$$

ここで，(1a), (1b), (1c) はそれぞれ，球面 S が O, A', B' を通ることを表し，(1d) は球面 S と直線 l が共有点を持つことを表す．この一階述語論理式に QE を適用すると，a, b, c が満たすべき条件を表す以下の等価な論理式が得られる．

$$6a=5 \wedge 6b=5 \wedge (3c \leq 1 \vee 13 \leq 3c)$$

連絡先: 岩根秀直，(株) 富士通研究所，神奈川県川崎市中原区上小田中 4-1-1，044-754-2613，iwane@jp.fujitsu.com

このように，入試問題を実閉体における一階述語論理式に帰着させることができれば，QE を適用することで正確に解くことができる．実際，多くの数学問題が一階述語論理式として帰着できるため QE は入試問題求解の有望なソルバーの一つであると考えられる．

ただし，QE が適用できる問題は一般には多項式で記述されたものに限られ，整数の問題や三角関数など多項式以外の問題は適用できない．しかし，センター試験でよく出題される対数関数や指数関数を新しい変数で置き換えて多項式に帰着できる問題など，少し工夫することで QE が適用できる場合も多い．

3. 自然言語処理との接合

本節では，言語処理 [松崎 13] により構築される問題文と同等な ZF の式から，QE を適用可能な一階述語論理式へと変換する処理について説明する．上記の北海道大学 2011 の問題に対しては，言語処理の結果としておおよそ以下のような ZF の式が得られる:

$$\mathrm{Find}(a,b,c)\left[\begin{array}{l} \exists l \exists u \exists v \exists S \exists R(\\ \quad l = \mathrm{line}(u,v) \wedge \\ \quad \forall p(p \in l \leftrightarrow \exists t(p = (t+2, t+2, t))) \wedge \\ \quad S = \mathrm{sphere}((a,b,c),R) \wedge \\ \quad (0,0,0) \in S \wedge \\ \quad (2,1,0) \in S \wedge \\ \quad (1,2,0) \in S \wedge \\ \quad \exists q(\mathrm{intersect}(S,l,q))) \end{array}\right]$$

ここで，$\mathrm{Find}(a,b,c)[\phi(a,b,c)]$ は，自由変数として a,b,c を (少なくとも) 含む論理式 $\phi(a,b,c)$ が定める値の組 (a,b,c) の範囲を求めよ，という指令を意味する．また，関数 $\mathrm{line}(u,v)$ は定点 v を通り方向ベクトル u をもつ直線，関数 $\mathrm{sphere}((a,b,c),R)$ は中心が (a,b,c) で半径が R である球面を表し，述語 $\mathrm{intersect}(S,l,q)$ は，点集合 S と l が点 q を共有することを表す．

この指令を実行して (a,b,c) の範囲を求めるためには，Find の引数である論理式 $\phi(a,b,c)$ から限量記号を消去し，a,b,c の関係を表す簡単化された式を得ればよいわけだが，QE を利用してこれを行うためには，まず，$\phi(a,b,c)$ と等価で，実多項式の間の等式・不等式のみからなる一階の論理式 $\phi'(a,b,c)$ を得る必要がある．このためには，以下のような処理が必要となる:

1. line，intersect などの関数・述語記号を ϕ から消去する．
2. 上記の例の S や u，$(0,0,0)$ など，実数以外のオブジェクトを表す変数や項を消去する．
3. 上記の例では現れていないが，言語処理の結果として導出される ZF の式には，一般的な関数や集合を表すために高階の項（ラムダ式）や変数が用いられる場合がある．これらを消去し，一階の式を得る．
4. 同様に上記の例には無いが，微分や積分といった操作，また後述の「囲まれた領域の面積」など複雑な関数・述語は数式処理アルゴリズムを用いてそれらを評価することで消去する．

上記の例については，1. および 2. の処理は等価な書換え

$$\begin{array}{rcl} \exists x\ (x = t \wedge \psi(x)) & \leftrightarrow & \psi(t) \\ \forall x\ (x = t \rightarrow \psi(x)) & \leftrightarrow & \psi(t) \end{array}$$

や，点を表す変数 p による限量を成分を表す新たな変数 (p_x, p_y, p_z) による限量に書き換える操作:

$$\mathsf{Q}p\ (\psi(p)) \leftrightarrow \mathsf{Q}p_x \mathsf{Q}p_y \mathsf{Q}p_z\ (\psi((p_x, p_y, p_z)))$$

$(\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\})$，さらに，知識ベースに定義された述語・関数の関係の定義，例えば:

$$\begin{array}{l} \forall a \forall b \forall c \forall R \forall u_x \forall u_y \forall u_z \forall v_x \forall v_y \forall v_z \forall q_x \forall q_y \forall q_z(\\ \mathrm{intersect}(\mathrm{sphere}((a,b,c),R), \mathrm{line}((u_x,u_y,u_z),(v_x,v_y,v_z)),(q_x,q_y,q_z)) \\ \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (q_x - a)^2 + (q_y - b)^2 + (q_z - c)^2 = R^2 \wedge \\ \exists t(tu_x + v_x = q_x \wedge tu_y + v_y = q_y \wedge tu_z + v_z = q_z) \end{array} \right)) \end{array}$$

による書換えによって，図 1 のような一階の論理式が得られる．上で言語処理の結果として示した ZF の式は簡略化したものであり、図 1 に示した実際のソルバー入力となる一階述語論理式ではさらに条件が増えていることに注意されたい．

一般の問題については，これらの書き換えに加え，上記 3. や 4. のためにラムダ式を含む項の β 簡約と，微分・積分などに対する数式処理システムを用いた書換えを一階の論理式になるまで繰り返し行う．

ここで 2 点注意したい．1 点目は，特に上記の 3. により，ϕ' を得る操作は高階の式から一階の，しかも特定の言語（実閉体）の式を得る操作となっていることである．これは一般的には困難な問題であるが，これまで実験の対象とした入試問題については，上で述べた，やや発見的な手続きで実行できることが分かった．どのような（限定的な）入力であれば，このような高階から一階への等価な書換えが可能になるのかについての正確な定式化は今後の課題である．

2 点目は，上の intersect，sphere，line といった述語・関数の使用やその関係の定義に見られるように，どのような述語・関数を用意し，その定義をどのように与えるかについては相当程度の自由がある．このデザインは，言語処理で用いる意味辞書，書換えに用いる知識ベースの設計・メンテナンス性と，上記の書換え処理の容易さ，さらにソルバーにおける計算コストとの兼ね合いを考慮しつつ決定すべき重要な問題である．現在のところの基本方針は，問題で用いられる述語を表す単語（動詞・形容詞など）にはそれぞれに対応する個別の述語記号を用意した上で，ソルバーにおける計算コストを決定する変数の数をなるべく減らすように述語・関数の関係の定義を与える，というものである．これは，意味辞書の構成（1 単語 - 1 述語の対応）を単純に保った上で，ソルバーの計算コストのコントロールは知識ベースにおける記述を工夫することで行う，という分業を意識している．

4. 接合における課題

自然言語処理により構築された入試問題と同等な高階の論理式を一階述語論理式に帰着し QE を用いて解く場合に，いくつかの課題が見つかった．本章では，それぞれの課題とその対策について述べる．実験には，QE ツールとして SyNRAC を用いた．

4.1 計算量

接合における最も大きな課題の一つは，計算量の問題である．QE は広い対象の問題を扱える上に誤差なく結果を返すアルゴリズムであり，強力なツールであるが計算量に問題がある．QE の計算量の下限は，限量記号がついた変数の数に対して二重指数であることが示されており，本質的に規模が大きな問題は解けない．しかし，入試問題は問題の規模が制限されているので，多くの場合，“うまく” 定式化すれば解けると考えている．

$$
\begin{aligned}
&\exists a\exists b\exists c\exists u_x\exists u_y\exists u_z(((\neg(u_x=0))\vee(\neg(u_y=0))\vee(\neg(u_z=0)))\wedge(\exists v_x\exists v_y\exists v_z(\\
&(\exists R((\exists t((tu_x+v_x-a)^2+(tu_y+v_y-b)^2+(tu_z+v_z-c)^2=R^2))\wedge(0<R)\wedge(a^2+b^2+c^2=R^2)\\
&\wedge((1-a)^2+(2-b)^2+c^2=R^2)\wedge((2-a)^2+(1-b)^2+c^2=R^2)))\wedge(\exists v_{lx}\exists v_{ly}((\exists v_{lz}((0=u_y(v_z-v_{lz})-u_z(v_y-v_{ly}))\wedge\\
&(0=u_z(v_x-v_{lx})-u_x(v_z-v_{lz}))))\wedge(0=u_x(v_y-v_{ly})-u_y(v_x-v_{lx}))))\wedge(\forall p_x\forall p_y\forall p_z(((p_x=p_z+2)\\
&\wedge(p_y=p_z+2))\vee\quad(\forall t_2((\neg(p_x=t_2u_x+v_x))\vee(\neg(p_y=t_2u_y+v_y))\vee(\neg(p_z=t_2u_z+v_z))))))\\
&\wedge(\forall p_t(\exists t_3((p_t=t_3u_z+v_z)\wedge(p_t+2=t_3u_x+v_x)\wedge(p_t+2=t_3u_y+v_y))))\\
&))\wedge(\exists u_{lx}\exists u_{ly}((\exists u_{lz}(((\neg(u_{lx}=0))\vee(\neg(u_{ly}=0))\vee(\neg(u_{lz}=0)))\\
&\wedge(0=u_yu_{lz}-u_zu_{ly})\wedge(0=u_zu_{lx}-u_xu_{lz})))\wedge(0=u_xu_{ly}-u_yu_{lx}))))
\end{aligned}
$$

図 1: 北海道大学 2011 前期文系 $\boxed{3}$-(2) と同等の一階述語論理式

式 (1) と図 1 はどちらも同じ問題を表す一階述語論理式であるが，変数の数、条件式の数ともに人が構築した (1) のほうが少なくなっている．これは，人が一階述語論理式を構築する時には問題の整理を頭の中で行い，簡単化していることによる．実際，SyNRAC により (1) は計算可能であるが，図 1 は計算が停止しなかった．高階述語論理式（ZF の式）から一階述語論理式への変換処理において用いる「知識量」を削減したことが，QE の「計算量」の増加につながっているともいえる．

実際には，人が数式処理システムを使う場合にも同じことが起こっている．数式処理の他の手法も同様に，アルゴリズムやソルバーの実装方法を熟知している人が入力を立式することで数式処理の初心者では解けない問題が解けることがある．例えば，2.2 節において半径ではなく半径の 2 乗を r と置いたのは，一階述語論理式の規模を小さくするための一つの手法であるが，半径を直接扱わない場合にのみ適用できる．機械的に一階述語論理式を構築する場合にはこのような手法のすべてを用意し，問題に適した定式化をうまく選択することは困難である．前処理として熟練者が行う式の等価な簡単化をどこまで取り入れて，実際的に有効なソルバーを実現するかは，本稿で提案するアプローチの実用化の上で重要な検討ポイントである．計算量を削減する前処理の実現は，ソルバーの使いやすさの向上と普及の面でも重要なポイントである．

SyNRAC は冠頭標準形と呼ばれる限量記号が論理式の先頭に集められている形式のみに対応していたが，問題を分割して解くことで計算量を削減するために，任意の一階述語論理式の入力にも対応した．この拡張は言語処理との接合における計算量の増加を抑える大きな効果が確認できた．

4.2 定式化における問題

自然言語処理により得られた ZF の式に公式などを適用するだけでは一階述語論理式に帰着できないような問題が見つかっている．その一つが「囲まれた領域の面積」を求める問題である．例として，京都大学 2011 前期理系 $\boxed{3}$ をとりあげる．

> xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=|\frac{3}{4}x^2-3|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

図 2 の塗りつぶした部分が，この問題の囲まれた領域を表している．人がこの問題を解く場合には，それぞれのグラフを xy 平面上に描画することで，曲線の位置関係を把握し，必要な交点の座標を求めた後，積分計算を行う．

自然言語処理により得られた ZF の式から公式などによる等価変換を行うだけではこれらの処理を実現する一階述語論理式に帰着できない．そのためには，構成される数式の理解と計算を行う必要があり，言語処理側が対処することは困難である．したがって，このような問題に対しては，数式処理の関数を予め用意し，対応することを考える．筆者らは囲まれた領域

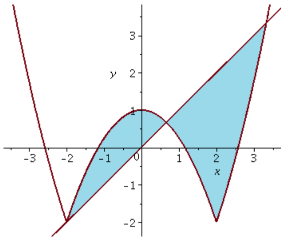

図 2: 京都大学 2011 前期 理系 $\boxed{3}$

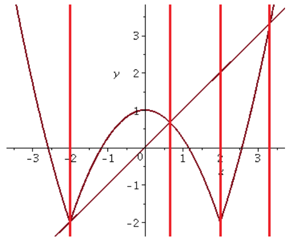

図 3: CAD による領域分割

を以下のように定義した．ここでは，実数体と有理数体をそれぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ と書いた．

定義 1. 空でない連結した $\mathbb{R}^k$ の部分集合を**領域** *(region)* と定義する．

定義 2. 実数 α に対して，$\mathrm{sgn}(\alpha)$ で α の**符号** *(sign)* を表すことにする．ここで，符号とは正、負、0 のいずれかをいう．

$F=\{f_1,\ldots,f_n\}\subset\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_k]$ を多項式の集合とする．$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^k$ に対して，$\mathrm{sgn}(f_1(\alpha))=\mathrm{sgn}(f_1(\beta))$, …, $\mathrm{sgn}(f_n(\alpha))=\mathrm{sgn}(f_n(\beta))$ が成り立つとき，α,β の F-符号情報が一致するといい，領域 $c\subseteq\mathbb{R}^k$ において，任意の *2* 点の F-符号情報が一致するとき，c は F-**符号不変**であるという．

定義 3. $F\subset\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_k]$ を有限個の多項式からなる集合とし，領域の集合 $\{c_i\}$ を F-符号不変となる $\mathbb{R}^k$ の領域分割とする．つまり，$\cup c_i=\mathbb{R}^k$ を満たし，任意の i,j について $c_i\cap c_j=\emptyset$ が成り立つ．c_i と F-符号情報が一致し，かつ c_i と連結している領域と c_i の和集合を C_i とする．C_i が有界なとき，C_i を F に**囲まれた領域**と定義する．

この定義の元で，囲まれた領域の面積を求めることを考える．囲まれた領域を求める関数は，QE アルゴリズムをの基礎となる Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD) アルゴリズム [Collins 98, 穴井 11] の拡張により実現した．1975 年に G. Collins により提案された CAD アルゴリズムは，変数空間 $\mathbb{R}^k$ を与えられた多項式の集合が符号不変となる領域に分割するアルゴリズムである．CAD により分割された領域は，それらが隣り合うことと有界であることは自明ではない．そこで，囲まれた領域であることを表すため，分割された領域に対して，F-符号情報が一致する領域が，隣り合った領域であることと有界であることを判定する手法を実現し，囲まれた領域の面積を求めるコマンドを作成した．図 3 は，CAD により R^2 を $\{y-x,y-|\frac{3}{4}x^2-3|+2\}$ が符号不変な領域に分割したときの結果を表している．図 2 における右側の囲まれた領域

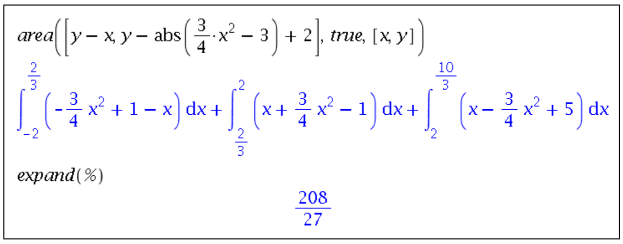

図 4: 囲まれた領域の面積を求めるコマンドの実行結果

が，CAD による分割では，$x < 2$, $x = 2$, $x > 2$ の 3 つの領域に分割されていることに注意されたい．図 4 は，図 2 で表される囲まれた領域の面積を求める関数の実行結果である．作成したコマンド area は囲まれた領域の面積を求めるために必要な立式のみを行い，実際の積分計算は Maple の標準コマンドを用いている．area コマンドは第一引数で多項式のリスト，第二引数で囲まれた領域がみたすべき条件，第三引数で変数の順序を受け取る．第一引数の関数 abs は絶対値を表す Maple 標準の関数で，第三引数はパラメータがついた問題に対応するためのものである．

しかし，定義 3 で定義した囲まれた領域とは異なる解を要求していると思われる問題もみつかっている．その一つが東北大学 2012 前期文系 $\boxed{1}$ で，以下は説明に必要な部分を抜粋・追加した問題である．

> 2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ．ここで，曲線 C は $y = x^2$, 直線 l, m はそれぞれ，$y = -x + 3/4$, $y = -x/2 + 3/2$ である．

この問題は，$\{C, l, m, x = 0\}$ で囲まれた領域のうち，$x \geq 0$ を満たす領域の面積を求める問題である．図 5 は，これらの曲線と囲まれた領域を図示したものである．C, l, m, $x = 0$ すべての曲線により囲まれた領域 S_1 が出題者が想定しているこの問題の正答と推測されるが，定義 3 に従うと，S_1 と S_2 が F で囲まれた領域となる．現在，定義 3 に従わない問題には未対応であるが，多くの問題は定義 3 に従っていることが確認できている．実際には出題者が「囲まれた領域」を明示的に定義していないため正答の特定はできない．しかし，筆者らの手法を応用すれば，このような問題の曖昧性を解消できると考えられる．

ここで紹介した囲まれた領域のように，言語処理だけでは定式化できないような問題に対応するために数式処理が対応する必要があることがわかっている．他には，絶対値や有理関数が入力として受け入れられるように，SyNRAC の拡張を行った．

4.3 適用できる対象範囲

本稿で提案した手法は，QE が適用できる問題に限られている．QE が扱える問題の範囲はとても広い範囲であり合格レベルに達するという観点では，二次試験ではすべての問題を解ける必要がなく，本手法のみで十分な場合もある．しかし，センター試験に対して高得点をとるという観点ではこの手法のみでは不十分で，より広い分野の問題を解けるようになる必要がある．言語処理部分の拡張をせずに，適用範囲を広げるためには，実閉体上以外の問題への QE の拡張が有効な手段であると考えられる．

一般に整数に関する問題や三角関数・指数関数・対数関数の問題に対して適用できる QE アルゴリズムは存在しない．しかし，入試問題における範囲の問題に限定することで，QE に

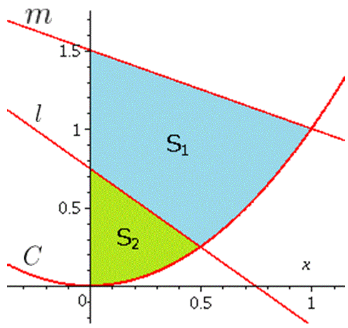

図 5: 東北大学 2012 前期文系 $\boxed{1}$-(2)

近い処理を実現できると考えていて，それが今後の課題のひとつである．

5. まとめ

本稿では，数学入試問題に対して，自然言語処理 [松崎 13] により構築された問題文と同等な ZF の式から，一階述語論理式を構築し，数式処理のアルゴリズム QE を用いて問題を解く方法を述べた．また，自然言語処理との接合における課題として，計算量の問題に対応するために QE への入力を簡単化するための前処理の実現，定式化できない問題に対応するための関数の構築，本手法の適用範囲拡大のために QE の拡張の必要性を述べた．

これらの接合における課題解決は，数式処理ソルバーの使いやすさの向上や普及にもつながると考えている．また，数学問題解答システムの実現により，問題設定の不備や曖昧性の解消なども実現できると考えている．

参考文献

[Caviness 98] Caviness, B. F. and Johnson, J. R. eds.: *Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer (1998)

[Collins 98] Collins, G. E.: *Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition*, pp. 8–23, in Caviness and Johnson [Caviness 98] (1998)

[Iwane 13] Iwane, H., Yanami, H., Anai, H., and Yokoyama, K.: An effective implementation of symbolic–numeric cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination, *Theoretical Computer Science*, Vol. 479, pp. 43–69 (2013)

[Yanami 07] Yanami, H. and Anai, H.: The Maple package SyNRAC and its application to robust control design, *Future Generation Computer Systems*, Vol. 23, No. 5, pp. 721–726 (2007)

[穴井 11] 穴井 宏和, 横山 和弘：QE の計算アルゴリズムとその応用 – 数式処理による最適化, 東京大学出版会 (2011)

[松崎 13] 松崎 拓也, 岩根 秀直, 穴井 宏和, 相澤彰子, 新井紀子：深い言語理解と数式処理の接合による入試数学問題解答システム, 人工知能学会全国大会 (2013)