

1 / f ゆらぎ型計算万能 2 次元セルオートマトンの探索

Search for 1/f-type computationally universal two-dimensional cellular automata

蜷川 繁

Shigeru Ninagawa

金沢工業大学 情報工学科

Division of Information and Computer Science, Kanazawa Institute of Technology

According to several results, there seems to be a relationship between computational universality and 1/f noise in cellular automata. In this study we search two-dimensional three-state nine-neighbor CA rule space for a rule exhibiting a 1/f spectrum by means of genetic algorithms to find computationally universal rules. Power spectrum is calculated from the evolution of the state of cell from a random initial configuration. The fitness function is constructed in consideration of the spectral similarity to 1/f spectrum. Although the search is in progress, we have found a rule set with which there is a propagating pattern called glider in Game of Life. Taking into consideration the fact that Game of Life is computationally universal, the proposed method seems to be effective to find universal cellular automata.

1. はじめに

1 次元 2 状態 3 近傍セルオートマトン (Cellular Automaton, CA) のルール 110, および 2 次元 CA のライフゲームとよばれるルールはいづれも計算万能性をもつことが知られている [Berlekamp 82], [Cook 04]. さらにこれらの CA においてランダム初期様相から開始した場合のパワースペクトルは 1/f ゆらぎを示すことが知られている [Ninagawa 98], [Ninagawa 08]. これらのことから計算万能性と 1/f ゆらぎの間には何らかの関連性があるのではないかと予想される. しかし, この予想を裏付けるためには, より多くの 1/f ゆらぎを示す CA を求める必要がある. 本研究では, 2 次元 3 状態 9 近傍 CA において 1/f ゆらぎを示すルールを遺伝的アルゴリズムを用いて探索する.

2. 適合度の計算

N 個のセルからなる 1 次元 CA において, i 番目のセルの t ステップ目の状態を $x_i(t)$ とする. $t = 0, 1, \dots, T-1$ の T 個の時系列データに対して次の式 (1) で定義されるフーリエ変換を施す.

$$\hat{x}_i(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_i(t) \exp(-i \frac{2\pi t f}{T}),$$

$$(f = 0, 1, \dots, T-1). \quad (1)$$

これを次の式 (2) のように全セルにわたって総和をとり, パワー $S(f)$ とする.

$$S(f) = \sum_{i=1}^N |\hat{x}_i(f)|^2. \quad (2)$$

ライフゲームにおいて, セル数が 100×100 のランダム初期様相から開始して, $T=8000$ とした場合のパワースペクトルを図 1 に示す. 図中の点線は $f = 1 \sim 100$ の範囲で最小 2 乗法

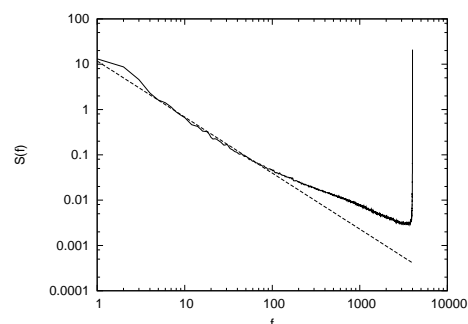


図 1: $T=8000$ の場合のライフゲームのパワースペクトル. 点線は $f = 1 \sim 100$ の範囲で最小 2 乗法で $S(f) \propto f^\beta$ と近似した場合の直線で $\beta = -1.237$.

で $S(f) \propto f^\beta$ と近似した場合の直線で $\beta = -1.237$ となり, パワーが周波数にほぼ反比例していることから 1/f ゆらぎといえる.

(2) 式によって得られたパワースペクトルに対して, 最小自乗法を用いて $\log S(f) = \log a + b \log f$ と近似し, (3) 式に示すように指数 b と残差平方和 σ^2 から次式によって適合度 F を求める.

$$\sigma^2 = \sum_{f=1}^N \frac{(S_f - S(f))^2}{N}$$

$$F = \frac{|b|}{\sigma^2 + \delta}. \quad (3)$$

ここで, N は σ^2 を求める際に用いるデータ数であり, $\delta = 0.000001$ は分母がゼロになることを避けるための項である. こうすることによって, パワースペクトルが 1/f ゆらぎに近い個体ほど大きな適合度をもつ.

本研究では, セル空間は縦 \times 横 $= 100 \times 100$ 個のセルからなり, 初期様相は 0,1 の状態が等確率で出現するようにランダムに生成し, 境界条件としてセル平面が 2 次元トーラスとなる周期境界条件を用いている.

連絡先: 〒 924-0838 石川県白山市八束穂 3-1

e-mail: ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp

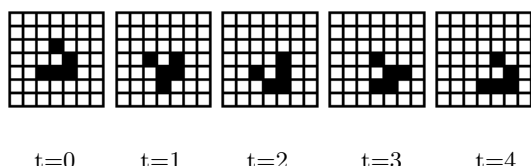


図 2: ライフゲームにおけるグライダー .

3. 実験

本研究で対象となる 2 次元 3 状態 9 近傍セルオートマトンの遷移関数 d は次式で表現される .

$$d(c, n_1, n_2) = x_i, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}. \quad (4)$$

ここで $c \in \{0, 1, 2\}$ は近傍の中心セルの状態, n_1, n_2 は周囲 8 セルのうち, それぞれ, 状態が 1, 2 のセル数を表し, $x_i \in \{0, 1, 2\}$ は中心セルの次ステップでの状態を示す . ただし, $i = 45c + b(19 - b)/2 + c$. 本研究では $d(0, 0, 0) = 0$ という遷移規則のみを対象とするので, 遷移規則を表わす遺伝子型は 134 桁の 3 進数 $x_{134} \dots x_1$ となる .

本研究では $T=8000$ のステップ数について状態遷移を行い, パワースペクトルを求める . ランダムに生成した遷移規則を 180 個まとめて初期集団とする . また, b については, 低周波域での振る舞いを調べるために $f = 1 \sim 10$ の範囲で求め, σ^2 については, スペクトル全体が $1/f$ ゆらぎに近いかどうか調べるために, $f = 1 \sim 3000$ の範囲で求める . 選択はルーレット選択 (エリート数は 20) とし, 交叉確率 0.6 の一様交叉とし, ビット当たりの突然変異確率は 0.03 とした .

4. 実験結果

現在のところ 100 通りの初期集団に対して合計 26,500 世代, 約 4,300,000 通りのルールのパワースペクトルを求めた . 現在までに得られた遷移規則の中で, 図.2 に示すライフゲームのグライダーを同じパターンをもつルールが得られた . その遷移規則は

```
0200002200120010100220120200012022
2020201010012010011200200000101101
2200121010200021111220001120100001
110011101112101000222010100210020
```

となる . ライフゲームのグライダーが存在するために必要なルールは 3 状態の場合は ,

$$\begin{aligned} d(0, 0, 0) &= d(0, 1, 0) = d(0, 2, 0) = \\ d(0, 4, 0) &= d(0, 5, 0) = d(1, 1, 0) = 0, \\ d(0, 3, 0) &= d(1, 2, 0) = d(1, 3, 0) = 1 \end{aligned}$$

となるが, 本実験で得られたルールはこれらの条件を満足している .

このルールのパワースペクトルを図.3 (上) に示す . パワースペクトルの $f = 1 \sim 10$ での傾きの指数 b は -0.876 , $f = 1 \sim 3000$ での残差平方和 σ^2 は $4.20 * 10^{-4}$ であり, 適合度は 2082 となる . ランダムな初期様相から開始した場合の $t = 100$ での様相を図.3 (下) に示す . 様相において黒い四角形は状態 1, 白抜き四角形は状態 2 のセルをそれぞれ表わす . ライフゲームにおける固定物体やプリンカといったパターンが存在することが見て取れる .

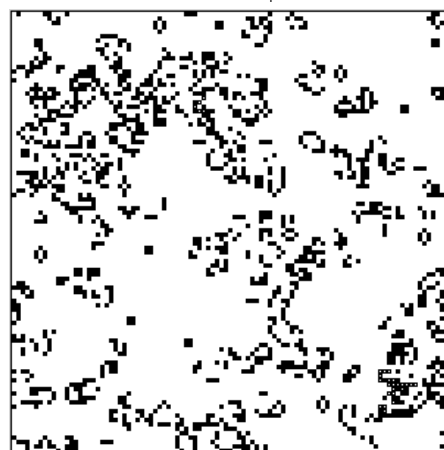
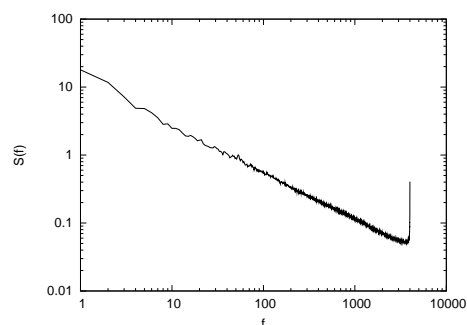


図 3: ライフゲームのグライダーをもつルールのパワースペクトル (上) とランダム初期様相から開始した場合の $t = 100$ での様相 (下) . 黒い四角形は状態 1, 白抜きの四角形は状態 2 のセルをそれぞれ表わす .

5. おわりに

本研究では単純 GA を用いて $1/f$ ゆらぎを示す 2 次元 3 状態 9 近傍外総和型 CA を探索した . その結果, ライフゲームのグライダーをもつルールが得られた . この結果は $1/f$ ゆらぎにもとづく本探索手法が, グライダーをもつルールを見つける上で有効であることを示している . 今後はこのルールが, ライフゲームのような計算万能性を示すかどうか調べる予定である .

参考文献

- [Berlekamp 82] E.R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol.2, Academic Press, New York (1982).
- [Cook 04] M. Cook: Universality in Elementary Cellular Automata. Complex Systems **15** (2004) 1-40.
- [Ninagawa 98] Ninagawa, S., Yoneda, M., Hirose, S.: $1/f$ Fluctuation in the "Game of Life". Physica D **118** (1998) 49-52.
- [Ninagawa 08] S. Ninagawa: Power Spectral Analysis of Elementary Cellular Automata. Complex Systems **17** (2008) 399-411.