

神経伝導の量子モデルとその干渉, 量子ベイズ統計

量子ニューラルネット

Quantum Neuro-Conduction, Quantum Bayes' method, and Quantum Neuro-Network

松浦弘幸*¹

HIROYUKI Matsuura

和崎克己*²

KATSUMI Wasaki

*¹ 国立長寿医療研究センター

National Center for Geriatrics and Gerontology

*² 信州大学工学部

Shinshu University

We rewrite the famous Bayes' theory into quantum Bayes' Form. In order to practice that process, all of classical probabilities are necessary that they are reinterpreted into operators, state vectors, probability amplitude, and expectation values. The difference between classical version and quantum form is whether interference's term exists or not. Quantum Bayes' form has the additional term $\text{Re}(\text{Int})$. At junctions, all of pure states are mixed. Some attenuated states are generated instead of all pure states at junction. In neurons, examples of those areas mean neuro-synaptic junctions, ephapse of axons, and endplate of muscles, and so on. Final state vector $|B\rangle$ has the various information of environmental state at the conditions of the mixed and reduced purities. So, if we would like to obtain the pure state and the other quantities, we need take a series of mathematical operations as making expectation values. And an explicit expression of solution for quantum neural nets is given by applying the convergence type of both initial and final state vectors.

1. はじめに

神経細胞に微小電極を差し込んで膜電位を観察に関する優れた研究がなされ、その結果、神経軸索の伝導に関する優れた知見が得られてきた。先の一連の論文で、我々は神経細胞のインパルスの発生後の伝達は、量子論のポラリトンモデルを用いて記述する新たなモデルを提案した[9]。さらに、神経回路網に関しての軸柵やシナプス間の電磁力学的な量子干渉効果は、ファインマンの経路積分法を用いて記述が適している事を示した。実際に、Arvanitaki は、一方の神経線維に発生した興奮が容易に他の神経線維に伝導することを報告した。彼は、この現象をエファプス(Ephapse)と命名し、人工的電気シナプスが作成可能であることを示した。一般には、このような干渉効果は小さいが、神経線維が損傷を受けると軸索間干渉が生じると言われており、灼熱痛(causalgina)や神経痛(neuralgia)の病理的な原因等の否定的な側面と考えられている。しかし、我々の立場は、このエファプス(Ephapse)を積極的に評価して、むしろ、脳組織では小さいながら常に発生し、ヒトの脳に思いつき、飛躍、錯誤、幻覚などの非日常的状態を発生させて、「ヒトに誤りを犯す計算機としての脳」という役目を与え、これらの諸現象を通してヒトを新たな思考・進歩への道を開く糸口をもたらすものという肯定的な側面に基づいている。

今日までの一連の論文では、伝導や干渉を担う量子的な実体として軸索の膜電位の脱分極・分極過程を量子モデル化したポラリトン(polariton)を考えてきた[9]。つまり、電荷を持ったポラリトンが軸索に沿って移動することで、興奮の伝導が生じる事、そして、電気回路の対応から現象は主に経路積分法を用いて表現した。今回の論文では、経路積分法を用いて古典的な情報理論で有名なベイズ定理を取り上げて、量子力学的な記述を行い、従来の古典的な定理

と量子力学的な表現の相違を明確にし、古典的なベイズ定理は量子力学的な表現の特殊な場合にすぎない事を示す。さらに、古典的なニューラルネットの式を、量子論的な表現に書き改める。

2. 経路積分法を用いた回路表現

経路積分法は、P. Dirac の着想を基に R. Feynman が体系化した古典力学的な描像が想像し易い量子化手法である。具体的には、起点 (t_a, x_a) から終点 (t_b, x_b) に粒子が移動する場合の確率密度は、カーネル(確率振幅)の絶対値の 2 乗 $P(b, a) = |K(b, a)|^2$ に比例する。この時、確率振幅は、各々の経路の寄与 $\phi[x(t)]$ の総和は、

$$K(b, a) = \sum_{\text{over all path}} \phi[x(t)]. \quad (1)$$

各自の経路の重みは、作用 S に比例する位相

$$\phi[x(t)] = \text{const.} \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right) \quad (2)$$

を持ち、量子力学的効果は、古典的な作用 S に量子的なゆらぎ F が加えられた和として表記される。

経路積分法では、粒子が始点 A から終点 B に至るとする。時間的に連続して起こる事象に対する確率振幅の計算は、時間的に連続する事象の確率振幅の掛け算であるという規則を知っている。この時、一つの完全な経路に関する確率振幅は、

$$\phi[x(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=0}^{N-1} K(i+1, i). \quad (3)$$

となる。例えば自由粒子が、座標 $(x_0, T) = (x_1 + \alpha T, T)$ で幅 $2b$ のスリットを通過して、 (x_1, t_1) から (x_2, t_2) に至る時、その自由粒子の確率振幅の表現

$$K(x_2, x_1) = \langle x_1, t_1 | x_2, t_2 \rangle = \left[\frac{2\pi i \hbar (t_2 - t_1)}{m} \right]^{-1/2} \exp \left[\frac{im(x_2 - x_1)^2}{2\hbar(t_2 - t_1)} \right] \quad (4)$$

を用いると,

$$\varphi(x) = \int_{-b}^b d\alpha \langle x_2, t_2 | x_1 + \alpha, T \rangle \langle x_1 + \alpha, T | x_0, t_0 \rangle \quad (5)$$

と表される。これは、点 $(x_1 + \alpha, T)$ を経由する全ての自由粒子の運動を表現する。

電気回路の量子力学的表現を行う。ポラリトンが点 A から点 B に流れる事により状態ベクトル A から状態ベクトル B に変化する確率振幅は、

$$\begin{array}{ccc} |A\rangle & & |B\rangle \\ \xrightarrow{\hspace{2cm}} & & \xrightarrow{\hspace{2cm}} \\ = \langle B | A \rangle & & \end{array} \quad (6)$$

この途中に散乱源のポテンシャル (例えば、回路のスイッチや抵抗、神経軸索の髄鞘など) が存在する場合、ポラリトンはこのポテンシャル障壁で散乱されるから、これをハミルトニアン V のポテンシャル演算子とみなして、

$$\begin{array}{ccc} |A\rangle & & |B\rangle \\ \xrightarrow{\hspace{2cm}} & & \xrightarrow{\hspace{2cm}} \\ = \langle B | V | A \rangle & & \end{array} \quad (7)$$

と表現した。量子力学的 q-NOT, q-AND, q-OR の表記は、1 個または 2 個のポテンシャル V_1, V_2 を用いる。点 A から点 C に至る量子力学的 q-AND 回路は、直列なポテンシャル演算子により

$$\phi_{AND} [x(t)] = \int dx_b \langle C | V_2 | b \rangle \langle b | V_1 | A \rangle \quad (8)$$

同様に量力学的 q-OR は並列な 2 個のポテンシャル演算子により、

$$\phi_{OR} [x(t)] = \langle B | V_1 | A \rangle + \langle B | V_2 | A \rangle \quad (9)$$

さらに、q-NOT は 1 個のポテンシャルを用いて、

$$\phi_{NOT} [x(t)] = \langle B | 1 - V_1 | A \rangle \quad (10)$$

と書けば良い。次の節では上記の規則を土台にして(古典的)ベイズ定理から量子力学的ベイズ定理への拡張を行う。

3. ベイズ定理の量子表現

情報理論で有名なベイズ定理では、事象 B である結果を知った時に、事象が A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) である確率が、

$$P_{Cl}(A_k | B) = \frac{P(B | A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} \quad (11)$$

ただし、

$$P_{Cl}(B) = \sum_i^n P(B | A_k) \quad (12)$$

として、記述される。記号 $P(A_k)$ は、事象 A_k の生起確率であり、また、 $P(B | A_k)$ は、事象 A_k である時に事象 B が発生する確率を意味する。つまり、 $P(B | A_k)$ は、事象 A_k が確率 $P(A_k)$ で発生した後に、B に確率 $P(B | A_k)$ で「伝搬する状況」を表現する。これより、 $P(B | A_k)$ を古典確率の伝播関数と考えてよい。我々は、これを古典的ベイズ定理と名付ける。伝播確率を伝播関数の一種と見なすという立場を、量子的表現へと拡張すれば、量子電磁気学の「期待値としてマックスウェル方程式の成立」が要請されるように、同様に、「期待値として古典的ベイズ定理が再現される」事を要求する。すると、 $P(B | A_k)$ 、 $P(A_k)$ 等は演算子化されて、状態ベクトルを作用される事で確率振幅としての我々が観測可能となる。これより量子ベイズ定理は、

$$\begin{aligned} \langle A_k | \hat{P}(A_k | B) | B \rangle &= \\ \frac{\langle B | \hat{P}(B | A_k) \cdot \hat{P}(A_k) | A_k \rangle}{\sum_j^n \langle B | \hat{P}(B | A_j) \cdot \hat{P}(A_j) | A_j \rangle} & \quad (13) \end{aligned}$$

と形式的な表現が得られる。この状態を図示すると、状態ベクトル $|A_k\rangle$ が生起確率振幅 α_k で生じた後、伝播して状態ベクトル $|B\rangle$ に遷移する事である(図1)。

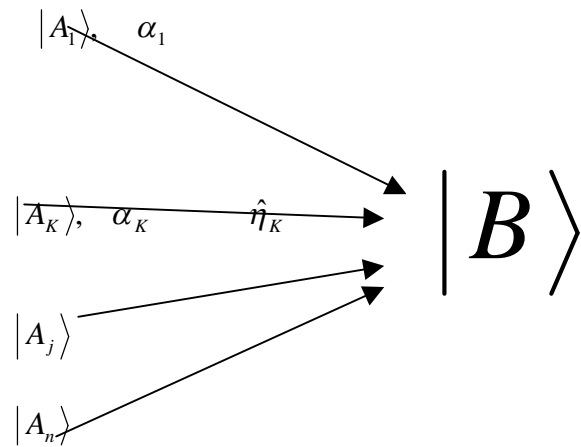


Fig. 1 伝播して状態 B に収束

全ての状態ベクトルが状態ベクトル $|B\rangle$ に集まる形式であり、途中を演算子 η で伝播するモデルである。

これは、神経ネットワークの結合様式の「収束」であり、伝導の状態が、 η で決められている(図2)。

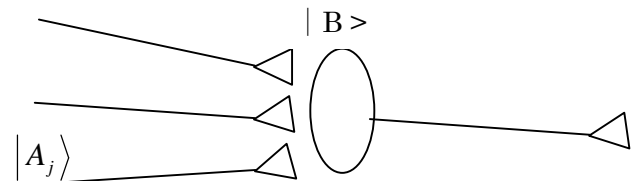


Fig. 2 ニューロン収束の模式図

この図2は、図1を神経細胞の結合模式図に読み替えたものであり、式(13)の分子・分母の簡略化した表現を得るために状態ベクトル $|A_k\rangle$ を純状態に取る。式(13)の分子に

$$\sum_j^n |A_j\rangle \langle A_j| = 1 \quad (14)$$

を代入すれば、分子は、

$$\langle B | \hat{P}(B | A_K) \cdot \hat{P}(A_K) | A_K \rangle = \sum_j^n \langle B | \hat{P}(B | A_K) | A_j \rangle \langle A_j | \hat{P}(A_K) | A_K \rangle \quad (15)$$

式(15)の右辺の最初の項は、状態 $|A_j\rangle$ から伝播して状態ベクトル $|B\rangle$ に至る遷移確率、また、第2項は、状態 $|A_K\rangle$ が発生して他の基底ベクトルに遷移する生起確率振幅に相当する。計算を簡略化するために次の条件を基底ベクトルに課す。

1. 基底は、 n 個の完全系を張る。 $|A_K\rangle$, $K=1\sim n$
このために、任意の状態ベクトルは、これらの基底ベクトルにより展開可能である。

$$\langle A_j | A_K \rangle = \delta_{jK} \quad (16)$$

3. 確率振幅の演算子は、固有方程式を満足する。

$$\hat{P}(A_K) | A_j \rangle = \alpha_j \delta_{jK} | A_j \rangle \quad (17)$$

4. 状態ベクトルの伝播では、情報の減衰のポテンシャルは生じるが、誤りや状態ベクトルの変化は発生しない。伝播の演算子を η とすれば、

$$\hat{\eta}_K | A_j \rangle = \eta_j \delta_{jK} | A_K \rangle \quad (18)$$

と約束する (誤り無しの収束条件)。状態ベクトル $|B\rangle$ は、多くの情報の伝播が集まり、収束するために純状態ではありえない。従って、 $|B\rangle$ は、 n 個の正規直交基底ベクトルで展開できる。

$$|B\rangle = \sum_j^n C_j |A_j\rangle \quad (19)$$

これらの条件(16)-(18)を用いて式(15)を書き換えると、

$$\langle B | \hat{P}(B | A_K) \hat{P}(A_K) | A_K \rangle = C_K \alpha_K \eta_K \quad (20)$$

という簡単な式になる。分母に関しても

$$\begin{aligned} \sum_K^n \langle B | \hat{P}(B | A_K) \hat{P}(A_K) | A_K \rangle \\ = \sum_K^n \langle B | \hat{P}(B | A_K) | A_K \rangle \alpha_K \end{aligned} \quad (21)$$

状態ベクトル B を展開すると、最終的には、

$$\begin{aligned} \sum_K^n \langle B | \hat{P}(B | A_K) \hat{P}(A_K) | A_K \rangle \\ = \sum_j^n C_j^* \alpha_j \eta_j \end{aligned} \quad (21)$$

という計算される。これらの分子と分母の結果より、量子ベイズ定理(13)は、確率振幅の演算により書き換えられて、

$$\begin{aligned} \langle A_K | \hat{P}(A_K | B) | B \rangle \\ = \frac{\langle B | \hat{P}(B | A_K) \cdot \hat{P}(A_K) | A_K \rangle}{\sum_j^n \langle B | \hat{P}(B | A_j) \cdot \hat{P}(A_j) | A_j \rangle} \quad (22) \\ = \frac{C_K^* \alpha_K \eta_K}{\sum_j^n C_j^* \alpha_j \eta_j} \end{aligned}$$

となる。この結果は、古典的なベイズ定理(11)-(12)と比較すれば、 α_j の展開係数 C だけ異なっている事が分かる。しかし、最大の相違は、量子ベイズ表現(22)は、確率振幅であるために複素数であるが、他方の古典的なベイズ表現(11)は、実数であり、この数値が直接的に確率を与える点である。この複素数と実数の相違は決定的である。複素数で表現された係数 C が存在するために、量子ベイズ形式では位相や振動数が異なるポラリトンの波が干渉する。他方、古典的なベイズ形式では干渉は起こらない。これが量子的効果である。

この量子効果を明確に表現するために、状態 B を規格化と位相を計算する。

$$\langle B | B \rangle = \sum_j^n |C_j|^2 = 1 \quad (23)$$

そこで、この条件を満たすような係数 C を

$$C_j = r_j e^{i(\theta_j)}, \quad r_j = r \quad (24)$$

取れば、式(23)より状態ベクトル $|B\rangle$ の関数表現が得られる。従って、多数の状態ベクトルの重ね合わせとして、

$$|B\rangle = \sum_j^n \frac{1}{\sqrt{n}} \exp(i\theta_j) |A_j\rangle \quad (25)$$

である。我々が、直接的な波動関数表現は、式(25)に左方から状態ベクトル $\langle x |$ を作用させて、

$$\langle x | B \rangle = \sum_j^n \frac{1}{\sqrt{n}} \exp(i\theta_j) \langle x | A_j \rangle \quad (26)$$

となり、通常の波動関数の座標表現として、

$$\langle x | A_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{i(p_j x_i - E_j t)}{\hbar}\right) \quad (27)$$

を用いればよい。我々は、状態ベクトルを用いる事で、一般的な議論を行ってきた。式(27)を用いた処で、これまでの議論に何らの影響を及ぼさない事に注意する必要がある。また、式(27)は、ポラリトンのシュレディンガー方程式に従うことは明白である。量子ベイズ形式(27)に展開係数 C を代入することで具体的な確率振幅の表現 ϕ_B は、

$$\phi_{BK} = \frac{\exp(i\theta_K) \cdot \alpha_K \eta_K}{\sum_j^n \exp(i\theta_j) \cdot \alpha_j \eta_j} \quad (28)$$

であり、式(28)の絶対値の2乗が量子力学的なベイズ確率を与える。従って、

$$P_Q(A_K | B) = |\phi_{BK}|^2 \quad (29)$$

$$= \frac{|\alpha_K|^2 |\eta_K|^2}{\sum_j^n |\alpha_j|^2 |\eta_j|^2 + 2\text{Re}(Int)}$$

$\text{Re}(Int)$ は、 $\text{Re}(C^* C_k)$ の実数部を意味し具体的に書くと、

$$\begin{aligned} \text{Re}(Int) \\ = \sum_{j,k,j>K}^n \text{Re}[\exp i(\theta_j - \theta_K) \alpha_j^* \alpha_K \eta_j^* \eta_K] \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。古典的ベイズ形式 P_{cl} との比較を明確に表現するために、

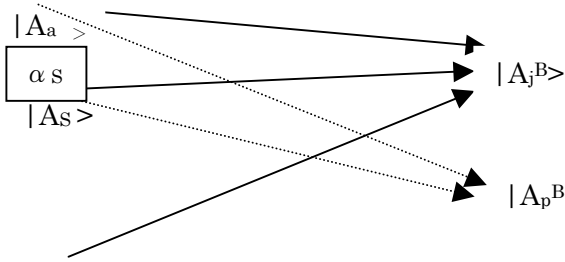
$$|\alpha_k|^2 \rightarrow P(A_k), \quad |\eta_k|^2 \rightarrow P(A_k | B) \quad (31)$$

と書きなおすと量子的ベイズ形式は、

$$P_Q(A_k | B) = \frac{P(B | A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_j^n P(B | A_j) \cdot P(A_j) + 2 \operatorname{Re}(Int)} \quad (32)$$

となる。古典的なベイズ形式(11)と量子的ベイズ形式(32)を比較すると明らかのように、量子的ベイズ形式では、古典論形式には存在しなかった干渉項 $\operatorname{Re}(Int)$ が存在する。この干渉項の存在により、それまで各自が純状態であった状態ベクトル $|A_k\rangle$ が、伝播後に領域 B に至り、互いに混ざり合い混合状態ベクトル $|B\rangle$ を形成する。この時に、神経伝導に置ける量子力学的な情報の担体である”ポラリトンが B に至り”，互いに干渉を引き起こす。

また、誤り有のベイズ定理の結果のみを示すと、



正しい時は、

$$1 \leq j \leq p, \quad \hat{\eta}_{jk}^c = \hat{P}(A_j^B | A_k) \quad (33)$$

誤りの演算子は、

$$p+1 \leq j \leq n, \quad \hat{\eta}_{jk}^e = 1 - \hat{\eta}_{jk}^c \quad (34)$$

として、形式的な確率は、式(22)と同様になる。

$$\langle A_k | \hat{P}(A_k | A_j^B) | A_j^B \rangle = \frac{C_j^* \alpha_j \beta_{Kj}^B}{\sum_j^n C_j^* \alpha_j \eta_{Kj}^B} \quad (35)$$

4. 量子ニューラルネットの基礎

通常の階層式のニューラルネット理論では、図 1 の量子神経回路の状態ベクトルを U_k , W_{kj} に置き換えればよい。古典的ニューラルネットワーク理論では、情報処理素子で入力信号 X_j に対して膜電位の変化量 U_k は、

$$U_k = \sum_j^n W_{kj} X_j \quad (17)$$

である。他方、量子神経回路では、

$$\begin{aligned} |A_K^B(t)\rangle &= \sum_j^n C_{Kj}(t) |A_j(t)\rangle \\ &= \sum_j^n C_{Kj}(t) \exp\left(\frac{-i\varepsilon_j t}{\hbar}\right) |A_j\rangle \end{aligned} \quad (18)$$

と混合状態が対応するから、重み付け W に量子力学的展開係数 C 、そして、入力信号には、状態ベクトルが対応する。つまり、式(18)の「各種の状態ベクトル $|A_j\rangle$ が重み C_{Kj} を付けて足し合わされ、そして、 K 番目の状態の変化を引き起こす」と解釈できる。これは、 U_k は伝播関数 $f(*)$ により、 Y_k として

$$Y_k = f(U_k) = \frac{1}{1 + \exp(-aU_k)} \quad (19)$$

である。式(18)で、状態ベクトルを座標表示すると

$$\begin{aligned} \Phi_K &= \langle x | A_K^B(t) \rangle = \sum_j^n C_{Kj}(t) \langle x | A_j(t) \rangle \\ &= \sum_j^n C_{Kj}(t) \exp\left(\frac{-i\varepsilon_j t}{\hbar}\right) \langle x | A_j \rangle \\ &= \sum_j^n C_{Kj}(t) \exp\left(\frac{-i(\mathbf{p}x + \varepsilon_j t)}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

という関数に変換される。これを U_k と見なせば簡単に古典的ニューラルネットワーク理論が、

$$\Psi_K = f(\Phi_K) = \frac{1}{1 + \exp(-a\Phi_K)} \quad (19)$$

という形式に変換される(これを対応原理と名付ける)。しかし、古典的ニューラルネット理論と量子神経回路理論との大きな相違は、古典理論では、 U_k も Y_k も実数であるが、量子理論では、状態ベクトルもその座標表記も、また、 Ψ_k も全て複素数である事だ。このために、神経回路中でトンネル効果、共鳴現象、そして、それに伴うシナプス干渉、エファプス等が記述できる可能性が存在する。

参考文献

- [Matsuura H], Matsuura H, Wasaki K: Expression of Quantum Bay's Form and Its Calculations, ICIC Express Letters, An International Journal of Research and Surveys, ICIC International,6(6),1653-1657, 2012
- [Matsuura H], Matsuura H: Quantum Neural Net, Polariton, and Classical Neural Networks, ICIC Express Letters, An International Journal of Research and Surveys, ICIC International,6(6),1665-1669, 2012
- [Matsuura H], Matsuura H: Quantum Theory of Polariton on Neuro-Conduction and Ephapse (Quantum Current and Role of Polariton on Axon), ICIC Express Letters, An International Journal of Research and Surveys, ICIC International,6(6), 1671-1675, 2012
- [Matsuura H] Nakano M : Quantum Circuit, Lots, Interference and Basis of Neuro-Computation, Int. Jr. of Innovative computing, information and control, IEEE computer Society , 3(1), 7-14, 2009