

## 時系列信号処理に基づく SAT 解法: wave-SAT ソルバの実現に向けて

Towards Constructing a SAT Solver with Temporal Signal Processing

宮城 智輝\*<sup>1</sup>      山本 泰生\*<sup>2</sup>      岩沼 宏治\*<sup>2</sup>  
 Tomoki Miyagi      Yoshitaka Yamamoto      Koji Iwanuma

\*<sup>1</sup>山梨大学大学院医学工学総合教育部コンピュータ・メディア工学専攻Department of Computer Science and Media Engineering,  
Interdisciplinary Graduate School of Medicine and Engineering, University of Yamanashi\*<sup>2</sup>山梨大学大学院医学工学総合研究部

Department of Research Interdisciplinary Graduate School of Medicine and Engineering, University of Yamanashi

This paper presents a new framework for treating SAT problems within temporal signal processing scheme. We handle propositional variables as some time-series periodic signals, and correspond three logical connectives “ $\neg$ ”, “ $\wedge$ ” and “ $\vee$ ” to three signal operations phase inversion, multiplication and superposition, respectively. Then, any propositional formula can be transformed in the synthetic waveform. In this paper, we investigate such signal transformations in several ways that enable to solve SAT problems using signal processing techniques. We show preliminary empirical results obtained by using randomly generated 3-SAT problems with the DSP hardware.

## 1. はじめに

SAT 問題 (充足可能性問題) とは, 与えられた命題論理式の充足可能性を判定する問題で, 1971 年に Cook によって最初に NP 完全性が証明された問題である [4]. 近年, SAT ソルバの性能が劇的に向上し, 数百万変数からなる問題も解くことが可能となってきた。これに伴い, ハードウェア・ソフトウェアの検証, プランニング, スケジューリングなどの諸問題を SAT 問題に変換し, 高速ソルバにより求解する研究が行われるようになっていく。

SAT ソルバは系統的, 確率的, その他の 3 種類に大別できる。系統的 SAT ソルバは系統的探索 (systematic search) を行う完全なアルゴリズムに基づいており, SAT 問題の充足可能性と充足不可能性のいずれも判定可能である [6]. 系統的 SAT ソルバは DPLL 手続き [5] に基づく手法であるが, これまでに矛盾からの節学習を行う CDCL 手続きとそれに基づくバックジャンプ法 [3, 10] や監視リテラルによる高速単位伝播 [7] などの技術が組み込まれている。確率的 SAT ソルバは確率的局所探索 (stochastic local search; SLS) を行う不完全なアルゴリズムに基づいており, 充足可能性は判定可能であるが充足不可能性は一般に判定できない [6]. 代表的なソルバとしては walk-sat [9] が挙げられる。その他の SAT ソルバとして, 書き換え可能な論理回路である FPGA (Field Programmable Gate Array) を用いた SAT 解法 [1] や DNA コンピュータや量子コンピュータなどの枠組みを用いて解く研究 [8, 2] がされている。

その中で, 本研究では, 信号処理技術を取り入れた新しい SAT 解法を検討する。初めに, 入力となる CNF 式  $\phi$  に出現する各命題変数の 2 値をある時系列信号として扱い, 入力である  $\phi$  を構成する論理演算子 (OR), (AND),  $\neg$  (NOT) はそれぞれ時系列信号の重ね合わせ, 掛け合わせ, 位相変換に対応付ける。これにより CNF 式  $\phi$  は合成波信号  $f_\phi(t)$  に変換することができる。

本論文では,  $f_\phi(t)$  から  $\phi$  の充足可能性を判定できる信号変換手法を提案する。提案手法では合成波信号  $f_\phi(t)$  とするとき,

$f_\phi(t) \neq 0$  となる時刻  $t$  が存在する場合, 変換元の SAT 問題  $\phi$  が充足可能, そうでない場合を充足不能と判定する。

以下, 2 章では準備として CNF 式から時系列信号への変換手法を示し, 3 章で時系列信号変換を用いた求解手法を述べ, 4 章で DSP (Digital Signal Processor) による性能評価実験, 最後に 5 章で本稿をまとめる。

## 2. 準備

## 2.1 SAT 問題

命題変数またはその否定をリテラルと呼ぶ。特に, 命題変数  $x$  を正リテラル, その否定  $\neg x$  を負リテラルと呼ぶ。また, リテラルの選言を節と呼ぶ。SAT 問題は通常, 節の連言である連言標準形 (conjunctive normal form; CNF) の論理式が与えられる。SAT 問題が充足可能であるとはその CNF 式を真とする変数割り当てが存在することをいう。

## 2.2 wave-SAT 問題

本節では, CNF 式から時系列信号への変換手法を述べる。

定義 1 (リテラル波形)  $l$  をあるリテラルとする。この時, 以下の時系列信号  $f_l(t)$  を  $l$  に関するリテラル波形と呼ぶ。

$$f_l(t) = \begin{cases} f(t) & (l \text{ が正リテラルのとき}) \\ 1 - f(t) & (l \text{ が負リテラルのとき}) \end{cases}$$

例 1  $x$  をある命題変数とする。今,  $x$  に関するリテラル波形を図 1 の左図の方形波としたとき,  $\neg x$  に関するリテラル波形は図 1 の右図の方形波に対応する。

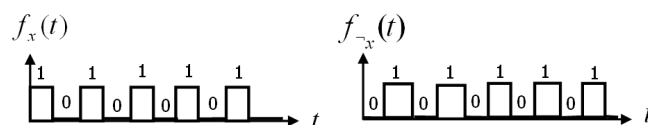


図 1: リテラル波形の例

連絡先: 宮城 智輝, 住所: 〒 400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11  
 E-mail: g12mk028@yamanashi.ac.jp

定義 2 (節波形) 節  $C = l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_n$  に対し, 以下の合成波  $f_C(t)$  を  $C$  に関する節波形と呼ぶ.

$$f_C(t) = f_{l_1}(t) + f_{l_2}(t) + \dots + f_{l_n}(t)$$

例 2  $l_1, l_2$  をリテラルとする. 今,  $l_1, l_2$  に関するリテラル波形を図 2 の左図の通りとする. このとき節  $C = l_1 \vee l_2$  に関する節波形は右図の通りとなる. このように, 節波形は構成するリテラル波形の同一時刻の振幅値を重ね合わせた合成波と一致する.

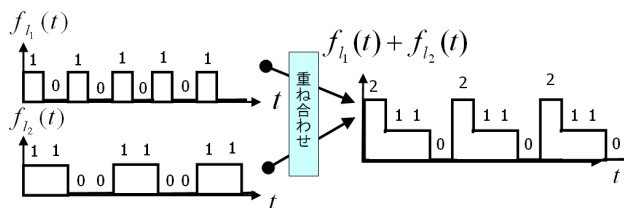


図 2: 節波形の例

定義 3 (CNF 波形) CNF 式  $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$  に対し, 以下の合成波  $f_\phi(t)$  を  $\phi$  に関する CNF 波形と呼ぶ.

$$f_\phi(t) = f_{C_1}(t) \times f_{C_2}(t) \times \dots \times f_{C_m}(t)$$

例 3  $C_1, C_2$  を節とする. 今,  $C_1, C_2$  に関する節波形を図 3 の左図の通りとする. このとき, CNF 式  $\phi = C_1 \wedge C_2$  に関する CNF 波形は図 3 の右図の通りとなる. このように, CNF 波形は構成する節波形の同一時刻の振幅値を掛け合わせた合成波と一致する.

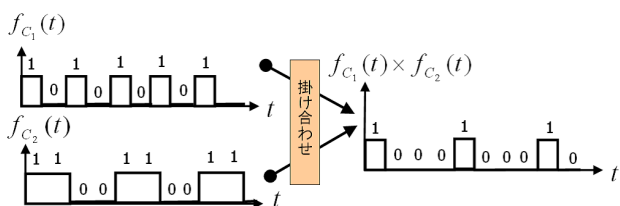


図 3: CNF 波形

### 3. 時系列信号変換を用いた SAT 解法

前章での変換手法で得られた合成波信号からもとの式の充足可能性を判定する SAT 解法を提案する.

定義 4 (wave-SAT 問題) ある CNF 式  $\phi$  に関する CNF 波形を  $f_\phi(t)$  とする. このとき,  $f_\phi(t) \neq 0$  となる時刻  $t$  が存在するかどうかを判定する問題を  $\phi$  の wave-SAT 問題と呼ぶ.

wave-SAT 問題の解は, 変換される CNF 波形によって決まる. また CNF 波形は, 各命題変数に対する周期波形の割り当て方法によって一意に決まる. そこで以降の節では, この周期波形の割り当て方法をいくつか検討し, 各方法のもとでの, wave-SAT 問題ともとの SAT 問題との関係を調査する.

#### 3.1 周期波形の割り当て設計

以下に示す 4 つの割り当て手法を検討する.

手法 1 (2 倍周期割り当て): 周期  $T$  (振幅 1) の方形波を基本波とし, 基本周期を倍々に増やして得られる波を各変数に割り当てる. すなわち,  $n$  番目の変数に割り当てられる方形波の周期は  $(2^n) \cdot T$  となる.

手法 2 (2 倍周期+最小位相割り当て): 手法 1 と同じく, 周期  $T$  の方形波を基本波とし, 倍々に周期を増やして波を構成する. さらに, 各周期の波に対して, 1 サンプル周期分ずつ位相をずらして得られる波も変数に割り当てる.

手法 3 (2 倍周期+最大位相割り当て): 手法 2 と同じく, 2 倍周期と位相ずらしにより波を構成する. ただし手法 2 と異なり, ずらす位相幅を, 割り当てるべき変数の個数と使用可能な周波数帯域をもとに, 可能な限り大きく取る.

手法 4 (高調波割り当て): 周波数  $f$  ( $1/T$ ) の方形波を基本波とし, その高調波を各変数に割り当てる. すなわち  $n$  番目の変数に割り当てられる波は基本波の  $n$  次の高調波となる.

#### 3.2 SAT 問題と wave-SAT 問題の等価性

4 つの手法のうち, 手法 1 に基づく合成波変換では SAT 問題と wave-SAT 問題の解は一致する. すなわち, 入力となる CNF 式  $\phi$  が充足するとは,  $\phi$  に関する CNF 波形  $f_\phi(t)$  がある時刻  $t$  において  $f_\phi(t) \neq 0$  となるときまたそのときに限る. 一方で, 手法 2, 手法 3, 手法 4 に関しては, wave-SAT 問題で  $f_\phi(t) \neq 0$  となる時刻  $t$  が存在するとき元の SAT 問題は充足可能 (健全) であるが, そのような時刻  $t$  がなくてもとの SAT 問題が充足不可能 (完全) であるとは限らない.

定理 1 4 つの手法は健全である.

(証明) CNF 式  $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$  の wave-SAT 問題において,  $f_\phi(t) \neq 0$  となる時刻  $t$  が存在したとする. このとき CNF 波形の定義より, 任意の  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) に対して,  $f_{C_i}(t) \neq 0$  となる. よって, 各節  $C_i = l_i^1 \wedge \dots \wedge l_i^{n_i}$  に対して, 節波形の定義より, ある  $j$  ( $1 \leq j \leq n_i$ ) が存在して,  $f_{l_i^j}(t) \neq 0$  とならなければならない. 1 から 4 のいずれも手法も各命題変数に振幅 1 の方形波を割り当てているため,  $f_{l_i^j}(t) \neq 0$  のとき,  $f_{l_i^j}(t) = 1$  となる. このように各節内に振幅が 1 となるリテラル波形のリテラルが出現するため, これらのリテラルが真となるように割り当てればもとの SAT 問題は充足する. □

命題 1 手法 1 は完全である.

(証明)  $n$  変数に対する  $2^n$  個の各割り当てでは, 手法 1 の構成方法より明らかに,  $n$  個の方形波の振幅の組により表現できる. (図 4 を参照のこと) □

命題 2 手法 2, 3, 4 は不完全である.

(証明) 不完全である例を示せばよい. はじめに位相ずらしを行う手法 2 と手法 3 について, 図 5 の 3 変数  $x_1, x_2, x_3$  の波を考える. 充足不可能性を判定するためには, 振幅の異なる組が 8 通り出現する必要がある. 一方で, 図 5 では 4 通りのみしか表現することができていない. 手法 4 に関しても同様に 3 変数の割り当てにおいて, 表現できない組が存在する. □

健全かつ完全な手法 1 を用いた合成波変換では, SAT 問題と wave-SAT 問題における求解は等価といえる. しかしその

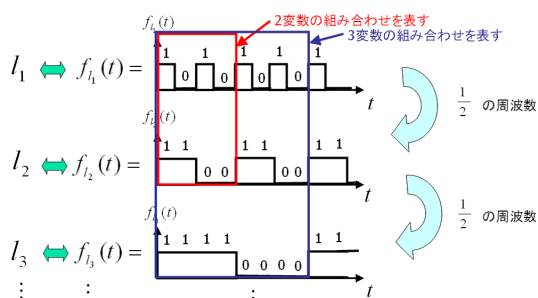


図 4: 手法 1 の完全性の例示

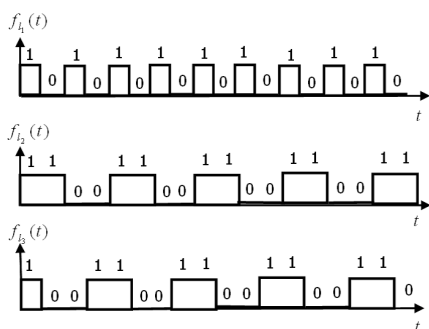


図 5: 手法 2, 3 の完全性の喪失例

一方で、2 倍ずつ周期が増加するため、現実的に扱うことのできる変数の数は非常に限られたものになる。これに対して、手法 2、手法 3、手法 4 は不完全であるものの、必要となる周期は比較的小さく解を求めることができる。

#### 4. 実験

そこで、これら 3 つの不完全な手法について、どの程度の性能を有するか実際に TI 社の DSP(TMS320C6713) を使用して検証を行なった。用いた問題は、ランダムに生成した 3-SAT (節数: 30, 40, 50) の 100 問ですべて充足可能な問題である。各節数に対して 100 問のうち充足可能と判定できた割合を正答率と呼び、以下に各手法の正答率の実験結果を示す。

##### 4.1 手法 2 の結果

図 6 に示すような正答率が得られた。

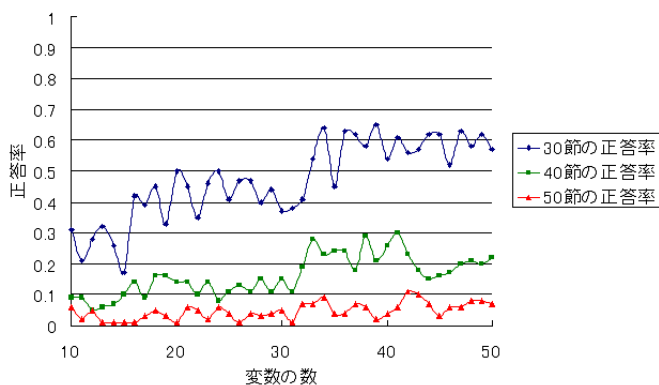


図 6: 手法 2 の正答率の推移

図 6 より、節数が少ない問題ほど正答率が高いという結果

を得ることができた。これは、節数が多い問題ほど問題に制約がかかり、充足可能を示す変数割り当てが減少したことが原因だと考えられる。また、手法 2 の 30 節の正答率は 20 ~ 60% を示しているが、40 節の正答率は 10 ~ 30% まで低下し、50 節では 10% 以下まで正答率が低下することがわかった。また、図 6 から手法 2 は命題変数の数が多い問題でも正答率が低下することはないという結果を得ることができた。

##### 4.2 手法 3 の結果

この実験では、手法 3 に基づき、命題変数に 2 倍周期で位相を最大にずらした波形を対応付けた場合の正答率を求めた。前の実験と同様の問題を与えて実験を行い、図 7 のような正答率が得られた。

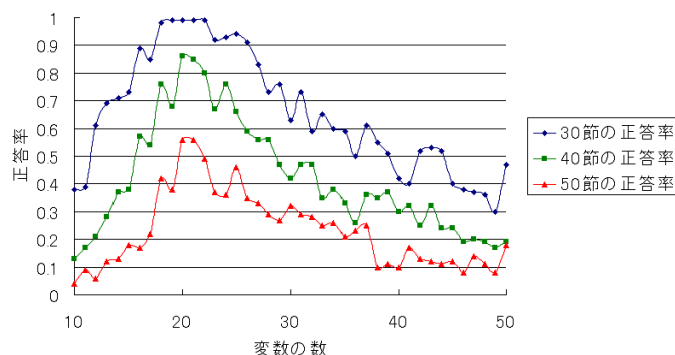


図 7: 手法 3 の正答率の推移

手法 2 と同様に節数が少ない問題ほど正答率が高いという結果を得た。また、手法 3 の 30 節の正答率は 30 ~ 100% を示しているが、40 節の正答率は 10 ~ 90% まで低下し、50 節では 10 ~ 60% まで正答率が低下することがわかった。そして、15 ~ 25 変数の SAT 問題の正答率が他と比較して高いことがわかった。

##### 4.3 手法 4 の結果

この実験では手法 4 に基づき命題変数に高調波を対応付けたときの正答率を求めた。前の 2 つの実験と同様の問題を与えて実験を行い、図 8 のような正答率が得られた。

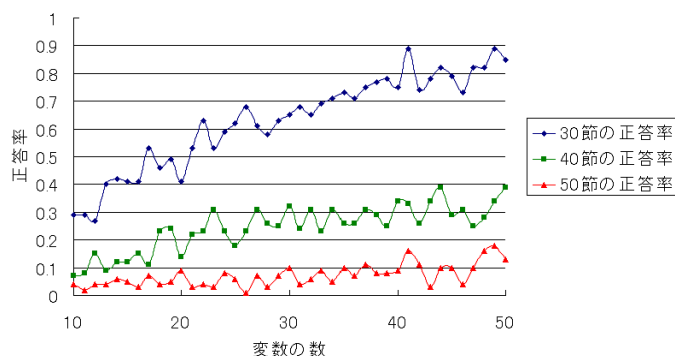


図 8: 手法 4 の正答率の推移

手法 2, 3 と同様に節数が少ない問題ほど正答率が高いという結果を得ることができた。また、手法 4 の 30 節の正答率は 30 ~ 100% を示しているが、40 節の正答率は 10 ~ 40% まで低下し、50 節では 10 ~ 20% まで正答率が低下することがわかった。そして、図 8 より命題変数の数が多い問題でも正答率が低下することはないという結果を得ることができた。

## 5. まとめ

本稿では, CNF 式  $\phi$  から時系列信号  $f_\phi(t)$  の変換手法を行い, もとの式  $\phi$  の充足可能性を判定する手法を提案した. また, CNF 式の各命題変数に対する周期波形の割当てをいくつか検討した. 2 倍ずつ周期を増やす手法 1 は完全かつ健全な手法であり, SAT 問題と wave-SAT 問題の解が等価であることを証明した. しかし一方で, 2 倍ずつ周期が増加するため, 多くの命題変数から構成される SAT 問題に対応することができないという問題点がある. そこで, 2 倍周期割当てだけでなく位相をずらした周期波形を割当てする手法 2,3 や高調波を割り当てる手法 4 を検討した. 手法 2, 3, 4 は手法 1 と比べて多くの命題変数からなる SAT 問題に対応できるが, 不完全な手法であるため, 各手法がどの程度の性能を有するか実際に DSP を用いて実験を行った. 実験の結果, 節数が少ない問題ほど正答率が高いことがわかった.

## 参考文献

- [1] Abramovici, M. and Sousa, J.: A SAT Solver Using Reconfigurable Hardware and Virtual Logic. *Journal of Automated Reasoning*, pp. 5-36 (2000).
- [2] Alberto, L and Sara, F.: Three "quantum" algorithms to solve 3-SAT. *Journal of Theoretical Computer Science* Vol. 372 Issue 2-3 (2007)
- [3] Bayardo, R. J. and Schrag, R. C.: Using CSP look-back techniques to solve real-world sat instances. *Proc. AAAI-97*, pp. 203-208 (1997)
- [4] Cook, S.: The complexity of theorem-proving procedures, *Proc. the 3rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing (STOC'71)*, pp. 151-158, ACM (1971)
- [5] Davis, M., Logemann, G. and Loveland, D.: A machine program for theorem proving, *Commun. ACM*, Vol. 5, No. 7, pp. 394-397 (1962)
- [6] 井上 克己, 田村 直之: SAT ソルバーの基礎, 人工知能学会誌, Vol. 25, No. 1, pp. 57-67 (2010)
- [7] Matthew W. Moskewicz, C. F. Madigan, Zhao, Y., Zhang, L., and Malik, S.: Chaff: Engineering an Efficient SAT Solver. *Proc. DAC-01*, pp 530-535 (2001)
- [8] Ravinderjit, S.: Solution of a 20-Variable 3-SAT Problem on a DNA Computer. *Journal of SCIENCE*, Vol. 296 19 APRIL (2002)
- [9] Selman, B., Kautz, H. and Cohen, B.: Local search strategies for Satisfiability testing, *Cliques, Coloring and Satisfiability: Second DIMACS Implementation Challenge*, Vol. 26, pp. 521-532 (1996)
- [10] Silva, J. P. M. and Sakallah, K. A.: GRASP - A search algorithm for propositional satisfiability. *IEEE Trans. on Computers*, Vol. 48, pp. 506-521 (1999)