

## 文章題の算数・数学的な意味を獲得するツール

A tool that acquires mathematical meanings of math problems

岩間 憲三<sup>\*1</sup>

Kenzo Iwama

<sup>\*1</sup> (有)ジーエー

ZA Corporation

This paper argues two types of numbers need to be introduced; one type is to develop a tool and the other is that the tool describes meanings of math problems.

## 1. はじめに

哲学者や思想家たちは、21世紀は、言語の哲学から心の哲学の時代になると語る[Searle 2004]。そして、様々な分野で脳が研究対象となり、計算機上で心のモデルを作る試みが続けられている。言語学、論理学、あるいは哲学などの分野では、言葉は、心に作られている“何か”を指すとしてきた。

ここでは、数学の課題の解き方を文と図の例で入力されると、課題の解き方を作成する仕組みを議論する。仕組みが作る“何か”を説明し、どのように作成するか述べる。文と図が指すことは、数学の対象であり、数学の課題の解き方である。仕組みの構築にあたり、何をあらかじめ保持し、何を外から得るのかについて掘り下げたい。

結論から言うと、“数える”、“演算”、そして“解き方”を外から得る。

## 1.1 意味について言われていること

[阿原 2011]は、意味が分かることを次のように例示している。“兄と弟が、どんぐりを合わせて60個拾いました。兄は弟の2倍でした。兄と弟が拾ったどんぐりは、それぞれいくつですか”。“60を3で割ればいい”、“なぜ3で割ればいい”が分かれば、この課題の意味が分かったと言える。

こうした例を多く調べることで、数学で行っているように[足立 2011]、意味を演繹的に論じることが可能になるかもしれない。

しかし、高木貞治は言う“帰納の一途に邁進すべき”と、同じく[Polya 1954]は数学について以下のように述べている；Mathematics presented with rigor is a systematic deductive science but mathematics in the making is an experimental inductive science. 数学者たちの言は、建設した意味を演繹的に述べるのが目標かもしれないが、人工知能の分野で、数学の意味を研究するのであれば、数学の帰納的な建設が研究対象となることを示唆している。

一方、Fregeらは、文の意味は、その文の真偽を確認する手順であるとし、かつ、手順に書かれていることだけに限定している。そして、意味の獲得は、手順を作成することだと論じている。

こうした議論をふまえると、ここで議論すべきは、

- 1) 言葉が指すこと / 意味は、手順か、さらに他に何かあるか、
- 2) 手順あるいはさらに何かあるとして、それらをどのように作成するのか、そしてそれらを自動で作る仕組みはどのようなものになるか

となる。

連絡先: iwama@whatisthis.co.jp

## 2. 帰納法と仮説

Millらが展開した帰納法を批判的に発展させ、[Venn 1907]は帰納法を支える前提は、人が世界はユニフォームだと信じていることだと論じた。さらに、帰納法に、3段階あると議論した。

- 1) detect the property to be generalized, 2) generalization,
- 3) verification.

Russelは、感覚からは得られない一般的知識が存在し、このような知識のあるものは推論によって獲得されるものではなく、…このような一般的知識は、論理学において見出されなくてはならない、と主張した。Gödelは、Russelの主張を発展させ、あらゆる可能な世界において成り立つのが論理学の法則であるとした。

## 2.1 機械による帰納学習

[Mitchell 1997]は機械学習の枠組みを議論しているが、その範囲は、上記したVennの段階の2)および3)の前半である。

しかし1) 作ろうとする仮説が保持するだろう性質を設定すること、また、3)の後半、検証した仮説を変更することは、機械による帰納学習の範囲に入っていない。小中学の数学では、文章題を説明するとき、この課題をやりますと宣言せず、例題を説明する人が多い。“兄と弟が”はその例だ。従って、小中学生の脳は、継続的に与えられる例題の中から、似た例題を選び、解き方を作ると考えられる。機械が、例を選択することは、今までの機械学習の範囲に入っていない。

さらに、小中学の数学においても、仮説の作り方、つまり、Vennが言う3つの段階全体で用いられる総合的な方法も帰納的に獲得されていると思われる。例えば、順問題を逆問題に適応する方法の獲得だ。しかし、そのような枠組みは、今までの帰納学習では語られていない。

## 2.2 数えること

Russelの言う一般的知識に、“数える”こと、そして1, 2, などの名前だけでなく、むしろ“数える”を構成する要素を含めるのが妥当だと考える。実際、[Iwama2006]は、“数える”を、抽象化した動作のシーケンスと動作に対応づけた名前として表している。

仮に、あらかじめ、数える概念をなんらかの形で保持しているとするれば、入力を得て、あらかじめ保持している概念と外から与える名前とを対応させることになる。つまり、入力には、あらかじめ保持している概念と合う部分と、1, 2, などの名前との対応があるはずである。すると、入力にある概念と合う部分は、どのようであっても、それを記憶して概念とすることができる。そうであれば、1, 2, などの概念をあらかじめ保持していなくても、“数える”概念を獲得できることになる。

## 2.3 量を測る基準と方程式

課題に述べられている量の関係を方程式の形にすると、関係のもとになる基準(まとめり)は式に含まれなくなる場合がある。

“兄と弟が”の例は，“どんぐり”の量を、いくつかの基準となる量(ひとまとめり)で測り、それらの間の関係を示す。“60個”は、どんぐりを単体で数えたときの量で、“弟の2倍”は、弟の数を基準(まとめり)として何倍かを数えたときの量だ。

量の間にある関係を、方程式，“ $x+y=60$ 、 $x=2y$ ”で表すと，“2のy倍”か“yの2倍”のどちらかは分からない。また、60と(兄と弟のどんぐりの)2つのまとめりとの間にある関係が記されない。文を読んだ人が、式の字面とは別に、基準とそれらの間の関係を頭の中の中にのみ描いている。

## 2.4 基準を表すこと

上で議論したように、課題の文が指すこと、そして解き方を計算機上に作るとすれば、指すことは、いくつかの基準とその基準で測った量の間を含む必要がある。

しかし、“数える”ことと同様な議論をすると、基準をはじめから保持している必要はなく、機械が、基準も帰納的に獲得できれば良い。個別に数える動作に加えて、いくつかをまとめりとして合わせたり分けたりする動作が妥当だと考える。(人の視覚システムは、いくつかの物がまとまって目の前にあるとき、まとめりとして捉える仕組みを保持している。)

## 3. 仕組みの説明

### 3.1 用語

1) 変値と変手: 入力(文と図の組み合わせ)を継続して記録する。記録からいくつかの入力を選び、それらを汎化する。その結果を変手と呼ぶ。選んだ入力に共通するアルファベットの区切りを定数に、異なる区切りを変値に置き換える。また、アルファベットの区切りの間にある関係を見出し、変手が保持する。

2) 入力と変手の間の一貫性: 入力があると、入力に合う変手を記録から取り出し、変手にある変値を入力のアルファベットの区切りに置き換える。置き換え後、変手のアルファベットが入力のそれと一致すれば、入力と変手は一貫している。一貫していなければ、それら全体を記録する。取り出す変手がなければ“ない”を作って、入力と“ない”を共に記録する。

3) 実行: 取り出した変手にある変値にアルファベットが入ると、変手を実行する。例えば、変手“ $\cdot$ と $\cdot$ 。を合わせる”に3と4が入ると、変手を実行して7を出力する。

### 3.2 はじめから保持している機能

仕組みがはじめから保持している機能については、本大会の“3B2-R-2”に記す。

## 4. 議論

機械に数学の課題と解き方を学ばせるというのは、そもそもいったい何をさせようとしているのかを議論したい。結論的には、機械が扱う数字や課題には2つのレベルがある;1つはあらかじめ保持している機能、脳が生まれつき持っている機能と対応、を実装するためであり、2つは、その機械が獲得する数字や課題の解き方だ。

### 4.1 機械に行わせること

仕組みを稼働させるために、人は、いわゆる数字を機械の記憶域に入れ、それらを取り出して機械に操作させる。そして結果

を機械に自分の記憶域に戻させる。操作はいわゆる四則演算と論理演算だ。人は、機械に数字の取り出し、それらに演算を行わせ、演算結果を記憶に戻すことを、延々と行わせる。

しかし、ここでは、数えると数字、大小関係、そして四則演算を、機械に獲得させると主張する。機械は、はじめから数字を扱い、演算を行うことが出来るにも関わらず、機械に数字と演算を学ばせると言うが、いったい、機械に何をさせているのだろうか。

ここで説明した仕組みは、いわゆるアルファベットであれば、種類を選ばない、また、いわゆる区切り方であれば、入力として受け入れる。ここで述べた“数える”あるいは“まとめり”と見なすことがモデルとして妥当であれば、この仕組みが獲得する数え方、演算の概念は、人が普通に保持する概念に含まれることはあっても逸脱はしない。

従って、上記した、機械が扱う数字や課題には2つのレベルがあるというのは妥当だと考える;1つはあらかじめ保持している機能、脳が生まれつき持っている機能と対応、を実装するためであり、2つめは、その機械が獲得する数字や課題の解き方だ。

### 4.2 演繹と帰納

ここでは、文と図が指す何かを、変手という構造体で表した。そして変手を複数の文と図の入力から、帰納的に作成した。

新たな入力があると、入力に合う変手を取り出し、変手が保持する規則を新たな入力に適応する。その変手にとって、新たな入力は具体例の1つだから、規則の適応は演繹的だ。

しかし、演繹的な適応には、帰納的な方法が先行している。変手を選ぶのは、帰納的に行っているからだ。新しい入力か、どの変手の具体例か(どの変手の具体例でないかもしれない)を探すときは、帰納法の始めの段階を使っている。そして、どの変手の具体例かが分かれば、変値を具体値に変換する規則を利用する(演繹的な方法を使う)ことになる。

探すことを演繹的に行うことはできない。なぜなら、課題の名前は、あらかじめ定義されるわけではなく、帰納的に、それが名前だと仮説を立てる。その後、課題の名前を取り込んで、探すことに使うようになるからだ(例えば、数字を利用するようになる)。

## 5. おわりに

数学の課題の意味を表す仕組み、意味を獲得する仕組みについて議論した。“数える”と“まとめりとする”を構成するようなアルファベットの並び(=変手)をいわゆる一般的知識とし、量とそれらの間の関係をアルファベットの並びで表すことで、四則演算を使う文章題の意味を獲得する方法を説明した。

### 参考文献

- [足立 2011] 足立恒雄:数とは何か そしてまた何であったか、共立出版, 2011.
- [Iwama 2006] Iwama, K.: A robotic program that acquires concepts and begins introspection, *NeuroQuantology*, 2006.
- [Mitchell 1997] Mitchell, T. M.: *Machine learning*, McGraw Hill Co., 1997.
- [阿原 2011] 阿原一志:大学数学の証明問題 発見へのプロセス, 東京図書, 2011.
- [Polya 1954] Polya, G.: *How to solve it: A new aspect of mathematical method*, Princeton Univ. Press, 1954.
- [Venn 1907] Venn, J.: *The principles of Inductive Logic*, Chelsea Publ. Co., 1907.
- [Searle 2004] Searle, J. R.: *Mind: a brief introduction*. Oxford Univ. Press, 2004.