

算数・数学の文章題の解き方を帰納的に作成するツール

A tool that inductively acquires how to solve math problems

岩間 憲三^{*1}

Kenzo Iwama

^{*1} (有)ジーエー

This paper explains a tool that gets examples of solving math problems written in sentences and figures and forms varProcs, generalized solvers of math problems. The varProc, given a new problem only in sentences, generates figures of how to solve the problem.

1. はじめに

まず, 小中学校で学ぶ数学の文章題にある数学的な性質を議論する. そして, 文章題を教えるときに役立つと思われるツールを述べる. ツールは, 先生が文章題の解き方を説明するときに用いる図を作成する (= 数学的な性質を表す), 生徒が文章題を理解したかを確認するため似た課題を自身で作成しその答えを求めるために用いる. また, ツールへの入力は, 数学学習における積み重ねを具体的に明らかにする = 課題の理解の程度を具体的に示す資料になると考える.

上記目的を達成するには, 帰納的に解き方を獲得する仕組みを開発しなくては難しい. なぜなら, 文章題の型をすべてあらかじめ定義するのは難しいからだ.

1.1 文章題の解き方を図示

[阿原 2011]は, 意味が分かることを次のように例示している. "兄と弟が, どんぐりを合わせて 60 個拾いました. 兄は弟の 2 倍でした. 兄と弟が拾ったどんぐりは, それぞれいくつですか". "60 を 3 で割れば良い", "なぜ 3 で割れば良いか" が分かれば, この課題の意味が分かったと言える.

上記した課題の解き方の例を図 1 に示す. 図は "なぜ 3 で割れば良いか" を, 言葉にしないが描いている. 弟の持っているどんぐりを 1 つの基準として (まとまりとして), 60 には 3 つあることを陰に表している.

一方, 方程式で表すと, " $x+y=60$, $x=2y$ " などとなるが, 兄と弟が持つどんぐりのまとまりが表現されない. 結果 "なぜ 3 で割れば良いか" も示さない (cf., [Fujiwara 2009]).

この例のように, 文章題では, 様々な対象の量を数え, それらの間の関係を含んでいる. 量を数えるとき, 基準というかまとまりを使うが, 図は, それらの間の関係を表せる.

1.2 具体例を試す方法を図示

課題が与えられると, 課題にある値を具体値で解き, そこから一般的に解く方法を見出すことがある. 具体値で解いた場合を並べ, それらに共通する値の間にある関係を取り出す方法だ.

この方法も, 図あるいは表を用いて表すことが可能である.

1.3 順問題の解き方を逆問題に利用

順問題の解き方を基に, 逆問題の解き方を作成することがある. "兄と弟が, どんぐりを拾いました. 弟は 20 個拾い, 兄は弟

の 2 倍拾いました. 兄と弟が拾ったどんぐりは, 合わせていくつですか. また合わせた数は, 弟の数の何倍ですか" は, 順問題の例だ. 阿原の例は, この課題の逆問題となる. [Polya 1954] は他にもいろいろな解き方を述べている.

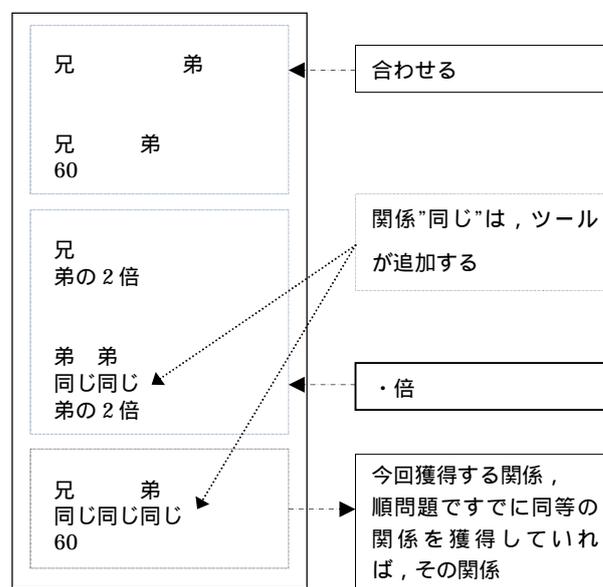


図 1. 課題 "兄と弟が" の解き方の例. "合わせる", " \cdot 倍" は, すでに獲得している. "60 が同じまとまりの 3 つ分となること" を, 今回獲得する.

2. ツールの説明

2.1 キーとなる構造体

1) 変値と変手: 入力 (文と図の組み合わせ) を継続して記録するが, そこからいくつかを選び, それらを汎化する. その結果を変手と呼ぶ. 選んだ入力に共通するアルファベットの区切りは定数に, 異なる区切りは変値に置き換えられる. また, アルファベットの区切り間にある関係を見出し, 変手が保持する.

2) 入力と変手の間の一貫性: 入力があると, 入力に合う変手を記録から取り出し, 変手にある変値を入力アルファベットの区切りに置き換える. 置き換え後, 変手のアルファベットが入力のそれと一致すれば, 入力と変手は一貫している. 一貫していなければ, それら全体を記録する. 取り出す変手がなければ "ない" を作って, 入力と "ない" を共に記録する.

連絡先: iwama@whatisthis.co.jp

3) 実行: 取り出した変手にある変値にアルファベットが入ると、変手を実行する。例えば、変手, "・・・と。を合わせる"の"・・・と"。"に"3"と"4"が入ると、変手を実行して"7"を出力する。

2.2 はじめから備えている機能

仕組みは、はじめから以下の機能を保持している。

- 1) 入力を得、区切る。入力は、アルファベットの並びで、2 系列(文と図)を別々に得る。
- 2) 並行して入力(文と図)があるときは、それらを結びつける。
- 3) 2つの区切りを比べ、アルファベットの並びが同じか求める。図の入力では、同じアルファベットの並びを長さとして、同じ、大小を求める。
- 4) アルファベットが同じ区切りをグループとする。
- 5) 区切りの前後の並び替え、いくつかの区切りをひとまとめとして、前後で並び替え、まとめりとして同じか比べる。
- 6) 繰り返しを見出す。
- 7) 入力と変手の間に一貫性が成り立たないとき、記録する。取り出した変手を実行したとき、実行結果が入力と合わなければ、全体を記録する。
- 8) 新たな入力があると、一部が合う変手があるかどうかを調べる。そして全体として合う変手があるかどうかを調べる。一部が変手と合うとは、"兄と弟が"の例で言えば、"合わせて 60 個拾いました"は、2つの個数を足し合わせる変手と、"兄は弟の2倍でした"は、2つの個数が何倍もある変手と合うことを言う。全体として合う変手は、入力の定数と変手と合う部分の並びが同じ変手だ。入力が全体として記録したある変手と合うのと、一貫性が成り立つとは同じ。
- 9) 記録した文と図を選択し、それらを汎化する。選択は、汎化の結果、定数となる部分、すでに作成した変手と合う部分とその並びが合うように行う。汎化した結果を、変手として記録する。
- 10) 新たな入力があると、区切った入力に合う変手を取り出す。変手にある変値を、入力にあるアルファベットで置き換える。置き換えによって実行できるとき(例えば、合わせるときは2つの変値が置き換えられると)、変手を実行する。実行で得たアルファベットを、変手にある関係"同じ"を使い、同じ値になるはずの変値と置き換える。

2.3 仕組みの発達

仕組み全体は、あらかじめある仕組みが、変手を蓄積していくことで発達する。はじめ、入力があると、そのまま記録する。記録がたまった段階で、入力をいくつか選択し、それらを汎化することで変手を作る。

ここで注意したいことは、はじめからある仕組みは、文のどの部分が課題でどの部分が解き方かの区分けは分からないし、区分けしないことだ。また、解き方と、解き方に関わることも、区分けできないし、区分けしないことだ。(それら区分けは、入力から出力へのパスにおいて、関係が同じ変手を選んで汎化することで得られるはずだが、ここでは議論しない。)

図は、はじめ単体と対応するアルファベットを使う。後に数直線を表すアルファベットを使う。(ここでは、単体を表すアルファベットの並びから数直線を表すアルファベットを生み出すこと -- 数直線の発明 -- は、議論しない。)

2.4 積み重ねの表現

新しく課題を入力すると、いくつかの部分は、それぞれ、すでに獲得した解き方を指す。図1は、その例を示す。"合わせる", "・・・倍"は、すでに獲得した解き方であり、それらを活用して今回の課題の解き方を作っている、積み重ねの例だ。

2.5 具体的な場合で解いてみる方法のはじまり

課題が入力されると、一般的な値を具体値にして関係を求め、一般的な場合にどうなりそうか求めることがある。次の例は、そのはじめだ。"400m 先を、分速 50m で歩いている妹を、ゆう子さんが分速 150m の速さの自転車で追いかけてました。ゆう子さんは、何分後に妹に追いつきますか。"

図2は、妹とゆう子さんの位置関係を例示する。

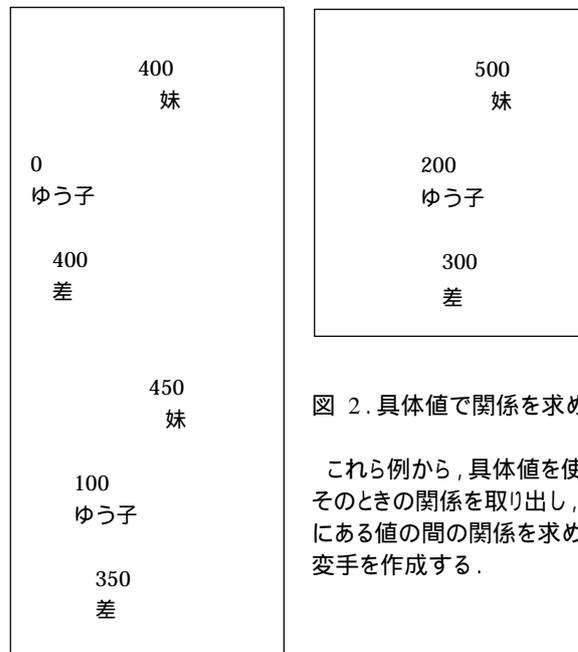


図2. 具体値で関係を求める例。

これら例から、具体値を使ってそのときの関係を取り出し、課題にある値の間の関係を求める変手を作成する。

現時点では、課題の型ごとに変手を作ることはできるが、様々な課題を通して利用できる変手は作れていない。

順問題を逆問題に使う方法も、一般的な仕組みは作れていない。

3. おわりに

数学の課題の解き方を帰納的に獲得し、新しい課題が入力されると、解き方を図で出力するツールについて議論した。ツールが作成する構造体から、積み重ね、解き方の型を、具体的に得ることができる可能性を示した。

発展する仕組みとして全体を通して実証していないので、今後、実証する必要がある。さらに、図を拡張し、面積と線分間の関係を表すことで、2次方程式の解き方、そして、体積、面積と線分間の関係を表すことで、3次方程式の解き方を作りたい。

参考文献

- [阿原 2011] 阿原一志: 大学数学の証明問題 発見へのプロセス, 東京図書, 2011.
- [Fujiwara 2009] Fujiwara M. and Iwama, K.: A program that acquires how to solve mathematical problems, Wseas Tr. On Computers, 2009.
- [Iwama 2006] Iwama, K.: A robotic program that acquires concepts and begins introspection, NeuroQuantology, 2006.
- [Mitchell 1997] Mitchell, T. M.: Machine Learning, McGraw Hill Co., 1997.
- [Polya 1954] Polya, G.: How to solve it A new aspect of mathematical method, Princeton Univ. Press, 1954.