2I2-3

安定マッチングモデルに基づく従業員配置の最適化

Optimization for Employee Allocation Problem via Stable Matching Models

檀 裕也　　林 綾太
Yuya Dan　　Ryota Hayashi

松山大学 経営学部
Faculty of Business Administration, Matsuyama University

This work is concerned with the mathematical model of optimization for employee allocation problem according to the algorithm of Gale and Shapley. We have the result of Monte Carlo simulation with perspective for the application to a place of business for retailing goods or foods.

1. はじめに

小売店や飲食店における従業員の職場配置計画は，企業経営の効率化という観点から重要な問題である．このような職場配置の最適化問題について，安定マッチングモデル（安定結婚モデル）に基づく数理モデルを提案し，その理論的性質を明らかにするとともに，従業員の生産性と満足度（モチベーション）による最適化を目指したモンテカルロ・シミュレーションを実行した．本稿では，そのシミュレーションの結果を報告し，職場配置計画の適切な評価関数について議論することによって，実店舗における導入へ向けた課題を検討する．

2. 問題の背景

企業が従業員の職場配置を決めるとき，各従業員の能力や適性に応じた最適な組み合わせを求める必要がある．特に，小売店や飲食店などサービス業の店舗における従業員の配置は，1日のうちでも混雑具合によっては時間単位でローテーションを決めなければならない．また，従業員の立場からは，なるべく希望の配置になるように配慮しなければ，従業員の満足度（モチベーション）は低下する．そこで，このようなポジショニングの問題を解決するには，従業員の生産性を目的関数とするだけでなく，従業員の配置希望を加味した組み合わせ最適化として捉えることが適切である．

既存の店舗では，職場配置の最適化を人手に頼っているという現状がある．その場合，毎日の業務として職場配置の立案が時間的に大きなウェートを占めるだけでなく，遅刻や欠勤など従業員の予定変更に対して迅速に職場配置を組み直すことは，現場の大きな負担になっている．

そこで，先行事例としてファーストフード店における職場配置問題の最適化に取り組んだ研究 [4] がある．その研究によると，従業員の配置希望順位（不完全リスト）と店舗責任者の評価順位（完全リスト）の組み合わせに対し，Gale と Shapley のアルゴリズム [1] を適用し，安定マッチング問題を解決する Web ベースの情報システムを構築した．さらに，その情報システムを実店舗の中で利用し，従業員，店舗責任者及び職場配置担当者による評価によって問題点を抽出している．その結果，従業員の希望を優先するマッチングを行うべきであると提案している．

連絡先: 檀裕也, 松山大学経営学部, 愛媛県松山市文京町 4-2, 電話番号 089-925-7111, dan@cc.matsuyama-u.ac.jp

3. 数理モデルの構築

本節において，安定マッチング問題の数理モデルを構成し，その理論的な性質を解析する．

3.1 安定マッチングの数理モデル

ある時間帯に，従業員 $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を職場 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ に配置する．このとき，k 人の従業員が同一の職場に配置されることがあるが，例えば P の要素 p_j を $p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{jk}$ と分割したグループを考慮することによって $n = m$ としても一般性を失わない．すると，本研究で考察する安定マッチング問題は，従業員の配置希望や生産性を目的関数とする $n!$ 通りの組み合わせ最適化問題に帰着できる．

従業員の集合 E と職場配置の集合 P に対し，写像 $\phi : E \to P$ が全単射，すなわち，

- 単射性：$\forall e_1, e_2 \in E; e_1 \neq e_2 \Rightarrow \phi(e_1) \neq \phi(e_2)$
- 全射性：$\phi(E) = P$ i.e. $\forall p \in P, \exists e \in E$ s.t. $\phi(e) = p$

の条件が同時に成り立つとき，ϕ を安定マッチング問題の解という．このとき，逆写像 ϕ^{-1} が存在して

$$\exists \phi^{-1} : P \to E \text{ s.t. } \phi^{-1}(P) = E \tag{1}$$

となる．

ここで，従業員 $e \in E$ の配置希望リストは全順序 $(P, \leq_e)$ で表現できる．また，職場 $p \in P$ における従業員の生産性順位に基づくリストから，同様にして全順序 $(E, \leq_p)$ を得ることができる．

次の 2 つの条件を同時に満足する $e \in E$ と $p = \phi(e) \in P$ の組 $(e, p) \in E \times P$ を不安定マッチングと呼ぶ：

- $\exists x \in E$ s.t. $e \leq_p x$
- $p \leq_e \phi(x)$

安定マッチング問題の解 ϕ のうち，不安定マッチング $(e, \phi(e))$ が存在しないものを安定解という．不安定マッチングとは，例えば e_1 が p_1 で，e_2 が p_2 で働く職場配置になっているにも拘らず，実は，e_1 は p_1 よりも p_2 への配置を強く希望し，職場 p_2 の生産性は e_2 よりも e_1 のほうが高いというミスマッチの状況が存在することを示す．安定マッチング問題における安定解とは，このような不安定マッチングが存在しない状況である．

3.2 解の評価関数

安定マッチング問題の解から，各 $e_j \in E$ について配置された職場 $\phi(e_j) \in P$ の希望順位 x_j が決まる．第一希望からの隔たりを評価するため，$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ について k 次の正規化モーメント

$$I_k(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)^k \tag{2}$$

を使って，従業員の不満度を

$$I_k = \sqrt[k]{I_k(X)} \tag{3}$$

によって定義する．I_k の k に関する微分を計算することによって，I_k は k について単調減少，すなわち，$k \le l$ ならば

$$I_k \ge I_l \tag{4}$$

であることが分かる．

次に k の値を固定して考えると，すべての従業員が第一希望の職場に配置されたとき，かつ，そのときに限り，I_k は 0 の値を取る．もちろん，そのような解が存在すると，すべての従業員に不満がない状態が実現する．配置された従業員の希望が第二希望，第三希望，……と下がるにつれて，I_k の値は増大する．

I_k の k に関する単調減少性は，k の値が小さい（$k < 1$）ときは従業員の上位の配置希望が実現することを重視し，k の値が大きい（$k > 1$）ときは従業員の下位の配置希望が実現しないことを不満度として重視していることになる．

3.3 Gale-Shapley のアルゴリズム

与えられた選好リストに基づき安定マッチング問題の安定解を求める方法として，Gale-Shapley のアルゴリズムが知られている．このアルゴリズムに従うと，安定解の一つを必ず求めることができる．

まず，従業員 $e \in E$ の職場配置に関する選好リストを用意する．この選好リストには，従業員ごとに，第一希望の職場から $p \in P$ のすべての選好順序を指定する．また，職場 $p \in P$ ごとに従業員の選好リストを用意する．この選好リストは，実質的には店舗責任者または職場配置担当者が従業員の能力や適性に応じて定める．

安定マッチングの探索においては，職場配置が決まっていない従業員について，その従業員の職場配置に関する選好リストの上位から，仮配置先を決める．仮配置先に，すでに仮配置されている従業員がいる場合には，その職場における従業員の選好リストに基づき，配置を判断する．もし，すでに仮配置されている従業員の生産性が高いときには，何も変更しない．しかし，仮配置されている従業員よりも仮配置先を求めている従業員の生産性が高いときには，すでに仮配置されている従業員の仮配置を取り消し，仮配置を入れ替える．

以上の操作を従業員の仮配置がすべて決まるまで繰り返す．すべての従業員について仮配置が決まったとき，それらの仮配置を正式な配置案として提案する．

Gale-Shapley のアルゴリズムは，適切な選好リストに従う限り，有限の回数で終了することが保証されている．そして，提案される配置案は，安定マッチング問題における安定解の一つとなっている．

表 1: 配置希望リストの例

	1	2	$\cdots$	20
e_1	p_1	p_2	$\cdots$	p_{20}
e_2	p_{12}	p_7	$\cdots$	p_5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
e_{20}	p_3	p_{16}	$\cdots$	p_{12}

表 2: 生産性順序リストの例

	e_1	e_2	$\cdots$	e_{20}
p_1	1	3	$\cdots$	5
p_2	18	5	$\cdots$	12
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
p_{20}	2	17	$\cdots$	5

アルゴリズムの手順

1．選好リストを用意する
2．安定マッチングを探索する
　(1) 仮配置先が決まっていない従業員を取り出す
　(2) 選好リストの上位から仮配置先の候補を決める
　(3) 仮配置先の状態
　　[A] まだ誰も仮配属されていない
　　　→そのまま仮配属させる
　　[B] すでに仮配属された従業員がいる
　　　(a) 生産性で優れている
　　　　→仮配属の従業員を入れ替える
　　　(b) 生産性で優れていない
　　　　→他の仮配属先をあたる
3．安定マッチングを出力する

4. シミュレーション

4.1 計算機実験の設定と実行環境

安定マッチング問題を考えるには，従業員による配置希望リストと店舗責任者による生産性順序リストが必要となる．今回の計算機実験では，一様乱数の生成によって，表 1 と表 2 のような 20 人分のリストを作成した．なお，一様乱数の性質上，順位には重複を許している．

配置希望リスト（表 1）は，各従業員 $e \in E$ について職場配置の希望順位を示したものである．職場配置の第一希望から順に希望する職場 $p \in P$ の順列を生成している．

また，生産性順序リスト（表 2）は，従業員の能力や適性などに基づき職場ごとに生産性を示したものである．配置希望リストとは異なり，従業員ごとの順位を与えてデータ構造を作っているのは，アルゴリズムの実装上の理由によるものである．

作成されたリストに基づき，安定マッチングモデルのアル

表 3: 実行環境

CPU	Intel Core 2 Duo T9600 (2.80GHz)
メモリ	4 GB
OS	Microsoft Windows 7 (64 ビット)

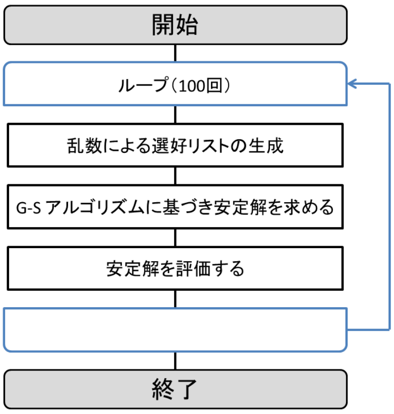

図 1: シミュレーションの概要

表 4: 実験結果の概要

	第一希望	$k=1/2$	$k=1$	$k=2$
平均値	6.67	28.1	2.35	0.83
標準偏差	2.34	13.3	0.80	0.25

ゴリズムに沿って，安定解を求める．このモンテカルロ法の手順を 84 回繰り返し，複数の評価関数により算出される指標を統計的に比較した．なお，計算機実験に用いたプログラムは Java で実装し，表 3 に示した計算環境で実行した．

4.2 実験結果

計算機実験の結果，84 回の試行で従業員の職場配置が第一希望で実現できる割合は，20 人の中で 6.67 ± 2.34 人であることが明らかになった．

また，職場配置の結果に対する従業員の不満度を評価すると，$k = 1/2$, 1, 2 のそれぞれに対する平均値は，それぞれ 28.1 ± 13.3, 2.35 ± 0.80, 0.83 ± 0.25 となった．

第一希望が実現した従業員の人数と $k = 1/2, 1, 2$ のそれぞれに対する正規化された評価値について相関を調べたものが，それぞれ図 2，図 3 および図 4 である．正規化された評価値とは，各 k に対する評価値を同じスケールで比較するため，平均値との残差を標準偏差で割ることによって算出したものである．

各データに対する回帰直線は，x を第一希望が実現した数，y を正規化された評価値 I_k とすると，それぞれ

$$y = -0.34x + 2.29 \quad \text{with } R^2 = 0.65 \tag{5}$$

$$y = -0.28x + 1.90 \quad \text{with } R^2 = 0.44 \tag{6}$$

$$y = -0.22x + 1.49 \quad \text{with } R^2 = 0.27 \tag{7}$$

となり，いずれも負の相関が見られる．また，それぞれの決定係数 R^2 から，k の値を大きく取ると，その相関が弱まることが分かる．

以上の結果から，k の値が小さい（$k < 1$）ときは，従業員の上位の配置希望が実現することを重視する結果，第一希望実現率との相関が比較的高いことが確認できた．また，k の値が大きい（$k > 1$）ときは従業員の下位の配置希望が実現しないことを重視していることになるため，第一希望実現率との相関は弱まっていることも確認できる．

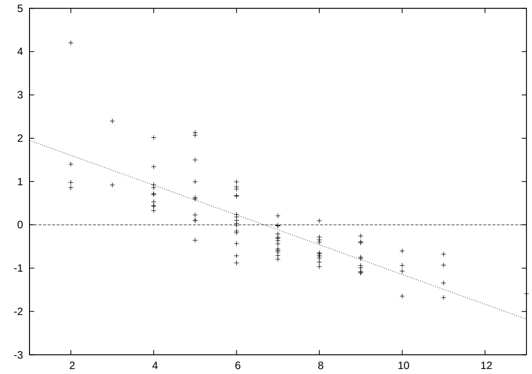

図 2: $k = \frac{1}{2}$ に対する評価関数と第一希望実現率の相関

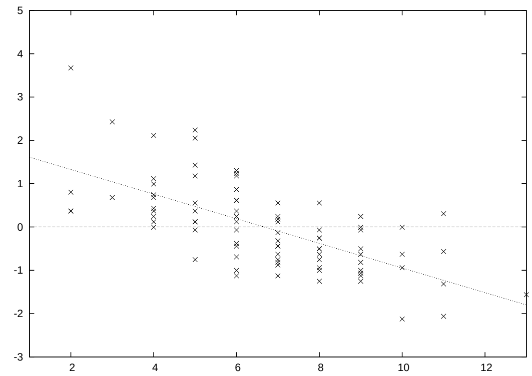

図 3: $k = 1$ に対する評価関数と第一希望実現率の相関

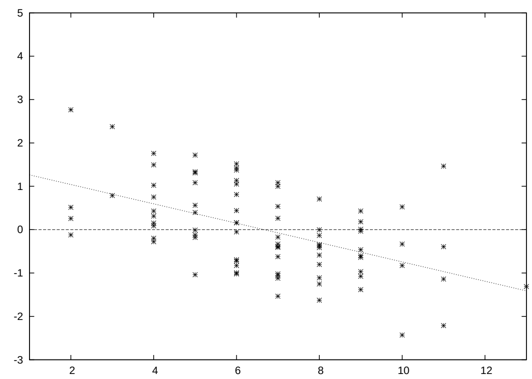

図 4: $k = 2$ に対する評価関数と第一希望実現率の相関

表 5: ある試行における計算結果

E	P	順位	1	2	3	4	5	6	7
e_1	p_{12}	1	12	13	2	9	18	6	14
e_2	p_{11}	8	17	18	8	19	10	9	19
e_3	p_{19}	1	19	19	2	7	7	13	6
e_4	p_5	2	14	5	11	16	4	16	8
e_5	p_{17}	4	15	15	18	17	11	15	1
e_6	p_{14}	2	19	14	3	9	13	20	10
e_7	p_{15}	6	12	6	8	14	18	15	18
e_8	p_3	1	3	16	15	20	19	17	1
e_9	p_{13}	17	2	5	19	16	18	16	16
e_{10}	p_{10}	3	18	6	10	1	3	14	15
e_{11}	p_7	10	5	1	5	10	20	11	17
e_{12}	p_{16}	1	16	12	4	5	4	10	19
e_{13}	p_1	2	12	1	13	12	14	5	19
e_{14}	p_4	2	15	4	4	2	10	6	6
e_{15}	p_6	14	3	1	16	2	5	15	12
e_{16}	p_2	15	16	18	4	5	9	20	11
e_{17}	p_{20}	5	14	5	18	17	20	12	15
e_{18}	p_{18}	2	3	18	17	10	17	5	16
e_{19}	p_8	2	18	8	4	20	2	2	12
e_{20}	p_9	1	9	17	18	6	10	12	12

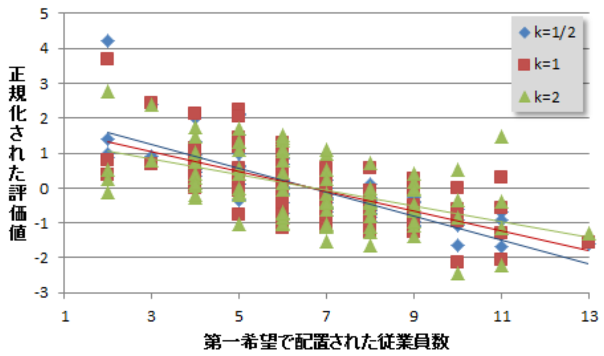

図 5: I_k の比較

4.3 試行の詳細

シミュレーションにおける一つの試行の様子を詳しく見るため，ある試行における計算結果を表 5 にまとめた．この表には，シミュレーションの結果として得られた従業員 $e_j \in E$ と職場 $p_k \in P$ の組み合わせとともに，従業員のその職場に対する希望順位，選好リストとして提出した職場配置希望順位（上位 7 位まで）が示されている．

また，その試行における職場ごとの生産性リスト（一部抜粋）を表 6 に示した．表中の 0 は，シミュレーションにおける計算上，使われていない項目であることを表している．

この試行の結果，第一希望での配属が実現した（配属結果に不満のない）従業員の数は 5 であることが得られた．式 (2) と (3) におけるデータ集合となる X を求めると，$X = (1, 8, 1, 2, 4, 2, 6, 1, 17, 3, 10, 1, 2, 2, 14, 15, 5, 2, 2, 1)$ となることから，$k = 1/2, 1, 2$ に対する I_k の評価値は，それぞれ 46.1, 3.95, 1.42 と計算することができる．

表 6: その試行における生産性リスト

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	19	2	20	16	1	13	15	17	0	0
p_2	1	0	0	12	8	19	16	11	2	4
p_3	17	14	7	0	0	0	12	0	15	0
p_4	12	0	11	20	0	0	14	18	0	17
p_5	0	6	16	0	1	12	5	0	0	15
p_6	0	0	16	17	12	0	13	0	5	19
p_7	16	12	5	11	6	7	19	0	14	0
p_8	0	12	10	4	20	7	1	13	3	0
p_9	0	7	0	19	20	2	17	1	0	3
p_{10}	0	0	18	20	13	14	0	17	19	0
p_{11}	19	0	8	0	20	10	16	9	18	15
p_{12}	0	0	15	19	1	0	20	0	0	14
p_{13}	15	0	10	13	1	11	20	0	19	16
p_{14}	0	19	18	7	0	0	8	20	3	13
p_{15}	0	16	7	0	3	0	0	14	6	0
p_{16}	0	10	14	0	0	18	0	0	1	19
p_{17}	19	4	0	15	0	8	0	17	6	20
p_{18}	7	10	15	0	16	1	18	6	17	12
p_{19}	15	19	0	14	0	0	0	9	11	13
p_{20}	18	8	0	0	0	9	0	16	0	20

5. まとめ

本研究では，安定マッチングモデルに関する Gale と Shapley のアルゴリズムを従業員の職場配置の最適化に応用し，その理論を考察するとともに，モンテカルロ法に基づくシミュレーションによって評価関数の比較を行った．

シミュレーションの結果，単に第一希望が実現した割合だけでなく，上位・下位の希望が実現した点を I_k の評価式を使って算出することで，全体最適の観点から望ましい評価を与えることが確認できた．また，希望順位の上位・下位のどちらを重視するのかによって，k の取り方に関する示唆を得た．

今後は，アンケート評価に基づく評価関数の最適化と生産性向上の効果を取り入れ，小売店や飲食店などの実店舗における従業員の職場配置計画に適用することを目指した改良が課題である．

参考文献

[1] D. Gale and L. S. Shapley, ”College Admissions and the Stability of Marriage,” The American Mathematical Monthly, Vol. 69, no. 1, pp. 9–15. (1962)

[2] 奥居哲, 柴田祥一, 岡田稔, 川島信「安定結婚アルゴリズムに基づく卒業研究配属の事例研究」アルゴリズム研究会報告（情報処理学会）, Vol. 92, pp. 67–72. (2003)

[3] 檀裕也「モンテカルロ法による研究室配属モデルのシミュレーション」松山大学論集, Vol. 19, pp. 75–89. (2007)

[4] 林綾太「従業員の生産性及び満足度（モチベーション）によるポジショニングの最適化」松山大学卒業論文. (2011)