1J3-2

# オイラー図・ヴェン図推論の翻訳と Free ride

## Translations of Euler and Venn Diagrammatic Reasoning and Free Ride

竹村　亮
Ryo Takemura

慶應義塾大学・文学部・哲学科
Department of Philosophy, Keio University

オイラー図推論およびヴェン図推論を統一的に翻訳するための記号論理体系として、Prolog（式計算）風の節集合計算を導入する。節集合計算への翻訳を通してオイラー図推論とヴェン図推論の違いを特徴付ける。さらに節集合計算への翻訳を基に図形体系のもっとも基本的な認知的性質の一つである free ride（自動表現）を形式化する。

## 1. はじめに

オイラー図やヴェン図は、元々は三段論法を表現するために導入された最も基本的な図形表現の一つであるが、最近では知識表現やオントロジーなどへの様々な応用が研究されている。

オイラー図やヴェン図は 1990 年代になって数学的・論理学的研究が行われるようになり、これまでとくに表現レベルの意味論的な研究が中心に行われてきた（例えば [1, 5]）。それに対して [2] ではオイラー図推論の証明論が導入され、[3] では既存の記号論理体系への翻訳が考察され、オイラー図体系は自然演繹によって、またヴェン図体系は導出計算によって自然に特徴付けられることが議論されている。また [6] では、自然演繹への翻訳を通してオイラー図推論体系の正規化定理が証明され、さらに free ride の証明論的形式化が行われている。

Free ride（自動表現）は、図形体系のもっとも基本的な性質の一つであり、推論における図形の有効性の説明としてこれまで主に認知科学の文脈で議論されてきた。Free ride は、与えられた図形に何らかの情報を付加することで得られた図形に、元の図形や情報には現れていなかった情報が自動的に表現される現象である。Shimojima [4] は Barwise のチャンネル理論の枠組みで free ride を形式化し、free ride が起こる意味論的条件を分析している。[6] では、オイラー図体系から自然演繹への翻訳の健全性定理が、free ride が起きる意味論的条件を含意することが示され、翻訳を通した証明論的な free ride の形式化が与えられている。このような証明論的分析では、free ride によって得られる情報を、翻訳先の推論体系で導出するためにはどのような、またどれだけの推論ステップが必要かなど、より詳細な free ride の分析が可能となる。

本稿では、オイラー図およびヴェン図体系を統一的に翻訳するための記号論理体系として節集合計算 CC を導入する。CC は Prolog や導出計算と同様に節を基本表現とし、節の集合に対する推論規則で構成される。第 4 節では、オイラー図推論、ヴェン図推論、三段論法推論を、CC への翻訳に用いられる節集合の種類および推論規則の違いを通じて特徴付ける。また第 5 節では、オイラー図やヴェン図の操作によって得られる情報、すなわち free rides を CC への翻訳を基に定義する。*1

連絡先: takemura@abelard.flet.keio.ac.jp

*1　以下ではスペースの都合上、図形は円のみから構成され、対象の存在を表すための「点」などは明示的には扱わない。（点は特殊な円と見なすこともできる。[3] を参照。）推論規則についても、もっとも基本的な合成規則（オイラー図の Unification およびヴェン図の Superposition）のみを扱う。

## 2. オイラー図推論体系

[2] のオイラー図体系は、これまでのヴェン図研究に基づく形式化（例えば [1]）とは異なり、オイラー図にとって本質的なものは円や点の間の位相的（包含・排他）関係であるという観点に基づいて導入されている。

EUL **図**（$\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$）は、少なくとも二つの名前つき単純閉曲線（以下単に**円**と呼び、$A, B, C, \ldots$ で表す）からなる平面である。ここで、各円は唯一のそれぞれ異なる名前を持つものとする。ちょうど二つの円からなる EUL 図は**最小図**と呼ばれ、$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ で表される。

EUL **関係**とは円の間の以下のような二項関係である。

| | |
|---|---|
| $X \sqsubset Y$ | $X$ の内部が $Y$ の内部の内にある |
| $X \vdash\!\dashv Y$ | $X$ の内部が $Y$ の内部の外にある |
| $X \bowtie Y$ | $X$ と $Y$ の内部が共通部分を持ち、どちらも包含関係にない |

EUL 図 $\mathcal{D}$ において成り立つ EUL 関係の集合はただ一つに定まる。その集合を $\mathsf{rel}(\mathcal{D})$ と表わす。例えば下の Fig. 1 の $\mathcal{D}_3$ の場合、$\mathsf{rel}(\mathcal{D}_3)$ は $\{A \bowtie B, A \sqsubset C, B \bowtie C\}$ である。ただし $X \sqsubset X$ の形の自明な関係は省略する。

EUL 図の間の同値性は、EUL 関係を基に定義される。EUL 図 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ について、$\mathsf{rel}(\mathcal{D}) = \mathsf{rel}(\mathcal{E})$ が成り立つとき、$\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ は同値な図形と見なされる。従って Fig. 1 の $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ は同値な図形である。*2 他方で、$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_3$（同様に $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_4$）については、$\mathcal{D}_1$ の $A \bowtie C$ の代わりに $\mathcal{D}_3$ では $A \sqsubset C$ が（$\mathcal{D}_1$ の $A \bowtie C$ 及び $B \bowtie C$ の代わりに $\mathcal{D}_4$ では $C \sqsubset A$ 及び $C \sqsubset B$ が）成り立っているため、異なる EUL 図である。

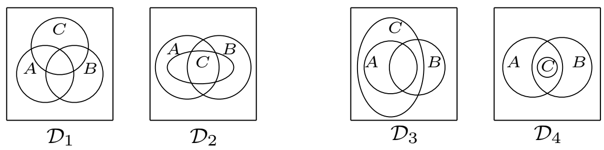


Fig. 1

**モデル**とは順序対 $(U, I)$ のことであり、$U$ は非空な集合、$I$ は各円に $U$ の非空な部分集合を割り当てる解釈関数である。$(U, I)$ が EUL 図 $\mathcal{D}$ のモデルであるのは、以下の**真理条件**が成り立つときである。すなわち、$\mathcal{D}$ の任意の円 $A, B$ について、

(1)　$I(A) \subseteq I(B)$　　$A \sqsubset B$ が $\mathcal{D}$ で成り立つとき
(2)　$I(A) \cap I(B) = \emptyset$　　$A \vdash\!\dashv B$ が $\mathcal{D}$ で成り立つとき

*2　このような図形の同一視は、平面図の観点からは直感にそぐわないかもしれないが、共通領域を円と同様の図形的対象とみなしてそれらの間の EUL 関係を考えることにより、$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ を区別することが可能となる。（[2] を参照。）

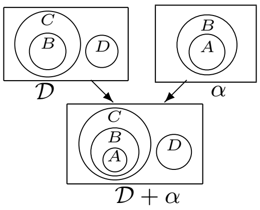

Fig. 2　オイラー図証明

$$\dfrac{\mathcal{D}^\circ \quad \alpha^\circ \quad \dfrac{\dfrac{\alpha^\circ}{A\to B}\,del \quad \dfrac{\mathcal{D}^\circ}{B\to C}\,del}{A\to C}\,cut \quad \dfrac{\dfrac{\alpha^\circ}{A\to B}\,del \quad \dfrac{\mathcal{D}^\circ}{BD\to}\,del}{AD\to}\,cut}{\mathcal{D}^\circ\ ,\ \alpha^\circ\ ,\ \underbrace{A\to C\ ,\ AD\to}_{\text{Free rides}}}\,add$$

Fig. 3　Fig. 2 のオイラー図証明の翻訳

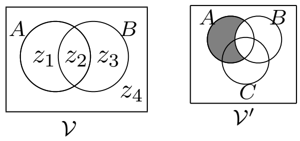

Fig. 4

上の定義から分かるように、$\bowtie$ 関係は EUL 図の真理条件には関わらず、$A \bowtie B$ は排中律 $I(A) \cap I(B) = \emptyset$ *or* $I(A) \cap I(B) \neq \emptyset$ を意味するものとして理解される。

意味論的帰結の概念は通常の記号論理体系と同様に定義される。

[2] のオイラー図体系における推論規則 Unification は与えられた二つの図形を、それらの意味論的連言を表す一つの図形に合成する規則である。Unification は二つの図の片方を最小図に限ることで定義される。これにより最小図を命令と見なして、与えられた図形を書き換えていく操作としてオイラー図推論を捉えることができる。例えば Fig. 2 の合成図 $\mathcal{D}+\alpha$ は、最小図 $\alpha$ を「$B$ の内側に $A$ を描く」という命令とみなして、円 $A$ を加えて $\mathcal{D}$ を書き換えることで得られる。各推論規則は、前提図と、それに円を加えたり変形したりするための図形操作を EUL 関係を基に記述することで定義される。詳しくは [2, 6]。Unification の一つである U5 規則は以下のように定義される。

$\boxed{\text{U5}}$ **前提図：**$A \sqsubset B$ という関係が成り立っている最小図 $\alpha$ と、円 $B$ を含む一般図 $\mathcal{D}$（$A$ は含まない)。
**操作：**以下の条件を満たすように円 $A$ を $\mathcal{D}$ に加えることにより $\mathcal{D}+\alpha$ が得られる。(1) $\mathcal{D}+\alpha$ では $A \sqsubset B$ が成り立つ。(2) $\mathcal{D}$ において $X \sqsubset B$ もしくは $X \bowtie B$ が成り立つような任意の円 $X$ に対して、$\mathcal{D}+\alpha$ では $A \bowtie X$ が成り立つ。

上記のような、与えられた図に円を付け加える操作の具体的な記述は、[5] でグラフ理論に基づいて与えられている。

**オイラー図証明**の概念は通常の記号論理体系と同じように、推論規則の連鎖として帰納的に定義される。[2] では完全性定理が証明され、一般図どうしの合成は、片方を最小図に限定した Unification によって捉えられることが保証されている。

Fig. 2 は U5 規則の適用で得られる**オイラー図証明**である。

## 3.　ヴェン図推論体系

**ヴェン図**（$\mathcal{V}, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots$）は、有限個の円（名前付き単純閉曲線）からなる平面である。ただしどの二つの円も必ず一度は交錯していなければならない。

ヴェン図 $\mathcal{V}$ の**最小領域**（$z, z_1, z_2, \dots$）は、$\mathcal{V}$ のいくつかの円の内側にあって、その他の全ての円の外側に位置するような平面の一部である。したがって $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m\}$ が $\mathcal{V}$ のすべての円の名前の集合のとき、各最小領域は $X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_m}$ のような名前の列で規定することができる。ただし $X_1, \dots, X_n$ はその最小領域を内側に含む円の名前であり、また $Y_1, \dots, Y_m$ はその最小領域を含まない円の名前である。一般の**領域**はいくつかの最小領域の和である。

Fig. 4 のヴェン図 $\mathcal{V}$ は四つの最小領域から成る。$z_1$ は $A$ の内側で $B$ の外側（$A\overline{B}$)、$z_2$ は $A, B$ の内側（$AB$)、$z_3$ は $B$ の内側で $A$ の外側（$\overline{A}B$)、$z_4$ は $A, B$ の外側（$\overline{A}\overline{B}$）である。

一般に $X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_m}$ のような（上線付）円の名前の列を $r$ で表し、それらの名前の順序及び繰り返しを無視する（つまり $r$ を集合とみなす)。また $|r|$ によって、名前の集合 $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m\}$ を表す。$r$ と $r'$ の連結を $rr'$ と表す。

ヴェン図での有意味な主張は、オイラー図のような位相的関係ではなく、**影（shading）**を用いて空な領域を指定することによってなされる。このためヴェン図はこれまで、影付最小領域の集合として抽象的に形式化されてきた（[1] など)。例えば、Fig. 4 の $\mathcal{V}'$ は影付最小領域の集合 $\{A\overline{B}\overline{C}, A\overline{B}C\}$ によって定義される。しかし図形から意味を読み取る認知過程を考慮すると、$\mathcal{V}'$ から「$A$ であって $B$ でないものはない」すなわち「すべての $A$ は $B$ である」を読み取るためには、$A\overline{B}\overline{C}$ と $A\overline{B}C$ という二つの最小領域に影があることを別々に認識するだけでは充分でなく、それらを統合した領域に影があることを認識できなければならない。したがってヴェン図の形式化には最小領域のみならず、いくつかの領域を統合した領域も考慮すべきであると考えられる。このようなアイデアに基づき、本稿ではヴェン図の領域のうちで以下の区別を導入する。

**定義 1**　ヴェン図 $\mathcal{V}$ の**連言的領域** $r$ とは、$\mathcal{V}$ の円の名前を用いて $X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_m}$ と表される領域である。ここで、$n \geq 1, m \geq 0$ である。上線付の名前のみで $\overline{Y_1} \cdots \overline{Y_m}$（$m \geq 1$）のように表される領域は**否定的領域**と呼ばれる。連言的でも否定的でもない領域は、**選言的領域**と呼ばれる。

したがって、$\mathcal{L}$ が $\mathcal{V}$ の円の名前の集合のとき、$|r| = \mathcal{L}$ となる連言的または否定的領域 $r$ が、通常の最小領域である。

Fig. 4 のヴェン図 $\mathcal{V}$ について、$z_1\ (= A\overline{B}), z_2\ (= AB), z_3\ (= \overline{A}B), z_1 \cup z_2\ (= A), z_2 \cup z_3\ (= B)$ はすべて連言的領域（最初の三つは最小領域）であり、また $z_4\ (= \overline{A}\overline{B})$ や $z_3 \cup z_4\ (= \overline{A})$ 等は否定的領域、$z_1 \cup z_3$ や $z_1 \cup z_2 \cup z_3$ 等は選言的領域である。

連言的領域は、「$X_1, \dots, X_n$ であって $Y_1, \dots, Y_m$ でないもの」を表しており、本稿ではとくにこのもっとも基本的な連言的領域に基づくヴェン図の形式化について考察する。

各連言的領域には**影**を付けることができ、とくにどの連言的領域にも影がないヴェン図は**基本図**と呼ばれる。

ヴェン図 $\mathcal{V}$ について、$shm(\mathcal{V})$ は影付最小領域の名前の集合、$shc(\mathcal{V})$ は影付連言的領域の名前の集合を表すものとする。

ヴェン図の意味論は [1] と同様に定義される。**モデル**とは $(U, I)$ の組であり、$U$ は非空な集合、$I$ は各円に $U$ の部分集合（空集合も含む）を割り当てる解釈関数である。さらに連言的領域 $r = X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_m}$ について、$I(r)$ は $I(X_1) \cap \cdots \cap I(X_n) \cap \overline{I(Y_1)} \cap \cdots \cap \overline{I(Y_m)}$ と定義される。ただし、$\overline{I(Y_j)}$ は $I(Y_j)$ の補集合である。$(U, I)$ がヴェン図 $\mathcal{V}$ のモデルであるのは、$\bigcup_{r \in shc(\mathcal{V})} I(r) = \emptyset$ となるときである。

ヴェン図の推論規則のうち、ここでは以下の図形の合成に関する規則のみ扱う。その他の規則については [1, 3] を参照。

$\boxed{\text{Introduction of a circle}}$
**前提図：** 円 $A$ を含まないヴェン図 $\mathcal{V}$。
**操作：**各連言的領域と否定的領域を二分するように円 $A$ を $\mathcal{V}$ に加えることにより、ヴェン図 $\mathcal{V}+A$ が得られる。

$\boxed{\text{Superposition of diagrams}}$
**前提図：** 同一の円から成るヴェン図 $\mathcal{V}_1$ と $\mathcal{V}_2$。

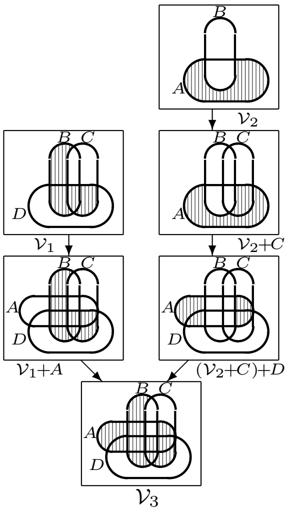

Fig. 5　ヴェン図証明

$$\pi_1 \left\{ \dfrac{\mathcal{V}_1^\bullet \qquad \dfrac{\mathcal{V}_1^\bullet}{A\mathcal{V}_1^\bullet}\,gwL \qquad \dfrac{\mathcal{V}_1^\bullet}{\mathcal{V}_1^\bullet A}\,gwR}{(\mathcal{V}_1{+}A)^\bullet = \mathcal{V}_1^\bullet \cup \left\{ \begin{array}{l} ACD{\to}B,\ ABCD{\to},\ ABD{\to}C,\ AB{\to}CD,\ ACD{\to},\ ABD{\to},\ AB{\to}C, \\ CD{\to}AB,\ BCD{\to}A,\ BD{\to}AC,\ B{\to}ACD,\ CD{\to}A,\ BD{\to}A,\ B{\to}AC \end{array} \right\}}\,add \right.$$

ここで、$\mathcal{V}_1^\bullet = \{CD{\to}B, BCD{\to}, BD{\to}C, B{\to}CD, CD{\to}, BD{\to}, B{\to}C\}$

$$\pi_2 \left\{ \dfrac{\dfrac{\mathcal{V}_2^\bullet = \{A{\to}B\} \qquad \dfrac{\mathcal{V}_2^\bullet}{C\mathcal{V}_2^\bullet}\,gwL \qquad \dfrac{\mathcal{V}_2^\bullet}{\mathcal{V}_2^\bullet C}\,gwR}{(\mathcal{V}_2{+}C)^\bullet = \mathcal{V}_2^\bullet \cup \{AC{\to}B, A{\to}BC\}}\,add \qquad \dfrac{(\mathcal{V}_2{+}C)^\bullet}{D(\mathcal{V}_2{+}C)^\bullet}\,gwL \qquad \dfrac{(\mathcal{V}_2{+}C)^\bullet}{(\mathcal{V}_2{+}C)^\bullet D}\,gwR}{((\mathcal{V}_2{+}C){+}D)^\bullet = (\mathcal{V}_2{+}C)^\bullet \cup \{ACD{\to}B, AC{\to}BD,\ \ AD{\to}BC, A{\to}BCD,\ \ AD{\to}B, A{\to}BD\}}\,add \right.$$

$$\pi \left\{ \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\ \pi_1 \\ (\mathcal{V}_1{+}A)^\bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots\ \pi_2 \\ ((\mathcal{V}_2{+}C){+}D)^\bullet \end{array} \quad \dfrac{\dfrac{((\mathcal{V}_2{+}C){+}D)^\bullet}{AD{\to}BC} \quad \dfrac{(\mathcal{V}_1{+}A)^\bullet}{ABD{\to}C}}{AD{\to}C} \quad \dfrac{\dfrac{((\mathcal{V}_2{+}C){+}D)^\bullet}{A{\to}BCD} \quad \dfrac{(\mathcal{V}_1{+}A)^\bullet}{AB{\to}CD}}{A{\to}CD} \quad \dfrac{\dfrac{((\mathcal{V}_2{+}C){+}D)^\bullet}{AD{\to}B} \quad \dfrac{(\mathcal{V}_1{+}A)^\bullet}{ABD{\to}}}{AD{\to}} \quad \dfrac{\dfrac{((\mathcal{V}_2{+}C){+}D)^\bullet}{A{\to}BC} \quad \dfrac{(\mathcal{V}_1{+}A)^\bullet}{AB{\to}C}}{A{\to}C}}{(\mathcal{V}_1{+}A)^\bullet \cup ((\mathcal{V}_2{+}C){+}D)^\bullet \cup \underbrace{\{AD{\to}C, A{\to}CD, AD{\to}, A{\to}C\}}_{\text{Free rides}}}\,add \right.$$

Fig. 6　Fig. 5 のヴェン図証明の翻訳

**操作：**$\mathcal{V}_1$ と同一の円から成る基本図を構成し、$\mathcal{V}_1$ または $\mathcal{V}_2$ の影付最小領域に対応する領域すべてに影を付けることにより、ヴェン図 $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ が得られる。

Fig. 5 は $\mathcal{V}_1$ 及び $\mathcal{V}_2$ から $\mathcal{V}_3$ への**ヴェン図証明**である。$\mathcal{V}_1$、$\mathcal{V}_2$、$\mathcal{V}_3$ はそれぞれ、Fig. 2 のオイラー図 $\mathcal{D}$、$\alpha$、$\mathcal{D}+\alpha$ に対応している。

## 4.　図形推論体系の翻訳

### 4.1　節集合計算（Calculus of Clause sets CC）

以下では命題変項の集合 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ を $A_1 \cdots A_n$ と省略し、$\Gamma, \Delta, \ldots$ で表す。$\Gamma$ と $\Delta$ の和を $\Gamma\Delta$ と表す。

**定義 2** $\Gamma$ と $\Delta$ を命題変項の集合とするとき、$\Gamma{\to}\Delta$ を**節**と呼ぶ。$\Delta$ が高々一つの命題変項のみからなる節を**ホーン節**と呼ぶ。節（またはホーン節）の集合 $\{\Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n\}$ を**節集合（ホーン節集合）**と呼び、$S, S_1, S_2, \ldots$ で表す。$\{\ \}$ は省略する。

節 $\Gamma{\to}\Delta$ は、論理式 $\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$ を意味し、節集合 $S$ は $\bigwedge S$ を意味する。

**定義 3 節集合計算**（CC）は以下の推論規則から成る。
$A{\to}A$ と ${\to}\top$ を公理とする。

$$\dfrac{\Gamma{\to}\Delta A \quad A\Pi{\to}\Lambda}{\Gamma\Pi{\to}\Delta\Lambda}\,cut \qquad \dfrac{\Gamma{\to}\Delta}{A\Gamma{\to}\Delta}\,wL \qquad \dfrac{\Gamma{\to}\Delta}{\Gamma{\to}\Delta A}\,wR$$

$$\dfrac{\Gamma_1{\to}\Delta_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n{\to}\Delta_n}{\Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n}\,add \qquad \dfrac{\Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n, \Pi_1{\to}\Lambda_1, \ldots, \Pi_l{\to}\Lambda_l}{\Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n}\,del$$

最初の規則は式計算のカット規則で導出計算の導出原理に対応する。$wL, wR$ は式計算の weakening 規則である。（節集合に対しては contraction 及び exchange 規則は前提されている。）$add, del$ 規則はそれぞれ節集合に対する和と分離である。

$add, del$ 規則は自然演繹における連言の導入・除去の一般化に対応し、したがってこれらの規則に関する正規化定理を考えることができる。証明の書き換えは自然演繹と同様に定義される。

**定理 4 (CC の正規化定理)** 証明 $\pi$ において、節集合 $S$ が一つの $add$ 規則の結論であり、同時に一つの $del$ 規則の前提であるとき、$S$ は**極大節集合**と呼ばれる。極大節集合を一つも含まない証明は**正規形証明**と呼ばれる。
$\pi$ が $S_1, \ldots, S_n$ から $S$ への CC の証明のとき、$\pi$ は $S_1, \ldots, S_n$ から $S$ への正規形証明に書き換えることができる。

**補題 5** 以下は CC における派生規則である。

$$\dfrac{\Gamma{\to}\Delta A \quad A\Gamma{\to}\Delta}{\Gamma{\to}\Delta}\,acut$$

$$\dfrac{\Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n}{A\Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, A\Gamma_n{\to}\Delta_n}\,gwL \qquad \dfrac{\Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n}{\Gamma_1{\to}\Delta_1 A, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n A}\,gwR$$

最初の規則はコンテクストがそろったカット規則（additive cut）であり、$gwL, gwR$ は weakening 規則の一般化である。これらの派生規則はヴェン図証明の翻訳に用いられる。

三段論法、オイラー図証明、ヴェン図証明は、統一的に CC に翻訳することができ、翻訳に必要な節集合の種類および CC の推論規則によって以下の表のように特徴付けられる。

| | 節集合の種類 | CC の推論規則 |
|---|---|---|
| 三段論法 | 長さ 2 以下のホーン節集合 | $cut, add, del$ |
| オイラー図 | ホーン節集合 | $cut, add, del$ |
| ヴェン図 | （一般の）節集合 | $cut, add, del, wL, wR$ |

### 4.2　三段論法の翻訳

紙幅の都合上詳しくは立ち入らないが、三段論法の定言命題は以下のように翻訳される。

(All $A$ are $B$)$^* := A{\to}B$　(Some $A$ are $B$)$^* := x{\to}A, x{\to}B$
(No $A$ are $B$)$^* := AB{\to}$　(Some $A$ are not $B$)$^* := x{\to}A, xB{\to}$

たとえば左下の Ferio と名付けられた三段論法は右のような CC 証明に翻訳される。

$$\dfrac{\text{Some } A \text{ are } B \quad \text{No } B \text{ are } C}{\text{Some } A \text{ are not } C}\,\text{Ferio} \qquad \dfrac{\dfrac{x{\to}A, x{\to}B}{x{\to}A} \quad \dfrac{\dfrac{x{\to}A, x{\to}B}{x{\to}B} \quad BC{\to}}{xC{\to}}}{x{\to}A, xC{\to}}$$

### 4.3　オイラー図体系の翻訳

**定義 6 (EUL 図の翻訳)** 各円は命題変項に翻訳され、各 EUL 関係 $R$ は以下のようなホーン節集合 $R^\circ$ に翻訳される。

$(A \sqsubset B)^\circ := A{\to}B$　$(A \vdash\!\dashv B)^\circ := AB{\to}$　$(A \bowtie B)^\circ := A{\to}A, B{\to}B$

関係 $R_1, \ldots, R_n$ が成り立っている EUL 図 $\mathcal{D}$ は、ホーン節集合の和 $\mathcal{D}^\circ := R_1^\circ \cup \cdots \cup R_n^\circ$ に翻訳される。

**定義 7 (オイラー図証明の翻訳)** 推論規則の翻訳は以下の通り。

$\boxed{\text{U5}}$ 合成図 $\mathcal{D}+\alpha$ は、以下の関係の集合によって規定される。

$$\mathrm{rel}(\mathcal{D}) \cup \mathrm{rel}(\alpha) \cup \{A \bowtie X \mid X \sqsubset B \text{ or } X \bowtie B \in \mathrm{rel}(\mathcal{D}), X \not\equiv B\}$$
$$\cup \{A \sqsubset X \mid B \sqsubset X \in \mathrm{rel}(\mathcal{D})\} \cup \{X \vdash\!\dashv A \mid X \vdash\!\dashv B \in \mathrm{rel}(\mathcal{D})\}$$

したがって U5 規則は以下のような CC 証明に翻訳される。

$$\dfrac{\mathcal{D}^\circ \quad \alpha^\circ \quad \left(\dfrac{\dfrac{\alpha^\circ}{A{\to}B}\,{\scriptstyle del} \quad \dfrac{\mathcal{D}^\circ}{B{\to}X_n}\,{\scriptstyle del}}{A{\to}X_n}\,{\scriptstyle cut}\right)_n \quad \left(\dfrac{\dfrac{\alpha^\circ}{A{\to}B}\,{\scriptstyle del} \quad \dfrac{\mathcal{D}^\circ}{Y_m B{\to}}\,{\scriptstyle del}}{Y_m A{\to}}\,{\scriptstyle cut}\right)_m}{\mathcal{D}^\circ, \alpha^\circ, (A{\to}X_n)_n, (Y_m A{\to})_m}\,{\scriptstyle add}$$

ここで、$(A{\to}X_n)_n$ は節集合を、また証明中の $(\ )_n$ は各 $n$ に対して同一の証明構造が適用されることを表している。

Fig. 2 のオイラー図証明は、Fig. 3 の CC 証明に翻訳される。

**定理 8 (翻訳の健全性)** $\pi$ が $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ から $\mathcal{E}$ へのオイラー図証明ならば、$\pi^\circ$ は $\mathcal{D}_1^\circ, \ldots, \mathcal{D}_n^\circ$ から $\mathcal{E}^\circ$ への CC 証明である。

### 4.4 ヴェン図体系の翻訳

影付領域はその領域が空であることを表す。従って影付連言的領域 $r = X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_m}$ は論理式 $\neg(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \wedge \neg Y_1 \wedge \cdots \wedge \neg Y_m)$、即ち節 $X_1 \cdots X_n {\to} Y_1 \cdots Y_m$ に翻訳される。

**定義 9 (ヴェン図の翻訳)** 各円は命題変項に翻訳される。連言的領域 $r = X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_m}$ は、節集合（のシングルトン）$r^\bullet := X_1 \cdots X_n {\to} Y_1 \cdots Y_m$ に翻訳される。
$\mathcal{V}$ が $shc(\mathcal{V}) = \{r_1, \ldots, r_n\}$ となるヴェン図のとき、$\mathcal{V}$ は節集合の和 $\mathcal{V}^\bullet := r_1^\bullet \cup \cdots \cup r_n^\bullet$ に翻訳される。

**定義 10 (ヴェン図証明の翻訳)** 推論規則の翻訳は以下の通り。

$\boxed{\text{Introduction of a circle}}$ 結論図 $\mathcal{V} + A$ は以下のような影付連言的領域の集合によって規定される。
$shc(\mathcal{V}{+}A) = shc(\mathcal{V}) \cup \{rA \mid r \in shc(\mathcal{V})\} \cup \{r\overline{A} \mid r \in shc(\mathcal{V})\}$
したがってこの推論規則は以下のような CC 証明に翻訳される。

$$\dfrac{\mathcal{V}^\bullet \quad \dfrac{\mathcal{V}^\bullet}{A\mathcal{V}^\bullet}\,gwL \quad \dfrac{\mathcal{V}^\bullet}{\mathcal{V}^\bullet A}\,gwR}{\mathcal{V}^\bullet, A\mathcal{V}^\bullet, \mathcal{V}^\bullet A}\,add$$

ここで、$A\mathcal{V}^\bullet$（及び $\mathcal{V}^\bullet A$）は、$\mathcal{V}^\bullet = \Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n$ のとき、$A\Gamma_1{\to}\Delta_1, \ldots, A\Gamma_n{\to}\Delta_n$（及び $\Gamma_1{\to}\Delta_1 A, \ldots, \Gamma_n{\to}\Delta_n A$）を表す。

$\boxed{\text{Superposition of diagrams}}$ 結論図 $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ は以下のように規定される。$n$ を $\mathcal{V}_1$ の各最小領域の長さ（唯一に定まる円の名前の数）とする。$\Gamma_0 = \{r \mid rL \in shm(\mathcal{V}_1), r\bar{L} \in shm(\mathcal{V}_2)\}$ および $\Gamma_i = \{r \mid rL, r\bar{L} \in \Gamma_{i-1}\}$ とする（$L$ はリテラル）。

$$shc(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) = shc(\mathcal{V}_1) \cup shc(\mathcal{V}_2) \cup \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i$$

したがってこの規則は以下のような CC 証明に翻訳される。

$$\dfrac{\mathcal{V}_1^\bullet \qquad \mathcal{V}_2^\bullet \qquad Acut(\mathcal{V}_1^\bullet \cup \mathcal{V}_2^\bullet)}{\mathcal{V}_1^\bullet\ ,\ \mathcal{V}_2^\bullet\ ,\ Acut(\mathcal{V}_1^\bullet \cup \mathcal{V}_2^\bullet)}\,add$$

ここで、$Acut(\mathcal{V}_1^\bullet \cup \mathcal{V}_2^\bullet)$ は $\mathcal{V}_1^\bullet \cup \mathcal{V}_2^\bullet$ の節から派生規則 $acut$ のみを何回か用いて導出されるすべての節の集合である。

Fig. 5 のヴェン図証明は、Fig. 6 の CC 証明に翻訳される。

**定理 11 (翻訳の健全性)** $\pi$ が $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ から $\mathcal{V}$ へのヴェン図証明ならば、$\pi^\bullet$ は $\mathcal{V}_1^\bullet, \ldots, \mathcal{V}_n^\bullet$ から $\mathcal{V}^\bullet$ への CC 証明である。

## 5. Free rides

図形推論体系の翻訳の健全性定理は、Shimojima [4] の free ride が起きる意味論的条件を含意する [6]。したがって前節の翻訳の健全性定理は、オイラー図体系（及びヴェン図体系）と CC の間に free ride が起こることを示している。この翻訳を通した形式化は、さらに具体的な free ride の分析を可能にする。

オイラー図（及びヴェン図）体系から節集合計算 CC への翻訳では、オイラー図の Unification（及びヴェン図の Superposition）の適用によって、結論図においてどのような関係（および連言的領域）が得られるかが分析されている。それらのうちのいくつかは、前提図にもまたそれに対する操作にも明示されておらず、結論図において自動的に現れる関係（連言的領域）であり、これらをその規則の "free rides" と呼ぶことができる。

例えば Fig. 2 のオイラー図の Unification の適用の際には、円 $A$ と $B$ の関係のみ考慮すればよく、その他の円 $C$ や $D$ との関係は考慮する必要がない。こうして得られる合成図 $\mathcal{D} + \alpha$ からは、円の間の幾何学的制約によって「$A$ は $C$ の内側にある」及び「$A$ は $D$ の外側にある」という関係が自動的に得られ、これらがこの規則の free rides である。同様に Fig. 5 のヴェン図の合成では、Superposition の定義から二つの前提図の影付最小領域のみ考慮すればよく、その他の領域について考慮する必要はない。したがって連言的領域 $A\overline{C}D, A\overline{C}\overline{D}, AD, A\overline{C}$ がこの Superposition の適用によって自動的に得られる free rides である。

一般に、推論規則の適用における free rides は、結論図に成り立つ関係（影付連言的領域）と、前提図に成り立つ関係（影付連言的領域）およびその規則の操作で明示されている関係（影付連言的領域）の差として定義することができる。

**定義 12** EUL 図 $\mathcal{D}$ と $\alpha$ に対する Unification 規則の適用 U において、以下の関係の集合は **U の free rides** と呼ばれる。

$$\mathrm{rel}(\mathcal{D}{+}\alpha) \setminus \Big(\mathrm{rel}(\mathcal{D}) \cup \mathrm{rel}(\alpha) \cup \{R \mid R \text{ は U の操作に明示されている関係}\}\Big)$$

ヴェン図 $\mathcal{V}_1$ と $\mathcal{V}_2$ の Superposition 規則の適用 S において、以下の影付連言的領域の集合は **S の free rides** と呼ばれる。

$$shc(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \setminus \Big(shc(\mathcal{V}_1) \cup shc(\mathcal{V}_2)\Big)$$

この定義に基づいて Fig. 2 のオイラー図の Unification と Fig. 5 のヴェン図の Superposition を比較すると、ヴェン図の方がオイラー図よりも free rides の数が多いことが分かる。このことは一般に成り立つが、これは必ずしもヴェン図の方がオイラー図よりも優れているということを意味するものではない。とくに認知的な観点からは、オイラー図よりもヴェン図の方が推論において扱い難いことがしばしば指摘される。オイラー図証明やヴェン図証明を翻訳した CC での推論ステップは、そのまま free rides の認識ステップと考えることは難しいが、各 free ride を認識するためには少なくとも 1 ステップが必要であると考えることができる。すると、各推論規則の適用における free rides の数をそれらの認識ステップの数と考えることができる。詳しく述べる余白はないが、最も多数の free rides が現れる worst case を分析すると、オイラー図では円の数が増えるのに従って free rides の認識ステップは線形的に増加するのに対して、ヴェン図では指数関数的に増大することが分かる。このことは、実際の推論においてヴェン図がオイラー図よりも扱い難いことの一因であると考えることができる。

## 参考文献


[1] J. Howse, G. Stapleton, J. Taylor, Spider Diagrams, *LMS Journal of Computation and Mathematics*, Vol. 8, 145-194, London Mathematical Society, 2005.

[2] K. Mineshima, M. Okada, and R. Takemura, A Diagrammatic Inference System with Euler Circles, accepted for publication in *Journal of Logic, Language and Information.*

[3] K. Mineshima, M. Okada, and R. Takemura, Two Types of Diagrammatic Inference Systems: Natural Deduction Style and Resolution Style, *Proc. of Diagrams 2010*, Lecture Notes In Artificial Intelligence, Springer, 99-114, 2010.

[4] A. Shimojima, On the Efficacy of Representation, Ph.D. thesis, Indiana University, 1996.

[5] G. Stapleton, J. Howse, P. Rodgers, L. Zhang, Generating Euler Diagrams from Existing Layouts, *Layout of (Software) Engineering Diagrams 2008*, Electronic Communications of the EASST, Vol. 13, 16-31, 2008.

[6] R. Takemura, Proof theory for reasoning with Euler diagrams: a logic translation and normalization, accepted for publication in *Studia Logica.*
http://abelard.flet.keio.ac.jp/person/takemura/index.html