

節論理における推論の明示を目指したグラフィカルモデル

A Graphical Model for Clausal Logic Representing Inference with Uncertainty

橋谷祐司

Yuji Hashiya

山本章博

Akihiro Yamamoto

京都大学大学院 情報学研究科

Graduate School of Informatics, Kyoto University

We present a graphical model for clausal logic in order to represent deductive inference with uncertainty. The graphical model consists of a Clause-set graph and an Interpretation distribution table (IDT). A Clause-set graph represents clauses in clausal logic, and is characterized by the fact that it represents each of its clauses as a node. An IDT represents uncertainty of interpretations of ground clauses by the probability distribution of the interpretations. In this paper, we define Clause-set graphs and IDTs, and illustrate these concepts with a few example. Then, we discuss uncertain inference in clausal logic with the graphical model, and show that the graphical model can treat uncertain inference under some assumptions.

1. はじめに

近年、論理のグラフィカルモデルを扱う研究が注目されている。例えば、論理とベイジアンネットワークとを対応させた Bayesian Logic [Milch 2005] や、節論理をマルコフネットワークで表した Markov Logic Network [Richardson 2006] などが提案されている。しかし、これらのグラフィカルモデルは、学習対象あるいは学習結果の表現に論理式を用いているものの、論理における推論のプロセスを十分に表現できていない。そこで本研究では、節論理における推論プロセスを明示するグラフィカルモデルの構築を目指す。

本稿では、グラフィカルモデルとして節集合グラフと解釈分布表の組み合わせを提案する。節集合グラフは節論理における節集合を表現するグラフであり、基礎節全体をノードとして明示する点に特徴がある。節集合グラフを用いることで、節論理の導出による推論をグラフィカルに表現することができる。解釈分布表は、節論理における不確実性を表現する手法であり、確率分布によって、基礎原子式の解釈の不確実性や基礎節の真偽の不確実性を表現する。これらを用いることにより、節論理のグラフィカルモデルについて新たな見方を提供する。

2. グラフを用いた節論理の表現

本節では、節集合を表現するグラフとして節集合グラフを提案し、節集合グラフにおける導出原理やトートロジーの扱いについて述べる。

2.1 節集合グラフ

本小節では、節集合グラフの定義と例を述べる。節集合グラフでは 2 種類のノードと 2 種類のエッジを用いる (図 1)。原子式を表すノードを原子式ノード (atom node)、節を表すノードを節ノード (clause node) とする。ある節に現れる各リテラルについて、正リテラルならばその原子式ノードと節を正エッジでつなぎ、負リテラルならばその原子式ノードと節を負エッジでつなぐ。形式的には以下のように定義する。

基礎原子式の集合を A とし、 $a \in A$ に対し $\neg a$ を a の否定とする。 A に対し、 $\bar{A} = \{\neg a \mid a \in A\}$ とする。節は $A \cup \bar{A}$ の

部分集合で表現し、基礎節の集合を $\mathcal{F} \subseteq 2^{A \cup \bar{A}}$ とする。エッジの集合 E を

$$E = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} \bigcup_{a \in A} \{(a, C, +) \mid a \in C\} \cup \{(a, C, -) \mid \neg a \in C\}$$

とする。ただし、エッジについて $(\cdot, \cdot, +)$ は正エッジを表し、 $(\cdot, \cdot, -)$ は負エッジを表す。 $A \cup \mathcal{F}$ をノードの集合、 E をエッジの集合とするグラフを $G := (A \cup \mathcal{F}, E)$ とし、これを節集合グラフと呼ぶ。

例として、命題論理の論理式 $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge Q$ を表す節集合グラフは図 2 のようになる。ここで以下のように節 C_1, C_2, C_3 とエッジ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ を決める。ただし、本稿ではノードとそのラベルは区別しないものとする。

$$\begin{aligned} C_1 &= \{P, \neg Q, R\}, & C_2 &= \{\neg P, Q\}, & C_3 &= \{Q\}, \\ e_1 &= (P, C_1, +), & e_2 &= (Q, C_1, -), & e_3 &= (R, C_1, +), \\ e_4 &= (P, C_2, -), & e_5 &= (Q, C_2, +), & e_6 &= (Q, C_3, +). \end{aligned}$$

2.2 節集合グラフにおける導出原理

節論理において、論理式が充足不可能であることの必要十分条件は論理式 (基礎節の有限集合) から導出 (resolution) により空節が導かれることである。導出とは、リテラル X を持つ基礎節 C_1 と、 X の補リテラル $\neg X$ を持つ基礎節 C_2 から、 C_1 から X を除いた節と C_2 から $\neg X$ を除いた節の論理和をとった節 C_3 を導く操作である。以下で導出と対応する節集合グラフ上の操作を述べる。

- 2 つの節ノード C_1, C_2 に対し、一方とは正エッジでつながり、もう一方とは負エッジでつながっているような原子式ノードを見つける。
- それら正エッジと負エッジを消去する。
- C_1, C_2 を新たに生成した節ノード C_3 にまとめる。この際、 C_1 と C_2 につながるエッジはすべて C_3 につなぎ、重複するエッジは 1 つにまとめる。
- エッジがつかっていない原子式ノードを消去する。

連絡先: 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町工学部 10 号館 401 号室山本研究室

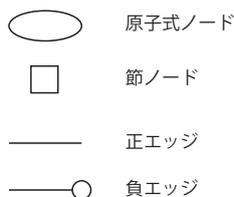


図 1: 凡例

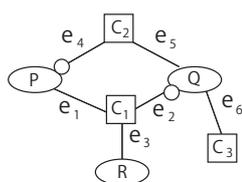


図 2: 節集合グラフの例

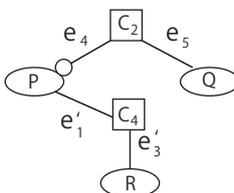


図 3: 導出形の例 1

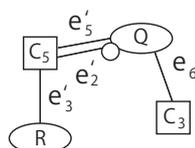


図 4: 導出形の例 2

以上の操作によって得られたグラフは、元の論理式の導出形 (resolvent) を表現した節集合グラフである。図 2 のグラフに対し、Q についての導出を C_1, C_3 に施した例を図 3 に示す。図 2 のグラフに対し、P についての導出を C_1, C_2 に施した例を図 4 に示す。

この操作によって得られる節集合グラフは、元の論理式の論理的帰結を表したものとなっている。また、この操作を施した結果、エッジを持たない節ノードのある節集合グラフが得られたとき、元の論理式は充足不可能であることがわかる。

2.3 節集合グラフにおけるトートロジー

リテラルとその補リテラルが同時に基礎節に含まれる場合、その基礎節はトートロジーとなる。節集合グラフにおいてトートロジーとなる節は、正エッジと負エッジ両方ずつつながっている原子式ノードが存在する節ノードとして表される。例えば、図 4 において原子式 Q と原子式 R につながっている節ノードは、Q の原子式ノードと正、負両方のエッジでつながっているためトートロジーである。充足可能性を調べる際、トートロジーである節は論理式全体の真偽に影響しないので考慮しなくてよい。

3. 節論理における不確実性の表現方法

本節では、節論理における不確実性を表現する方法を提案する。まず不確実性の表現に用いる解釈分布表を提案し、次に解釈分布表を用いた不確実推論について議論する。

3.1 解釈分布表

基礎原子式の集合 A について、 A に含まれる基礎原子式のすべての解釈 (真理値の割当て) とその上の確率分布を表した表を A の解釈分布表と呼ぶ。基礎節 C の解釈分布表は、 C に含まれる基礎原子式の解釈の不確実性を確率によって表すと同時に、 C の真偽についての不確実性を表現している。

例 1 命題「飲酒の習慣がある」を D 、命題「成人である」を A 、命題「仕事をしている」を W でそれぞれ表すと、命題「飲酒の習慣があるならば、成人である」は論理式 $D \rightarrow A$ 、命題「成人であるならば、仕事をしている」は論理式 $A \rightarrow W$ と表される。さらにこれらの論理式を節で表すと、それぞれ

$$F_1: \neg D \vee A, \quad F_2: \neg A \vee W$$

表 1: $\{D, A\}$ の解釈分布表 表 2: $\{A, W\}$ の解釈分布表

D	A	確率
1	1	0.69
1	0	0.01
0	1	0.11
0	0	0.19

A	W	確率
1	1	0.78
1	0	0.02
0	1	0.05
0	0	0.15

となる。

無作為に選んだ 100 人に対し「飲酒の習慣はあるか」、「成人であるか」の設定に yes, no で答えるアンケートを行った結果、表 1 の解釈分布表が得られたとする。ただし 1, 0 はそれぞれ真, 偽を表す。同様に、別の 100 人に対し「成人であるか」、「仕事をしているか」の設定でアンケートを行った結果、表 2 の解釈分布表が得られたとする。

表 1 は節 F_1 に、表 2 は節 F_2 にそれぞれ対応している。節に対応する解釈分布表が与えられると、節の尤もらしさが計算される。表 1 により、 F_1 を偽にする解釈、すなわち D が真かつ A が偽である確率が 0.01 であることがわかるので、 F_1 が真である確率は 0.99 である。同様に表 2 から、 F_2 を偽にする解釈、すなわち A が真かつ W が偽である確率が 0.02 であることがわかるので、 F_2 が真である確率は 0.98 である。また、 D が真である確率が 0.7 であることや、 W が真である確率が 0.83 であることなども読み取れる。

3.2 2つの原子式からなる基礎節における不確実推論

2つの基礎節 C_1, C_2 それぞれに対応する解釈分布表を T_1, T_2 とし、 C_1 と C_2 から導出により得られる基礎節 C_3 に対応する解釈分布表を T_3 とする。 T_1, T_2 が与えられているとき、これら解釈分布表による不確実推論は、 T_1 と T_2 から T_3 を決定する問題に帰着される。ここでは具体例を用いて、 C_1 と C_2 に含まれる原子式が 2 つの場合についての不確実推論を考える。ただし、以下の仮定をおく。

仮定 1 C_1 と C_2 は導出を施すことが可能な基礎節であり、導出によって除かれる基礎原子式の真偽に関する確率分布は、 T_1 と T_2 で等しい。

例 2 小節 3.1 の例 1 を再び用いる。例 1 での節 F_1, F_2 は仮定 1 を満たす。 F_1, F_2 に対し、 A とその補リテラル $\neg A$ を消去する導出を施すと節 $F_3: \neg D \vee W$ が得られる。 F_3 は、命題「飲酒の習慣があるならば、仕事をしている」を意味する論理式 $D \rightarrow W$ を節で表したものである。表 1, 表 2 から、 F_3 に対応する $\{D, W\}$ の解釈分布表を決定することを考える。

例 1 より、 F_1, F_2 が真である確率はそれぞれ 0.99, 0.98 である。 F_1, F_2 が共に真である確率は $0.99 \times 0.98 = 0.9702$ となる。また、 F_1, F_2 が共に真であれば、導出により得られる節 F_3 が真となる。以上より、 F_3 が真となる確率は 0.9702 となる。つまり、 F_3 が偽となる確率は 0.0298 となり、これは $\{D, W\}$ の解釈分布表において D が真かつ W が偽である確率が 0.0298 となることを意味する。

$\{D, W\}$ の解釈分布表において D が真かつ W が偽である確率が α であった場合、表 1 と表 2 の整合性から、 $\{D, W\}$ の解釈分布表は表 3 のようになる。今、 $\alpha = 0.0298$ であるので、結果として表 4 の解釈分布表が得られる。表 4 からは、命題「飲酒の習慣があるならば、仕事をしている」が真である確率

表 3: {D, W} の解釈分布表 表 4: 推定した {D, W} の解釈分布表 (α はパラメータ)

D	W	確率
1	1	$0.7 - \alpha$
1	0	α
0	1	$0.13 + \alpha$
0	0	$0.17 - \alpha$

D	W	確率
1	1	0.6702
1	0	0.0298
0	1	0.1598
0	0	0.1402

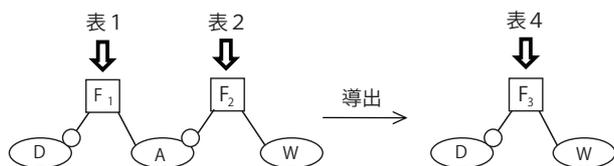


図 5: 節集合グラフと解釈分布表を組み合わせた不確実推論

が 0.9702 であること他、「飲酒の習慣があり、かつ仕事をしている」確率が 0.6702 であることや「飲酒の習慣はないが、仕事をしている」確率が 0.1598 であることなどが読み取れる。以上の推論と、節と解釈分布表との対応関係を表したものを図 5 に示す。

このように、仮定 1 の上では、2 つの原子式からなる基礎節における不確実推論が表現できる。

3.3 解釈分布表の決定に必要なパラメータ数

小節 3.2 では 2 つの原子式からなる基礎節のみにおいて不確実推論を考えたが、ここでは一般に 3 つ以上の原子式からなる基礎節において不確実推論を考える。小節 3.2 の例では 1 箇所の確率を決めるだけで他の確率も決まったが、3 つ以上の原子式からなる基礎節における不確実推論では、解釈分布表の決定に必要なパラメータ数が増える。本小節では、2 つの解釈分布表 T_1, T_2 から、解釈分布表 T_3 を決定する手法を求めるとの準備として、その決定に必要なパラメータ数を与える。

すべての解釈に対し確率が決定されている解釈分布表を完全な解釈分布表と呼ぶ。1 つ以上の解釈について確率が決定されていない解釈分布表を不完全な解釈分布表と呼ぶ。ある基礎原子式が、ある 2 つの解釈分布表の両方に現れるとき、これら 2 つの解釈分布表はこの基礎原子式を共有するという。以下では一般に、 k 個の基礎原子式を共有する 2 つの完全な解釈分布表 T_1, T_2 から、 T_1 と T_2 に現れるすべての基礎原子式から T_1, T_2 が共有する基礎原子式のうち 1 つを除いた基礎原子式の集合についての解釈分布表 T_3 を決定することを考える。ただし、 $k \geq 1$ とし、 T_1 に現れる基礎原子式を m 個 ($m \geq k$)、 T_2 に現れる基礎原子式を n 個 ($n \geq k$) とする。このとき T_3 に現れる基礎原子式の個数は $m + n - k - 1$ 個となる。また、以下の仮定をおく。

仮定 1' T_1 と T_2 が共有する基礎原子式の解釈の分布は、 T_1, T_2 で等しい。

解釈分布表 T_3 を決定するのに必要なパラメータ数を求める。そのためまず、 T_1 と T_2 に現れるすべての基礎原子式についての解釈分布表 T_3' を決定するのに必要なパラメータ数を求める。 T_3' に現れる基礎原子式の個数は $m + n - k$ 個なので、事前にまったく情報が与えられていない場合、 T_3' を決定するの

に必要なパラメータ数は 2^{m+n-k} 個である。これは、 T_1, T_2 によって決まるパラメータの個数だけ多い。確率の合計が 1 である条件は事前に分かっているため 1 つのパラメータは決まる。これ以外に T_1 によって決まるパラメータの個数は $2^m - 1$ 個、 T_2 によって決まるパラメータの個数は $2^n - 1$ 個である。しかし、共有している k 個の基礎原子式に関するパラメータ $2^k - 1$ 個が重複している。以上より、 T_3' を決定するのに必要なパラメータ数は

$$2^{m+n-k} - \{1 + (2^m - 1) + (2^n - 1) - (2^k - 1)\} = 2^{m+n-k} - 2^m - 2^n + 2^k \quad (1)$$

である。

T_3 は、 T_3' から 1 つの基礎原子式についての情報を落としたものなので、 T_3 を決定するのに必要なパラメータ数は式 (1) を 2 で割った $2^{m+n-k-1} - 2^{m-1} - 2^{n-1} + 2^{k-1}$ 個である。

3.4 3 つ以上の原子式からなる基礎節における不確実推論

2 つの解釈分布表 T_1, T_2 から解釈分布表 T_3 を決定する手法を与えれば、提案モデルにおける推論が解釈分布表の操作で実現される。これにより、元の論理式からの推論によって新たな論理式が得られるだけでなく、得られた新しい論理式についてどの解釈が最も尤もらしいかといった考察も可能となる。

T_3 のすべてのパラメータを決定することは容易ではないが、小節 3.2 で用いた推定の手法により、 T_3 に対応する節 C_3 が真となる確率は推定することができる。したがって、節 C_1, C_2 から導出により得られる節 C_3 の尤もらしさは、 C_1, C_2 に含まれる原子式の個数に関わらず、 C_1, C_2 それぞれに対応する解釈分布表 T_1, T_2 が与えられれば推定することができる。

4. まとめ

本稿では、節論理における推論を明示するグラフィカルモデルとして、節集合グラフと解釈分布表の組み合わせを提案した。また、このグラフィカルモデルを用いた不確実推論の例をあげ、節論理における不確実推論が実現できることを示した。今後の課題として、2 つの解釈分布表から尤もらしい新たな解釈分布表を決定する手法の考案、グラフィカルモデルと論理的帰結との関係の明示、不確実推論の実装などが考えられる。

参考文献

- [Domingos 09] Domingos, P. and Lowd, D.: *Markov Logic: An Interface Layer for Artificial Intelligence*, Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning, Morgan & Claypool Publishers (2009)
- [Milch 05] Milch, B., Marthi, B., Russell, S. J., Sontag, D., Ong, D. L., and Kolobov, A.: BLOG: Probabilistic Models with Unknown Objects, in *IJCAI*, pp. 1352-1359 (2005)
- [Richardson 06] Richardson, M. and Domingos, P.: Markov logic networks, *Machine Learning*, Vol. 62, No. 1, pp. 107-136 (2006)
- [佐藤 01] 佐藤 泰介, 亀谷 由隆: グラフィカルモデルにおける論理的アプローチ ([特集] ペイジアンネットワークと確率的情報処理の新展開), *人工知能学会誌*, Vol. 22, No. 3, pp. 306-319 (2007-05-01)