1F2-4

擬似木に基づく分散制約最適化問題の精度保証付き非厳密解法の提案

Pseudo-tree-based Incomplete Algorithm for DCOP with Quality Bounds

沖本 天太　ジョ ヨンジュン　岩崎 敦　横尾 真
Tenda Okimoto　Yongjoon Joe　Atsushi Iwasaki　Makoto Yokoo

九州大学大学院システム情報科学府
Graduate School/Faculty of Information Science and Electrical Engineering (ISEE), Kyushu University

A Distributed Constraint Optimization Problem is a fundamental problem that can formalize various applications related to multi-agent cooperation. Since it is NP-hard, considering faster incomplete algorithms is necessary for large-scale applications. Most incomplete algorithms generally do not provide any guarantees on the quality of solutions. Some notable exceptions are DALO, Bounded max-sum algorithm, and ADPOP.

In this paper, we propose a new solution criterion called p-optimality and an incomplete algorithm for obtaining a p-optimal solution. This algorithm can provide a priori/a posteriori bounds, respectively. In the evaluations, we show that this algorithm can obtain better quality solutions and bounds compared to existing bounded incomplete algorithms, while the run time of this algorithm is much shorter.

1. はじめに

分散制約最適化問題 (Distributed Constraint Optimization Problem, DCOP) はマルチエージェントシステムにおける協調問題解決の基本的な枠組みである．この問題では，各エージェントは自身の変数をもち，利得の総和を最大化するように変数への割り当てを決定する．多くのマルチエージェントシステムの問題，特にセンサ網 [Modi 05] や会議スケジューリング [Petcu 05b] を含む分散資源割り当て問題が DCOP として形式化される．DCOP の解法として最適解を保証する様々な厳密解法が提案されてきた．しかし，DCOP は NP-hard であるため，最適解の保証はないが，大規模な問題に適用可能な，より速い非厳密解法を考える必要がある．

既存の非厳密解法のほとんどは解品質を保証しない．数少ない例外として DALO [Kiekintveld 10], Bounded max-sum [Farinelli 09], ADPOP [Petcu 05a] がある．これらの解法の中でも，DALO は誤差の上界が事前に得られる唯一の非厳密解法である．すなわち，エージェントは近似解を得る前に，最適解に対する誤差の上界を得ることができる．また，得られる誤差の上界は問題のインスタンスに依存しない．これに対し，Bounded max-sum および ADPOP では，誤差の上界が事後にのみ得られる．すなわち，エージェントは近似解を求めた後に，最適解に対する誤差の上界を得ることができる．誤差の上界は事前に得られる方が望ましいが，多くの場合，事後に得られる誤差の上界の方が，より精度が高い．

本論文では，解品質を保証する非厳密解法および近似解の新しい評価基準 p-optimality を提案する．本解法は得られる解の絶対／相対誤差の上界を事前／事後に与えることができる．事前に得られる誤差の上界は，制約グラフの誘導幅および各利得関数の値の最大値に基づいて与えられるが，問題のインスタンスには依存しない．すなわち，すべてのインスタンスは，誘導幅および利得関数の値の最大値が同じである限り，同じ誤差の上界をもつ．誘導幅とは，最適化問題の解法の複雑度を決定する指標である．本解法は DCOP の厳密解法で広く用いられている擬似木に基づく解法である．擬似木とは，制約グラフに含まれるエージェント間に全順序関係を与えるようなグラフ構造である．本解法はエージェント数 n に関して，多項式時間で実行可能な one-shot type の解法である．さらに，本解法では解法中のパラメータ p を調整することにより，実行時間を犠牲にする代わりに，より高品質な解を得ることができる．

DALO は k-size/t-distance-optimality [Kiekintveld 10] と呼ばれる局所最適解の評価基準に基づく anytime 解法である．これに対し，本解法は高速に求解可能な one-shot type の解法である．また本解法は，よりタイトな誤差の上界を与えることができる．さらに，本解法ではパラメータ p を大きくした場合の計算／通信量の増加の度合いが，k-size/t-distance-optimality と比べ，緩やかである．

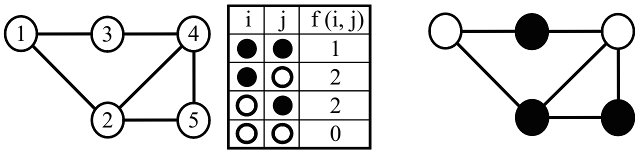
Bounded max-sum は one-shot type の解法である．この解法は調整可能なパラメータをもたない．これに対し，本解法は調性可能なパラメータ p をもつ．また本解法では，誤差の上界を事前に得ることができる．よって，エージェントは実際に近似解を得る前にパラメータ p を調整することで，より高品質な解を得ることができる．

本解法は ADPOP と類似している．ADPOP は one-shot type の解法であり，調整可能なパラメータをもつ．この解法はメッセージサイズを制限するために，変数間の制約辺を取り除く．これに対し，本解法は誘導幅を制限するために，変数間の制約辺を取り除く．また本解法では，誤差の上界を事前に得ることができる．本論文で提案する p-optimality は，ADPOP において，どの制約辺を取り除くかを決定する際，簡単かつ理論的に確かな方法を与えることができると考える．

2. 準備

分散制約最適化問題はマルチエージェントシステムにおける協調問題解決の基本的な枠組みである．この問題は制約最適化問題における変数および制約が，複数のエージェントに分散された問題である．各変数は各エージェントの状態を表し，各変数の値はその変数を保持するエージェントが決定する．各エージェントは制約で繋がった他のエージェントとメッセージ交換を行いながら，変数への割り当てを決定する．

連絡先: 沖本天太，九州大学大学院システム情報科学府，812-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，tenda@agent.inf.kyushu-u.ac.jp



(a) (b)

図 1: (a) は 5 つのノードからなる制約グラフおよび各制約辺における利得表を表す．(b) は (a) における最適な割り当てを表し，このとき得られる利得の総和は 11 となる．

定義 1 (分散制約最適化問題)**.** 分散制約最適化問題は，エージェントの集合 S，変数の集合 X，二項制約の集合 C，二項利得関数の集合 F により定義される．エージェント i は自身の変数 x_i をもつ．x_i は離散有限集合 D_i に含まれる変数値を取る．制約 (i,j) は x_i と x_j の間に制約があることを示す．制約で関係する 2 変数についての，ある割り当て $\{(x_i,d_i),(x_j,d_j)\}$ の利得は，二項利得関数 $r_{i,j}(d_i,d_j): D_i \times D_j \rightarrow \mathbb{R}$ により定義される．すべての変数への割り当て A に関して，

$$R(A) = \sum_{(i,j)\in C, \{(x_i,d_i),(x_j,d_j)\}\subseteq A} r_{i,j}(d_i,d_j)$$

を利得関数の合計値として，問題の最適解 A^* は $\arg\max_A R(A)$，すなわち，$R(A)$ を最大化する値の割り当てである．

本論文では，すべての利得は非負とし，二項利得関数の値の上界値は制限されているものとする．すなわち，すべての i,j に関して，$(i,j)\in C, \forall d_i \in D_i, \forall d_j \in D_j, 0 \le r_{i,j}(d_i,d_j) \le r_{max}$ が成立することを仮定する．

分散制約最適化問題はエージェント／変数をノードに，二項制約をリンクに対応させることにより，制約グラフを用いて表すことができる．例えば，図 1 (a) は 5 つのノードからなる制約グラフおよび各制約辺における利得表を表す．この問題は各ノードにエージェントを対応させることで，分散制約最適化問題として考えることができる．(b) は制約グラフ (a) における最適な割り当てを表し，このときの利得の総和は 11 となる．

グラフ $G=(V,E)$ とは，ノードの集合 $V=\{1,\ldots,n\}$，およびノード間のリンクの集合 E により定義される．

定義 2 (ノード間の全順序関係)**.** 全順序関係 o はノードの列の並び替えであり，順序関係で先に出現するノードの方が，後に出現するノードより上位にあるという．また全順序関係 o に関して，ノード i が j より上位であることを $i \prec j$ と記述し，最上位のノードから i 番目のノードを $ord(i)$ と記述する．

定義 3 (祖先)**.** グラフ $G=(V,E)$，全順序関係 o，ノード $i \in V$ に関して，$A(E,o,i)=\{j \mid (i,j)\in E \ \wedge \ j \prec i\}$ をノード i の祖先と呼ぶ．

定義 4 (順序に基づく弦グラフ)**.** グラフ $G=(V,E)$ と全順序関係 o に関して，以下の性質が成立するときに，グラフ G は全順序関係 o に基づく弦グラフであるという．

$$\forall i, \forall j, \forall k \in V, \ if \ j,k \in A(E,o,i), \ then \ (j,k)\in E.$$

定義 5 (順序に基づく誘導弦グラフ)**.** グラフ $G=(V,E)$ と全順序関係 o に関して，以下の手続きによって得られる，全順序関係 o に基づく弦グラフ $G'=(V,E')$ を，グラフ G の全順序関係 o に基づく誘導弦グラフ [*1] と呼ぶ．

(1) Set E' to E.

(2) choose each node $i \in V$ from the last to the first based on o and apply the following procedure.

- *if $\exists j, \exists k \in A(E',o,i)$ s.t. $(j,k) \notin E'$, then set E' to $E' \cup \{(j,k)\}$.*

(3) Return $G'=(V,E')$.

誘導幅とは，グラフがどれぐらい木に近いかを表すパラメータである [Dechter 03]．例えば，木の誘導幅は 1，n 個のノードからなる完全グラフの誘導幅は $n-1$ となる．

定義 6 (順序に基づくグラフの幅／誘導幅)**.** グラフ $G=(V,E)$ と全順序関係 o，ノード $i \in V$ に関して，$|A(E,o,i)|$ を全順序関係 o に基づくノード i の幅と呼ぶ．また，$\max_{i\in V}|A(E,o,i)|$ を，全順序関係 o に基づくグラフ G の幅と呼び，$w(G,o)$ と記述する．さらに，グラフ G と全順序関係 o から得られる順序に基づく誘導弦グラフを $G'=(V,E')$ として，$w(G',o)$ を全順序関係 o に基づくグラフ G の誘導幅と呼ぶ．

順序に基づく弦グラフ $G=(V,E)$ は擬似木とみなすことができる．擬似木とは制約グラフに含まれるノード間に全順序関係を与えるようなグラフ構造である．ノード i に関して，親以外の祖先ノードとのリンクを G におけるノード i の後退辺と呼ぶ．また，これらの後退辺を，より上位のノードと結ばれているものから順に，G における first back-edge, second back-edge,..., k-th back-edge と呼ぶ．明らかに，各ノードの後退辺の数は最大 $w(G,o)-1$ 本である．

3. 誘導幅に基づく精度保証付き非厳密解法

本章では，解品質を保証する非厳密解法および近似解の新しい評価基準 p-optimality を提案する．さらに，本解法によって得られる解の絶対／相対誤差の上界を与える．本解法は，ある制約グラフから，いくつかの制約辺を取り除くことにより，誘導幅がパラメータ p によって制限されたグラフの最適解（p-optimal な解）を元の制約グラフの近似解として用いる．

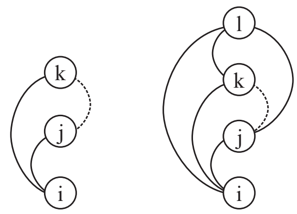
段階 1: 順序に基づく誘導弦グラフから，いくつかの制約辺を取り除き，誘導幅がパラメータ p によって制限された順序に基づく弦グラフを作る．

段階 2: 段階 1 で得られたグラフの最適解を厳密解法を用いて求める．

段階 1 について記述する．ここでの目標は，誘導幅が p になるような順序に基づく弦グラフを作る，かつ，取り除く制約辺の数を制限できる，制約辺の取り除き方を与えることである．一般に，このような制約辺の取り除き方は自明ではない．例えば，ある誘導弦グラフから単純に，すべてのノードの後退辺の本数が p-1 本以下になるように後退辺を取り除いたとする．このとき，得られるグラフは弦グラフでない場合がある．よって，このグラフの誘導弦グラフには，いくつかの制約辺が加えられ，誘導幅は p より大きくなることがある．

段階 1 におけるグラフの作り方を以下に与える．

*1 文献 *[Dechter 03]* では，このようなグラフを単に誘導グラフと呼んでいるが，誘導はグラフ理論では，より一般的な意味として用いられている．ここでは特定の用語，誘導弦グラフ，として用いる．



(a) (b)

図 2: (a) は $j,k \in A(E'',o,i)$，$(j,k) \notin E''$ が成立する p-reduced グラフ $G''=(V,E'')$ 内のノードおよび制約辺を表す．(b) は制約辺 (j,k) がノード j の first back-edge でないときの，グラフ G 内のノードおよび制約辺を表す．

定義 7 (p-reduced グラフ)．全順序関係 o に基づく誘導弦グラフ $G=(V,E)$ に関して，以下の手続きによって得られるグラフ $G'=(V,E')$ を G の *p-reduced* グラフと呼ぶ ($1 \le p \le w(G,o)$)．
(1) Set E' to E.
(2) repeat the following procedure $w(G,o)-p$ times.

- *For each $i \in V$ where $p+1 \le ord(i) \le w(G,o)$ remove the first back-edge in $G'=(V,E')$ from E' if there is one.*

(3) Return $G'=(V,E')$.

p-reduced グラフに関して以下の定理が成立する．

定理 1．全順序関係 o に基づく誘導弦グラフ $G=(V,E)$，任意の $1 \le p \le w(G,o)$，G の *p-reduced* グラフ $G'=(V,E')$ に関して以下が成立する．
(1) G' は全順序関係 o に基づく弦グラフである．
(2) G' のグラフの幅 $w(G',o)$ は p である．

証明. p-reduced グラフを得るために，各ノード i ($p+1 \le ord(i) \le w(G,o)$) では，first back-edge を $w(G,o)-p$ 回，繰り返し取り除いている．幅 $w(G,o)$ をもつグラフでは，後退辺は高々$w(G,o)-1$ 本しか存在しないので，残りの後退辺の本数は高々$p-1$ 本である．よって，ノード i の幅は高々p である．また，少なくとも一つのノードにおいて，最初の後退辺の本数は，ちょうど $w(G,o)-1$ 本であり，残りの後退辺の本数は $p-1$ となる．よって $w(G',o)$ は p である．

次に，G' が全順序関係 o に基づく弦グラフであることを示す．p-reduced グラフは，first back-edge を繰り返し削除することにより得られるため，G の各ノードから first back-edge を削除することによって得られるグラフ $G''=(V,E'')$ が，全順序関係 o に基づく弦グラフであることを示せばよい．以下，背理法を用いて，このことを証明する．すなわち，$\exists i \in V, \exists j, \exists k \in A(E'',o,i)$, s.t., $(j,k) \notin E''$ を仮定して矛盾を導く (図 2 (a))．一般性を失うことなしに，$k \prec j$ と仮定できる．

ここで，$G=(V,E)$ は全順序関係 o に基づく誘導弦グラフであることから，$(j,k) \in E$ が成立し，(j,k) は G における j の first back-edge である．また，$k \in A(E'',o,i)$ より，$(i,k) \in E''$ が成立する．このため，$l \prec k$ なるノード l が存在し，$(i,l) \in E$ かつ $(i,l) \notin E''$ が成立する．すなわち，(i,l) は G における i の first back-edge であり，E'' では取り除かれている．さらに，$G=(V,E)$ は全順序関係 o に基づく誘導弦グラフであり，$(i,l) \in E$，かつ $(i,j) \in E$ であるため，$(j,l) \in E$ が成立する (図 2 (b))．しかしながら，$l \prec k$ であるため，(j,k) は，G における j の first back-edge になり得ず，矛盾が生じる．よって，$G''=(V,E'')$ は全順序関係 o に基づく弦グラフであることが得られる． □

ここで，近似解の新しい評価基準 p-optimality を提案する．この評価基準は p-reduced グラフにおける最適解を保証する．

定義 8 (p-optimality)．分散制約最適化問題 $< X, C, F >$，全順序関係 o に関して，割り当て A が *p-optimal* であるとは，制約グラフを $G=(X,C)$，全順序関係 o で与えられる順序に基づく誘導弦グラフを $G'=(X,C')$，G' の *p-reduced* グラフを $G''=(X,C'')$ として，A が G'' における利得関数の合計値を最大化すること，すなわち，任意の割り当て A' に対して，$R_{C''}(A) \ge R_{C''}(A')$ が成立することを意味する．

段階 2 について記述する．本解法は厳密解法を用いて得られる p-optimal な解を，元の制約グラフの近似解として用いる．本解法では，p-optimal な解を求める際，どの厳密解法を用いても構わない．特に，本解法では誘導幅が制限された擬似木が得られるので，ADOPT [Modi 05] や DPOP [Petcu 05b] 等の擬似木に基づく厳密解法を用いることは便利である．

次に，本解法によって得られる解の絶対／相対誤差の上界を与える．絶対誤差 (absolute error) の上界は最適解との差により表され，事前に与えることができる．形式的には，分散制約最適化問題 $< X, C, F >$，その制約グラフ $G=(X,C)$，全順序関係 o に関して，割り当て A が p-optimal である場合，A の利得と最適解 A^* の利得の間に以下の不等式が成立する．

$$R(A^*) - R(A) \le r_{max} \times \sum_{k=1}^{w(G,o)-p} (|X| - (k+1))$$

直感的には，絶対誤差は各制約辺の利得の最大値 r_{max} と元のグラフから取り除かれた制約辺との積で与えられる．

相対誤差 (relative error) の上界は ADPOP [Petcu 05a] と同様の方法を用いて与えることができる．ただし，この誤差の上界は事後にのみ与えることができる．直感的には，もしノード i の後退辺 (i,j) が取り除かれたとすると，単項制約をもたないノード j のコピー j' を作り，ノード i に新しい制約辺 (i,j') をつなげる．もし j と j' 間に等式制約を加えると，この問題は元の問題と同等である．

本解法では，いくつかの制約を無視することで緩い問題を得ることができる．ただし，この緩い問題の誘導幅は p である．変数間のいくつかの依存性を無視するこの方法は minibucket elimination [Dechter 03] に類似している．

4. 評価実験

本章では，本解法と DALO-t [Kiekintveld 10] によって得られる解の精度，最適解に対する誤差の上界を比較する．また，最適解が求解困難な大規模な問題設定で実行時間の比較を行う．実験では，各変数のドメイン数を 3 とし，各制約の利得は 0 から 99 の整数値を一様分布の乱数により選択した．問題のインスタンスは誘導幅を固定し，ランダムに生成した．実験結果は 30 インスタンスの平均値を表す．また本解法（段階 2）では FRODO (version 2.7.1) [Léauté 09] を用い，厳密解法 DPOP で解を求めた．t-distance-optimality は k-size-optimality を改善しているため [Kiekintveld 10]，実験では t-distance-optimal な解が得られる DALO-t を用いた．また一般に，p-optimality と t-distance-optimality は異なる評価

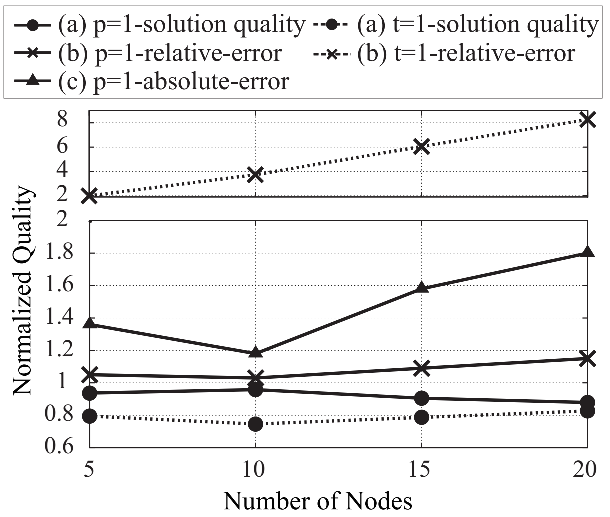


図 3: 誘導幅 3，制約密度 0.3 のグラフにおける p=1-optimal な解法と DALO-t=1 の (a)，(b) および (c) の評価．図中の点線は DALO-t=1 の実験結果を表す．

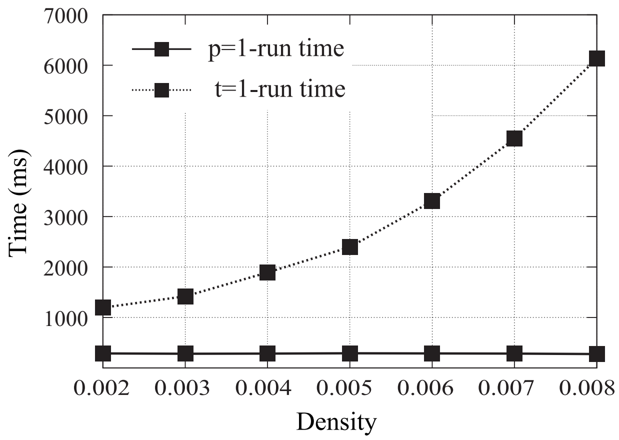


図 4: ノード数 1000，誘導幅 5 のグラフにおける，p=1-optimal な解法と DALO-t=1 の実行時間の比較．図中の点線は DALO-t=1 の実験結果を表す．

基準であるため両者のパラメータの間に依存関係はない．実験では，主に p および t の値を 1 としたときの比較を行った．

図 3 にノード数を変えながら，誘導幅 3，制約密度 0.3 のグラフにおける p=1-optimal な解法と DALO-t=1 の解品質および最適解に対する誤差の上界を示す．(a) は得られる解品質，(b) および (c) はそれぞれ相対／絶対誤差の上界に基づく最適解の推定値を表す．(a)，(b) および (c) の値は最適解によって正規化されており，(a) は 1 より小さく，(b) および (c) は 1 より大きくなる．また (a)，(b) および (c) の値は，それぞれ 1 に近いほど望ましい．図中の点線は DALO-t=1 の実験結果を表す．図 3 より，p=1-optimal な解法における (a)，(b) および (c) の値は，DALO-t=1 と比べ，より高品質および高精度であることが分かった．また，p=1-optimal な解法の (c) の値はノード数が上がるにつれ悪くなった．これはノード数が大きいグラフでは，取り除かれる制約辺の数が多いためである．

次に，大規模な問題設定で実行時間を比較する．図 4 にノード数 1000，誘導幅 5 のグラフにおける p=1-optimal な解法と DALO-t=1 の実行時間を示す．図中の点線は DALO-t=1 の結果を表す．図 4 より，p=1-optimal な解法では，DALO-t=1 と比べ，より高速に求解可能であることが分かった．

これらの良い結果が得られた理由について考察する．DALO-t では元の問題に対し近似解を求めている．これに対し，本解法では元の問題からいくつかの制約辺を取り除いた緩い問題に対し最適解を求めている．もし緩くなった問題と元の問題が似たような問題であるとき，すなわち誘導幅が小さいとき，本解法は高品質な解を高速に求めることができると考える．

著者らは Bounded max-sum との比較も行い，類似した結果を確認している．ここでは ADPOP との比較は行わない．両者は類似した解法であるが，本解法の利点は誤差の上界が事前に得られることである．

5. おわりに

本論文では，分散制約最適化問題の精度保証付き非厳密解法を提案した．また，本解法によって事前／事後に得られる誤差の上界を示した．実験では p=1-optimality における本解法が，既存の t=1-distance-optimality における DALO-t=1 と比べ，より高品質な解および高精度な誤差の上界を与えることを示した．さらに，本解法は DALO-t=1 比べ，より高速に求解可能であることを示した．今後の課題として，本解法を前処理として用いた anytime ／厳密解法の開発が挙げられる．

参考文献

[Dechter 03] Dechter, R.: *Constraint Processing*, Morgan Kaufmann Publishers (2003)

[Farinelli 09] Farinelli, A., Rogers, A., and Jennings, N. R.: Bounded Approximate Decentralised Coordination using the Max-Sum Algorithm, in *Distributed Constraint Reasoning*, pp. 46–59 (2009)

[Kiekintveld 10] Kiekintveld, C., Yin, Z., Kumar, A., and Tambe, M.: Asynchronous Algorithms for Approximate Distributed Constraint Optimization with Quality Bounds, in *Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pp. 133–140 (2010)

[Léauté 09] Léauté, T., Ottens, B., and Szymanek, R.: FRODO 2.0: An Open-Source Framework for Distributed Constraint Optimization, in *Distributed Constraint Reasoning*, pp. 160–164 (2009)

[Modi 05] Modi, P., Shen, W.-M., Tambe, M., and Yokoo, M.: ADOPT: asynchronous distributed constraint optimization with quality guarantees, *Artificial Intelligence*, Vol. 161, No. 1-2, pp. 149–180 (2005)

[Petcu 05a] Petcu, A. and Faltings, B.: Approximations in Distributed Optimization, in *Principles and Practice of Constraint Programming*, pp. 802–806 (2005)

[Petcu 05b] Petcu, A. and Faltings, B.: A Scalable Method for Multiagent Constraint Optimization, in *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 266–271 (2005)