1F2-5

組合せオークションにおける無羨望性の拡張

Generalizing Envy-Freeness in Combinatorial Auctions

東藤 大樹 Taiki Todo　李 潤樅 Runcong Li　胡 雪梅 Xuemei Hu　毛利 貴之 Takayuki Mouri　岩崎 敦 Atsushi Iwasaki　横尾 真 Makoto Yokoo

九州大学大学院 システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

Envy-freeness is a well-known fairness concept for analyzing mechanisms. Its traditional definition requires that no individual envies another individual. However, an individual (or a group of agents) may envy another group, even if she (or they) does not envy another individual. In mechanisms with monetary transfer, such as combinatorial auctions, considering such fairness requirements, which are refinements of traditional envy-freeness, is meaningful and brings up a new interesting research direction in mechanism design. In this paper, we introduce two new concepts of fairness called *envy-freeness of an individual toward a group*, and *envy-freeness of a group toward a group*. They are natural extensions of traditional envy-freeness. We discuss combinatorial auction mechanisms that satisfy these concepts. First, we characterize such mechanisms by focusing on their allocation rules. Then we clarify the connections between these concepts and three other properties: strategy-proofness, the core, and false-name-proofness.

1. はじめに

一度に複数の財を販売する組合せオークション (combinatorial auction, CA) は，エージェント技術の重要な適用領域であると考えられている．特に組合せオークションのメカニズムデザインは，社会的に望ましい結果をもたらす相互作用のルールの設計理論として，経済学や人工知能分野で注目を集めている．また，近年では分散コンピューティングやタスク割当などへの応用の観点から，人工知能分野のみならず，アルゴリズムの分野でも組合せオークションの研究が盛んである [Leyton-Brown 10].

公平性 (fairness) はオークションメカニズムの重要な評価基準である．中でも無羨望性 (envy-freeness) は，公平性を測る一つの指標として広く議論されている [Foley 67]．メカニズムが無羨望であるとは，メカニズムの結果において誰も他の参加者を羨まないことを意味する．オークションにおける無羨望性は，いずれのエージェント（入札者）も，他のエージェントの落札した商品とその時の価格を羨まない，という性質となる．無羨望性はタスク割当でも重要な概念と考えられており，Mu'alem は無羨望性を満たすタスク割当のメカニズムを提案している [Mu'Alem 09].

しかしながら，複数の財を同時に販売する組合せオークションにおいては，参加者の選好が複雑となり，従来の無羨望性では対応できない場合がある．特に，補完性のある財が同時に販売される状況を考えると，単一の参加者に対する羨望はなくとも，参加者のグループ（集合）に対する羨望が存在しうる．

例 1. コーヒーとケーキの２財が販売される組合せオークションを考える．今，エージェント 1 がコーヒーを 300 円，エージェント 3 がケーキを 400 円でそれぞれ落札しているとする．このとき，それぞれ単品では不要であるが，コーヒーとケーキを合わせて 800 円で落札したいエージェント 2 を考える．エージェント 2 は，エージェント 1 および 3 のそれぞれに対しては羨望を持たないが，エージェント 1 と 3 のグループに対して羨望を持つ．

連絡先: 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学伊都キャンパス ウエスト 2 号館 8 階 824 号室

ItI-EF Mechanisms for a Single-Minded Domain

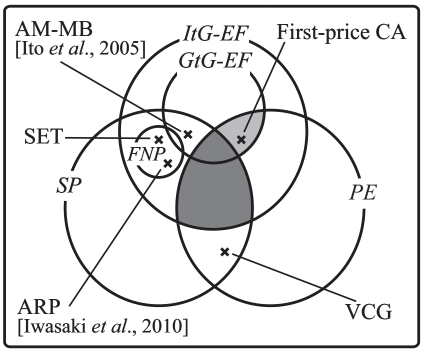

図 1: 提案した２種類の無羨望性と，既存の性質との関係を表す図．薄い灰色の部分はコア選択オークションメカニズムの集合であり，濃い灰色の部分にはメカニズムは存在しない．

本研究では，組合せオークションにおける公平性の新たな基準としてグループに対する無羨望性を提案し，この無羨望性を持つ組合せオークションメカニズムを議論する[*1]．具体的には，従来の無羨望性を，いずれのエージェント（のグループ）も，他のグループに対して羨望を持たない，という性質として再定義する．また，拡張した無羨望性と，戦略的操作不可能性，コア，および架空名義操作不可能性との関係を解明する．

2. 準備

本章ではまず，本研究で扱う組合せオークションのモデルを説明する．エージェントの集合を $N = \{1\dots,n\}$，財の集合を G $(|G| = m)$ と定義する．エージェント $i \in N$ は，G の各部分集合（バンドル）に対して評価値を持つ．この評価値の組を v_i と表し，エージェント i のタイプと呼ぶ．このとき，エージェント i の，あるバンドル $B \subseteq G$ に対する評価値を $v_i(B)$ と表す．また，エージェント i がバンドル $B \subseteq G$ を得て金銭

*1 紙幅の都合上，定理の証明は省略する．詳細は著者らの文献 [Todo 11] を参照されたい．

p を支払う場合の，エージェント i の効用を $v_i(B) - p$ と定義する．

各エージェントのタイプはそのエージェントにしかわからない個人情報であり，タイプの集合であるタイプ空間 V から選ばれるとする．組合せオークションにおけるタイプ空間を，正規化，自由可処分性，および非外部性を満たす任意のタイプを含む集合であると定義する．正規化 (normalization) とは，財を得ない場合の評価値が 0 であることを示す．すなわち，任意の $v_i \in V$ について $v_i(\emptyset) = 0$ である．自由可処分性 (free disposal) は，得た財を処分する際の費用が 0 であることを述べており，任意の v_i および $B' \supseteq B$ について，$v_i(B') \geq v_i(B)$ が成立する．また，非外部性 (no externalities) は，自分が得るバンドルのみで自分の評価値が決まることを示すものである．

組合せオークションメカニズム M は，割当規則 $f : V^n \to A$ と，支払規則 $p : V^n \to R^n_{\geq 0}$ によって構成される．ただし，A はエージェントへの可能な財の割当の集合であり，$R_{\geq 0}$ は非負の実数の集合である．ある割当 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ について，各 a_i $(i \in N)$ をエージェント i への割当とすると，$a_i \cap a_j = \emptyset \, \forall i, j (\neq i)$ および $\bigcup_{i \in N} a_i \subseteq G$ が常に成立するものとする．このとき，エージェントの集合 N がタイプの組 v を申告した場合の，エージェント i への割当と i の支払額を，それぞれ $f_i(v)$ および $p_i(v)$ と表す.

本論文では簡単化のため，対象を決定的 (deterministic) かつ準匿名 (almost anonymous) メカニズムに限定する．また，メカニズムは消費者主権 (player decisiveness) および個人合理性 (individual rationality) を満たすものとする．

決定性 メカニズムの結果は，エージェントの申告によって一意に決まる．すなわち，同じ入札の組に対して，メカニズムの結果は常に同じである．

準匿名性 メカニズムは，エージェントの名前に依存せず決定を行う．準匿名メカニズムにおいては，エージェントの名前の入れ替えによって効用が変化するエージェントは存在しない.

消費者主権 他のエージェントの入札に関わらず，あるバンドルに十分大きい入札をすれば，そのバンドルを獲得できる.

個人合理性 他のエージェントの入札に関わらず，各エージェントは，自分のタイプを正直に申告することによって損をすることはない.

また，エージェントのタイプが単一バンドル指向 (single-minded) であるとは，あるバンドル B とある値 $b \in R$ が存在し，$v_i(B') = b$ となることである．すなわち，ある財（の集合） B にのみ正の評価値を持ち，B を落札できなければ嬉しくなく，また B 以外の財をもらっても正の効用は得られない，というタイプである．これは，ある特定の財の集合のみを購入するためにオークションに参加しているエージェントを考えれば，自然な仮定である．実際，計算機科学分野ではこの単一バンドル指向という仮定は広く浸透しており，この仮定の下で多くの議論がなされている [Lehmann 02].

次に，オークションメカニズムの無羨望性を定義する.

定義 1 (無羨望性)**.** あるメカニズム $M(f, p)$ が無羨望性 *(envy-freenss of an individual toward an individual, ItI-EF)* を満たすとは，$\forall i, \forall j \neq i, \forall v$ に対して

$$v_i(f_i(v)) - p_i(v) \geq v_i(f_j(v)) - p_j(v)$$

が成り立つことである.

左辺は，エージェント i の現在の効用を表しており，右辺は，エージェント i がエージェント j の結果に対して持つ効用を表している．左辺が右辺よりも小さいとき，エージェント i はエージェント j を羨望する，という.

Haake らは局所効率的割当と呼ばれる性質を提案して，無羨望性を満たすメカニズムの割当ルールを特徴付けている [Haake 02]．今，ある割当 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ を考える．このとき，別の割当 a' が a の置換 (permutation) であるとは，$\forall i, \exists j$ に対して， $a'_i = a_j$ が成立することをいう．この置換の概念を用いて，局所効率的割当を以下のように定義する.

定義 2 (局所効率的割当)**.** ある割当 $a \in A$ が，申告の組 v に対する局所効率的割当 *(locally-efficient bundle assignment, LEBA)* であるとは，a に対する任意の置換 $a' \in A$ に対して

$$\sum_{i \in N} v_i(a_i) \geq \sum_{i \in N} v_i(a'_i)$$

が成立することである.

すなわち，ある割当 a があるv v に対する局所効率的割当であるとき，財の割当を (結合したり分割したりすることなく) エージェント間でどのように入れ替えても，a が達成する社会的余剰を超えることはできない．この局所効率的割当という概念を用いて，Haake らは次の定理を示した [Haake 02].

定理 1 ([Haake 02])**.** ある割当規則 f が無羨望性を達成可能であるための必要十分条件は，任意の申告の組 v に対して， $f(v)$ が v に対する局所効率的割当であることである.

ここで，割当規則 f が無羨望性を達成可能であるとは，メカニズム $M(f, p)$ が無羨望性を満たすような適当な支払規則 p を定めることができる，ということである.

このように割当規則に注目して特徴付けることで，メカニズムを設計する際に割当規則のみに着目することが可能となる．割当規則に注目してメカニズムの性質を特徴付ける試みは，経済学分野の Myerson によって始められ [Myerson 81]，近年では計算機科学分野でも注目されている分野である [Mu'Alem 09].

3. 拡張された無羨望性

本章では，従来の無羨望性（定義 1）を拡張し，例 1 のようなグループへの羨望の不存在性を定義する．具体的には，個人とグループの間の無羨望性（定義 3）とグループ間の無羨望性（定義 4）の２種類の性質を定義する.

定義 3 (個人とグループの間の無羨望性)**.** あるメカニズム $M(f, p)$ が個人とグループの間の無羨望性 *(envy-freenss of an individual toward a group, ItG-EF)* を満たすとは，$\forall i, \forall S \subseteq N$, $\forall v$ に対して

$$v_i(f_i(v)) - p_i(v) \geq v_i(\bigcup_{j \in S} f_j(v)) - \sum_{j \in S} p_j(v) \qquad (1)$$

を満たすことである.

すなわち，どのエージェントも他のエージェントの集合を羨まない場合に，そのメカニズムは個人とグループの間の無羨望性を満たす．このとき，式 (1) において，エージェント i はグループ S に含まれてもよいものとして定義している．これは，エージェント i にとって，自分が現在獲得している財に加えて，他のエージェント j の獲得している財を獲得すると，たとえ p_j だけ余分に支払ったとしても，効用が増加するような場合に対応している.

定義 4 (グループ間の無羨望性). あるメカニズム $M(f,p)$ がグループ間の無羨望性 *(envy-freenss of a group toward a group, GtG-EF)* を満たすとは，$\forall v, \forall S, S' \subseteq N$ に対して

$$\sum_{i\in S}(v_i(f_i(v)) - p_i(v)) \geq V^*(S, \bigcup_{j\in S'} f_j(v)) - \sum_{j\in S'} p_j(v), \quad (2)$$

が成り立つことである．ただし，$V^*(S,B)$ は財の集合 B がエージェントの集合 S に最適に割り当てられたときの，エージェントの集合 S が持つ効用の総和である．

グループ間の無羨望性は，どのグループも他のグループを羨まないことを意味する．このとき，式 (2) において，グループ S および S' に重複があってもよいものとして定義している．これは，S にとって，現在の割当より良い割当が存在する場合に対応している．定義より，グループ間の無羨望性は，個人とグループの間の無羨望性よりも厳しい性質である．また，個人とグループの間の無羨望性は，従来の無羨望性よりも厳しい性質である．

提案した無羨望性を特徴付けるため，財の割当に関して２種類の性質を導入する．まず，２章で紹介した置換概念を，次のように拡張する．

結合を含めた置換 ある割当 a' が，割当 a に対する結合を含めた置換であるとは，任意の $i \in N$ に対してある $S_i \subseteq N$ が存在し，$a'_i = \bigcup_{j\in S_i} a_j$ かつ $\bigcup_{i\in N} a'_i = \bigcup_{i\in N} a_i$ が成立することである．

結合と分割を含めた置換 ある割当 a' が，割当 a に対する結合と分割を含めた置換であるとは，$\bigcup_{i\in N} a'_i = \bigcup_{i\in N} a_i$ が成立することである．

定義 5 (結合を含めた局所効率的割当). ある割当 $a \in A$ が，申告の組 v に対する結合を含めた局所効率的割当 *(LEBA with Merger, LEBA-M)* であるとは，a に対する任意の結合を含めた置換 a' に対して

$$\sum_{i\in N} v_i(a_i) \geq \sum_{i\in N} v_i(a'_i)$$

が成り立つことである．

定義 6 (結合と分割を含めた局所効率的割当). ある割当 $a \in A$ が，申告の組 v に対する結合と分割を含めた局所効率的割当 *(LEBA with Split/Merger, LEBA-SM)* であるとは，a に対する任意の結合と分割を含めた置換 a' に対して

$$\sum_{i\in N} v_i(a_i) \geq \sum_{i\in N} v_i(a'_i)$$

が成り立つことである．

これらの定義を用いると，２種類の無羨望性を達成するための必要十分条件が次のように示せる．紙幅の都合上，証明は省略する．

定理 2. 単一バンドル指向ドメインにおいて，ある割当規則 f が個人とグループの間の無羨望性を達成可能であるための必要十分条件は，任意の申告の組 v に対して，$f(v)$ が v に対する結合を含めた局所効率的割当であることである．

定理 3. 単一バンドル指向ドメインにおいて，ある割当規則 f がグループ間の無羨望性を達成可能であるための必要十分条件は，任意の申告の組 v に対して，$f(v)$ が v に対する結合と分割を含めた局所効率的割当であることである．

組み合わせオークションの分野でよく知られている Vickrey-Clarke-Groves (VCG) メカニズムは，社会的余剰（エージェントの効用の総和）を最大化するパレート効率的な割当を割当規則として用いている．パレート効率的な割当は，任意の申告の組 v に対して結合と分割を含めた局所効率的割当を達成しており，定理 3 よりグループ間の無羨望性を達成可能である．

しかしながら，支払規則の定め方によっては，グループ間の無羨望性を達成できないこともわかっている．例えば VCG は，単一バンドル指向ドメインにおいて個人とグループ間の無羨望性を満たさない．一方，VCG と同様の割当規則を用い，自分が申告した金額をそのまま支払う第一価格組合せオークション (first-price CA) と呼ばれるメカニズムは，グループ間の無羨望性を満たすことが示せる．また，すべての財を一つのバンドルとして販売する SET メカニズムと呼ばれるメカニズムは，個人とグループの間の無羨望性は満たすが，グループ間の無羨望性は満たさないことがわかっている．

4. 他の性質との関係

本論文ではここまで，エージェントの利己的行動を考慮せず，エージェントは自分のタイプを正直に申告するものと仮定して議論を進めてきた．一方，自律化されたエージェントを考えると，エージェントは利己的であり，効用を増加させるために不正行為を行うと考えられる．本章では，このようなエージェントの利己的行動に対する頑健性として戦略的操作不可能性，コア，および架空名義操作不可能性の３つを挙げ，拡張された無羨望性との関係を議論する．

4.1 戦略的操作不可能性

戦略的操作不可能性 (strategy-proofness) とは，任意のエージェントにとって自分の真のタイプを申告することが支配戦略となるようなメカニズムの性質である [Myerson 81]. 上で述べた VCG と first-price CA については，VCG は戦略的操作不可能であるが，first-price CA は戦略的操作不可能でない．これは，first-price CA においては，自分の申告した金額がそのまま支払額となるように定められており，過少申告の誘因が生じるためである．

ここで，メカニズムの最悪時の近似率を定義する．あるメカニズム $M(f,p)$ の最悪時の近似率が $r(\leq 1)$ であるとは，任意の申告の組 v に対して，

$$\frac{\sum_{i\in N} v_i(f_i(v))}{\max_{a\in A}\sum_{i\in N} v_i(a)} \geq r$$

が成立することである．ここで，分母 $\max_{a\in A}\sum_{i\in N} v_i(a)$ は，申告の組 v に対するパレート効率的な割当が達成する社会的余剰である．このような最悪時の近似率によるメカニズムの解析は，アルゴリズム設計をはじめとする計算機科学の各分野でも広く扱われている．

本研究では，個人とグループの間の無羨望性と戦略的操作不可能性を同時に満たすメカニズムの最悪時の近似率について，次の定理を得た．

定理 4. 単一バンドル指向ドメインにおいて，個人とグループの間の無羨望性と戦略的操作不可能性を同時に満たすメカニズムが達成する最悪時の近似率は，高々 $2/3$ である．

この定理は，個人とグループの間の無羨望性と戦略的操作不可能性を満たすメカニズムでは，パレート効率性は達成できないことを示している．これは，図 1 の濃い灰色の部分が空集合であることを示している．

さらに，Iwasaki らによって提案された adaptive reserve price (ARP) と呼ばれるメカニズムは，単一バンドル指向ドメインにおいて架空名義操作不可能性を満たすことが知られており，更に財の数 m に対して最悪時の近似率が $2/(m+1)$ となることも示されている [Iwasaki 10]．ARP が架空名義操作不可能であることと，次節で示す定理より，ARP は個人とグループの間の無羨望性も満たす．よって，$m=2$ のとき，定理 4 で求めた最悪時の近似率 $2/3$ がタイトであることがわかる．

4.2 コア

コア (core) は，オークション結果の安定性に関する概念であり，従来は協力ゲームの分野で広く議論されてきた．あるオークション結果がコアに属するとは，参加エージェントの中のどのグループも，主催者と共謀して逸脱する誘因を持たないことを意味する．主催者と共謀して逸脱する誘因を持つグループをブロッキング提携と呼び，結果が常にコアに属するオークションをコア選択オークション (core selecting auction) と呼ぶ.

定義 7 (コア選択オークション)**.** あるメカニズム $M(f,p)$ がコア選択オークション *(core selecting auction)* であるとは，任意の申告 v に対してブロッキング提携が存在しないことである．

本研究では，コア選択オークションとグループ間の無羨望性との関係として，次の定理を得た．

定理 5. 単一バンドル指向ドメインにおいて，あるメカニズムがコア選択オークションであるための必要十分条件は，パレート効率性とグループ間の無羨望性を同時に満たすことである．

この定理は，図 1 の薄い灰色の部分の範囲を規定している．３章で挙げた first-price CA は，パレート効率的かつグループ間の無羨望性を満たす．よって，first-price CA はコア選択オークションである．一方，VCG はパレート効率的ではあるが，グループ間の無羨望性を満たさないため，コア選択オークションとはならない．

4.3 架空名義操作不可能性

架空名義操作不可能性 (false-name-proofness) は，任意のエージェントにとって，複数の名義を用いることなく自分の真のタイプを申告することが支配戦略である，というメカニズムの性質であり，戦略的操作不可能性の拡張として知られている．組合せオークションの架空名義操作不可能性は，マルチエージェントの分野で特に研究が盛んである [Iwasaki 10].

架空名義操作不可能性は，あるエージェントの，他の複数のエージェントが得るバンドルの組合せに対する効用を考えているという点で，個人とグループの間の無羨望性と似ている．実際，これまでに考案されてきた架空名義操作不可能なメカニズムは，単一バンドル指向ドメインにおいて個人とグループの間の無羨望性を満たすことが示せる．

ここでは，より一般に，単一バンドル指向ドメインにおいては，あるメカニズムが架空名義操作不可能であれば，同時に個人とグループの間の無羨望性も満たすことを示す．

定理 6. 単一バンドル指向ドメインにおいて，任意の架空名義操作不可能なメカニズムは個人とグループの間の無羨望性を満たす．

一方，定理 6 の逆は成り立たないことも示せる．Ito らによって提案された average-max minimal-bundle (AM-MB) メカニズム [Ito 05] は，貪欲法を基にした組合せオークションメカニズムであり，その計算の容易さが特徴である．この AM-MB メカニズムは個人とグループの間の無羨望性（およびグループ間の無羨望性）を満たすが，架空名義操作不可能性を満たさないことが知られている．

5. おわりに

本研究では，組合せオークションにおける無羨望性に関して議論し，エージェントのグループに対する羨望の存在を指摘した．組合せオークションの割当規則に着目して特徴付けを行ったほか，エージェントの利己的行動に対する頑健性との関係も議論した．

無羨望性は経済学分野における公平性の一つの指標であり，重要な研究課題である．本研究で提案したグループに対する無羨望性も，組合せオークションのような複雑な環境における公平性の一つの指標となりうると考えられる．しかしながら，グループに対する無羨望性に関する多くの問題は未解決である．例えば，単一バンドル指向に限定しない一般的なドメインでは，グループに対する無羨望性を特徴付ける条件はまだ発見されていない．このような問題を解決することで，複雑な環境に対応できる公平性の議論の発展に貢献したいと考えている．

参考文献

[Day 08] Day, R. and Milgrom, P.: Core-selecting package auctions, *International Journal of Game Theory*, Vol. 36, pp. 393–407 (2008)

[Foley 67] Foley, D.: Resource allocation and the public sector, *Yale Economics Essays*, Vol. 7, pp. 45–98 (1967)

[Haake 02] Haake, C.-J., Raith, M. G., and Su, F. E.: Bidding for envy-freeness: A procedural approach to n-player fair-division problems, *Social Choice and Welfare*, Vol. 19, pp. 723–749 (2002)

[Ito 05] Ito, T., Yokoo, M., Iwasaki, A., and Matsubara, S.: A New Strategy-Proof Greedy-Allocation Combinatorial Auction Protocol and Its Extension to Open Ascending Auction Protocol, in *AAAI*, pp. 261–268 (2005)

[Iwasaki 10] Iwasaki, A., Conitzer, V., Omori, Y., Sakurai, Y., Todo, T., Guo, M., and Yokoo, M.: Worst-case efficiency ratio in false-name-proof combinatorial auction mechanisms, in *AAMAS*, pp. 633–640 (2010)

[Lehmann 02] Lehmann, D., O'Callaghan, L. I., and Shoham, Y.: Truth revelation in approximately efficient combinatorial auctions, *Journal of the ACM*, Vol. 49, No. 5, pp. 577–602 (2002)

[Leyton-Brown 10] Leyton-Brown, K. and Elkind, E.: Algorithmic Game Theory and Artificial Intelligence, *AI Magazine*, Vol. 31, No. 4, pp. 9–12 (2010)

[Mu'Alem 09] Mu'Alem, A.: On Multi-dimensional Envy-Free Mechanisms, in *Proc. the 1st International Conference on Algorithmic Decision Theory (ADT)*, pp. 120–131, (2009)

[Myerson 81] Myerson, R. B.: Optimal Auction Design, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 6, No. 1, pp. 58–73 (1981)

[Todo 11] Todo, T., Li, R., Hu, X., Mouri, T., Iwasaki, A., and Yokoo, M.: Generalizing Envy-Freeness Toward Group of Agents, in *IJCAI*, (2011), to appear