2E3-5

定常時系列データの非ガウス性を用いた ARMA モデルによる変数間決定関係の解析

Analyzing data generating processes using a non-Gaussian ARMA model of stationary time series

田代 竜也 Tatsuya Tashiro　清水 昌平 Shohei Shimizu　河原 吉伸 Yoshinobu Kawahara　鷲尾 隆 Takashi Washio

大阪大学 産業科学研究所
The Institute of Scientific and Industrial Research, Osaka University

We consider to estimate the data generating processes of variables using a non-Gaussian autoregressive moving-average (ARMA) model with instantaneous effects. It is common to apply ARMA models on stationary times-series data to analyze the influences of past variables on present variables. Recently, a new time series model called ARMA-LiNGAM model was proposed, which combines an ARMA model and a classical structural equation model (SEM) to analyze instantaneous effects as well as lagged effects. In this paper, we first review an estimation procedure for the ARMA-LiNGAM model based on non-Gaussianity of external influences and mention some problems of the previous procedure. Then we propose a new estimation procedure that solves those problems.

1. はじめに

データマイニングの分野では，データ生成システムをグラフィカルに表現する研究が近年盛んに行われている。本研究では多変数の時系列データに自己回帰移動平均 (ARMA) モデルを適用し，そのパラメータから変数間の因果関係を読み解くことを主なテーマとする。この手法により，一定の条件を満たせばさまざまな物理現象や経済，ファイナンス等，多分野の時系列データの因果構造をグラフィカルに表現することができる。しかし，変数間の因果解析において，データを観測する際の時間分解能が事象の変化を捉えるのに十分でなく，観測した時系列データが変数間での瞬間的な影響を含んでいる場合，ARMA モデルが説明する因果関係は必ずしも正確でないことが報告されている [Kawahara 11]。この問題を解決する時系列モデルとして提案されたのが，ARMA モデルと線形構造方程式モデルを組み合わせた ARMA-LiNGAM モデル [Kawahara 11] である。ARMA-LiNGAM モデルは，データの非ガウス性を利用し，独立成分分析 (Independent Component Analysis, ICA) を基にした LiNGAM 分析 [Shimizu 06] から推定される。しかし，従来の LiNGAM 分析にはいくつかの潜在的な問題 [Shimizu 11] があり，これにより ARMA-LiNGAM モデルの推定精度が劣化することが懸念される。本稿では従来の LiNGAM 分析に代わる最新の推定手法を用いることで，ARMA-LiNGAM モデルの推定精度の改善を試みる。そして，人工的に生成したデータを用いて評価実験を行い，その結果について考察する。

2. 時系列モデルの定義

$y_i(t)$ $(t = -\infty, \dots, 0, 1, \dots, \infty, i = 1, \dots, n)$ を観測された時系列データとする。ただし，i は変数，t は時間のインデックスである。さらに，全ての変数を集めたベクトルを $\boldsymbol{y}(t) := (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ とする。本稿で扱う多変数時系列データ $\boldsymbol{y}(t)$ は常に定常であることを前提としている。

連絡先: 田代 竜也，大阪大学 産業科学研究所，567-0047 大阪府茨木市美穂ヶ丘 8-1，tashiro@ar.sanken.osaka-u.ac.jp

2.1 ARMA モデル

データを観測する際の時間分解能が事象の変化を捉えるのに十分な大きさであり，時系列データが変数間の瞬間的な影響を含んでいない場合，自己回帰移動平均 (ARMA) モデルを適用することで変数間の影響の強さを解析することができる。

(p, q) 次多変数 ARMA モデル（以下，ARMA(p, q)）は次式で定義される：

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \boldsymbol{y}(t-i) + \boldsymbol{\epsilon}(t) - \sum_{j=1}^{q} \Theta_j \boldsymbol{\epsilon}(t-j) \qquad (1)$$

ただし，$\boldsymbol{\epsilon}(t) := (\epsilon_1(t), \dots, \epsilon_n(t))^T$ とし，各 $\epsilon_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ はホワイトノイズ*1 と仮定する。Φ_i と Θ_j は $n \times n$ の係数行列であり，Φ_i は i 時点前の変数 $\boldsymbol{y}(t-i)$ から，Θ_j は j 時点前のホワイトノイズ $\boldsymbol{\epsilon}(t-j)$ から現時点の変数 $\boldsymbol{y}(t)$ への影響の強さを説明している。つまり，Φ_i の k 行 l 列成分は $y_l(t-i)$ から $y_k(t)$ への影響の強さを，同様に Θ_j の k 行 l 列成分は $\epsilon_l(t-i)$ から $y_k(t)$ への影響の強さを表している。

2.2 ARMA-LiNGAM モデル

ARMA-LiNGAM モデル [Kawahara 11] は ARMA モデルと線形構造方程式モデル [Bollen 89] を組み合わせることで，時系列データが変数間の瞬間的な影響を含む場合でも，変数間の因果構造を正しく説明することを可能にしている。(p, q) 次多変数 ARMA-LiNGAM モデル（以下，ARMA-LiNGAM(p, q)）は次式で定義される：

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=0}^{p} \Psi_i \boldsymbol{y}(t-i) + \boldsymbol{e}(t) - \sum_{j=1}^{q} \Omega_j \boldsymbol{e}(t-j) \qquad (2)$$

各 $e_i(t)$ は外乱をモデル化している確率過程であり，互いに独立かつ非ガウス過程に従うと仮定する。ARMA-LiNGAM モデル (2) が ARMA モデル (1) と大きく異なる点は，外乱が非ガウスであることと，Ψ_0 で変数間の瞬間的な影響を説明していることである。ここで，変数間の瞬間的な影響は非巡回であることを仮定する。このとき Ψ_0 は狭義下三角行列*2 となる。

*1 $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ は $E[\boldsymbol{\epsilon}(t)] = \boldsymbol{0}$, $E[\boldsymbol{\epsilon}(t)\boldsymbol{\epsilon}(t)^T] = \boldsymbol{\Sigma}$, $E[\boldsymbol{\epsilon}(s)\boldsymbol{\epsilon}(t)^T] = \boldsymbol{0}$ $(s \neq t)$ を満たす。ただし，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は非特異行列である。
*2 対角成分が 0 であるような下三角行列。

2.3 ARMA モデルと ARMA-LiNGAM モデルの関係

ARMA モデル (1) と ARMA-LiNGAM モデル (2) の関係について述べる。式 (1) と (2) より，それぞれの外乱項 $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ と $\boldsymbol{e}(t)$ の関係は次式で表せる：

$$\boldsymbol{e}(t) = (I - \Psi_0)\boldsymbol{\epsilon}(t) \quad (\boldsymbol{\epsilon}(t) = \Psi_0\boldsymbol{\epsilon}(t) + \boldsymbol{e}(t)) \tag{3}$$

$\boldsymbol{\epsilon}(t)$ は $\boldsymbol{e}(t)$ と同様に非ガウスであることに注意されたい。また，式 (1)，(2) の係数行列の関係は $i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q$ について次の関係が導き出せる：

$$\Psi_i = (I - \Psi_0)\Phi_i, \quad \Omega_j = (I - \Psi_0)\Theta_j(I - \Psi_0)^{-1} \tag{4}$$

この式から，変数間の瞬間的な影響 Ψ_0 を考慮することによって，ARMA モデル (1) の各係数 Φ_i, Θ_j が，ARMA-LiNGAM モデル (2) の各係数 Ψ_i，Ω_j に変化することがわかる。また，Ψ_0 を同定することができれば，この関係式により ARMA モデル (1) から ARMA-LiNGAM モデル (2) を導出できる。

変数間の瞬間的な影響の非巡回性と外乱項の非ガウス性より，式 (3) に次章で説明する LiNGAM(Linear Non-Gaussian Acyclic Model) モデルが適用できる。これにより，LiNGAM 分析を用いて $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ から Ψ_0 を同定することができる [Shimizu 06, Shimizu 11]。

3. LiNGAM モデル

LiNGAM（Linear Non-Gaussian Acyclic Model）モデル [Shimizu 06, Shimizu 11] は，データが非ガウス分布に従うことを仮定した上で，構造方程式モデルに線形非巡回性を持たせたモデルである。観測変数 x_i $(i = 1, \ldots, n)$ が LiNGAM モデルに従って生成されるとき，x_i は次式で表される：

$$x_i = \sum_{k(j)<k(i)} b_{ij}x_i + e_i \tag{5}$$

ただし，$k(i)$ は変数の因果的順序，e_i は非ガウス過程に従う外乱，b_{ij} は定数の係数である。式 (5) が表す x_i の生成過程は有向非巡回グラフ（Directed Acyclic Graph，DAG）で表現できる。このとき $B = [\ b_{ij}\ ]$ は有向非巡回グラフの隣接行列にあたり，b_{ij} は変数 x_j から x_i への影響の強さを表している。式 (5) の行列表記は次式で与えられる：

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} \tag{6}$$

式 (6) を $\boldsymbol{x}$ について解くと，$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ $(A = (I - B)^{-1})$ が得られる。今，$\boldsymbol{x}$ の生成過程が非巡回性であることを仮定しているので，変数の因果的順序 $k(i)$ に従って変数 $\boldsymbol{x}$ の順序を並び替えると B は狭義下三角行列に，A は下三角行列となる [Bollen 89]。LiNGAM 分析によって，データ行列 $\boldsymbol{x}$ から因果的順序 $k(i)$ と隣接行列 B を推定することができる [Shimizu 06]。

4. 従来手法による ARMA-LiNGAM モデルの推定

4.1 ICA-LiNGAM 分析を用いた推定手法

ARMA-LiNGAM モデルは，式 (3) に LiNGAM 分析を適用し，推定した変数間の瞬間的な影響の強さ Ψ_0 及び，ARMA モデルと ARMA-LiNGAM モデルの関係式 (4) を用いて導出することができる。従来手法では，ICA（Independent Component Analysis）を基にした ICA-LiNGAM アルゴリズム [Shimizu 06] によって Ψ_0 を推定している [Kawahara 11]。この ICA-LiNGAM アルゴリズムを用いて，アルゴリズム 1 の手順で ARMA モデルから ARMA-LiNGAM モデルを推定することができる [Kawahara 11]。

アルゴリズム 1: ARMA-(ICA)LiNGAM アルゴリズム

インプット：n 変数，長さ T の $n \times T$ 時系列データ行列 Y $(n \ll T)$。

1. 既存の手法により多変数 ARMA モデル (1) を推定し，MA 系列の推定値 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t)$ を計算する。
2. 推定した MA 系列 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t)$ に ICA-LiNGAM 分析 [Shimizu 06] を実行し，行列 M を計算する：
$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t) = M\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t) + \hat{\boldsymbol{e}}(t)$$
3. 推定した行列 $\hat{M}$ 及び，次式から ARMA-LiNGAM モデル (2) のパラメータを計算する：
$$\hat{\Psi}_0 = \hat{M}, \quad \hat{\Psi}_i = (I - \hat{M})\hat{\Phi}_i,$$
$$\hat{\Omega}_j = (I - \hat{M})\hat{\Theta}_j(I - \hat{M})^{-1}$$

4.2 従来手法の問題点

従来の ARMA-LiNGAM モデルの推定手法で使用している ICA-LiNGAM アルゴリズムには, 潜在的な問題がいくつかある。ほとんどの ICA アルゴリズム [Hyvärinen 01] には，ステップサイズ等のアルゴリズムに関する初期値を適切に設定する必要があり，この初期値の設定が悪ければ有限のステップサイズ内で正しい解に収束しない場合がある。また他には，因果的順序 $k(i)$ を決める手順がスケール不変ではないという問題がある。特に変数のスケール幅が大きいとき変数，標準偏差の大きさによって変数順序が変わり，正しい因果順序とは異なる結果が出る可能性がある [Shimizu 11]。これらの問題によって Ψ_0 を正確に推定することができなければ，式 (4) で導出される他のパラメータも正確に推定することはできない。結果として，ARMA-LiNGAM モデルの推定精度が下がることになる。

5. 提案手法による ARMA-LiNGAM モデルの推定

ICA-LiNGAM 分析が有する初期値設定の問題や順序決定の手順がスケール不変でないという問題を回避するために，LiNGAM モデル推定の発展手法である，DirectLiNGAM 分析 [Shimizu 11] を導入することを提案する。DirectLiNGAM 分析を用いて Ψ_0 を推定することで，Ψ_0 の推定精度が向上し，ARMA-LiNGAM モデル全体の推定精度が向上することが期待できる。

5.1 DirectLiNGAM 分析

最初に外生変数について説明する。変数 x_i が他のどの変数 x_j からも影響を受けていないとき，つまり変数 x_i が外乱 e_i と等しいとき x_i は外生変数であるという [Bollen 89]。次に，DirectLiNGAM 分析の理論的妥当性を保証する 2 つの補題と 1 つの系を示す [Shimizu 11]。

補題 1. 入力データ $\boldsymbol{x}$ が厳密に LiNGAM モデル (6) に従うと仮定する [*3]。 x_i を x_j で回帰したときの残差 $r_i^{(j)}$ は次式で得られる：

$$r_i^{(j)} = x_i - \frac{\mathrm{cov}(x_i, x_j)}{\mathrm{var}(x_j)} x_j \ (i \neq j)$$

このとき，変数 x_j が $i \neq j$ となる全ての残差 $r_i^{(j)}$ と独立であるならば x_j は外生変数である。また， x_j が外生変数となるのはその場合に限る。

補題 2. 入力データ $\boldsymbol{x}$ が厳密に LiNGAM モデル (6) に従い，変数 x_j は外生変数であると仮定する。$i \neq j$ となる全ての x_i を x_j で回帰したときの残差 $r_i^{(j)}$ を集めた $p-1$ 次元ベクトルを $\boldsymbol{r}^{(j)}$ とする。このとき，残差ベクトル $\boldsymbol{r}^{(j)}$ は LiNGAM モデルに従う：

$$\boldsymbol{r}^{(j)} = B^{(j)} \boldsymbol{r}^{(j)} + \boldsymbol{e}^{(j)}$$

$B^{(j)}$ は行と列を同時に並び替えることで狭義下三角行列に変形することができる。また，$\boldsymbol{e}^{(j)}$ の各成分は非ガウス分布に従い，互いに独立である。

系 1. 入力データ $\boldsymbol{x}$ が厳密に LiNGAM モデル (6) に従い，変数 x_j は外生変数であると仮定する。変数 x_i の因果的順序を $k(i)$ としたように，残差 $r_i^{(j)}$ の因果的順序を $k_{r^{(j)}}(i)$ とする。このとき，残差の因果的順序は元の観測変数の因果的順序と同じである：

$$k_{r^{(j)}}(l) < k_{r^{(j)}}(m) \Leftrightarrow k(l) < k(m)$$

補題 1, 2, 系 1 の証明は [Shimizu 11] で与えられている。以上の 2 つの補題と 1 つの系を用いて DirectLiNGAM 分析について説明する。入力データ $\boldsymbol{x}$ が LiNGAM モデルに従うとき，因果的順序が 1 番目となる外生変数 x_j は，回帰した時の残差と最も独立な変数を見つけることによって補題 1 より同定できる。このとき，最小二乗回帰により外生変数 x_j の影響を取り除いた残差の集合である $p-1$ 次元の残差ベクトル $\boldsymbol{r}^{(j)}$ は補題 2 より LiNGAM モデルに従う。この $\boldsymbol{r}^{(j)}$ を新たに入力し，再び補題 1 を適用することで $\boldsymbol{x}$ の因果的順序において 2 番目の変数を得ることができる。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{r}^{(j)}$ の順序関係は系 1 で保証されている。この手順を全ての変数の因果的順序が決定するまで繰り返すことで，入力データ $\boldsymbol{x}$ から LiNGAM モデル (6) を同定することができる。

実際に補題 1 を適用するには何らかの指標で独立性を評価する必要がある。本稿では独立性を評価する指標として，カーネル法を用いた相互相互情報量に基づく独立性指標 [Bach 02] を用いることにする。U を変数 x_i の添字の集合，つまり $U = 1, \ldots, n$ としたとき，変数 x_j と x_i を変数 x_j で回帰した時の残差 $r_i^{(j)} = x_i - \frac{\mathrm{cov}(x_i,x_j)}{\mathrm{var}(x_j)} x_j$ 間の独立性を評価する指標として，次式の統計量を用いる [Shimizu 11]：

$$T_{kernel}(x_j; U) = \sum_{i \in U, i \neq j} \widehat{MI}_{kernel}(x_j, r_i^{(j)}) \qquad (7)$$

統計量 T_{kernel} が最も小さくなるような x_j を選ぶことで外生変数を同定することができる。

DirectLiNGAM アルゴリズムは ICA-LiNGAM 分析と違い，ステップサイズ等のアルゴリズムに関する初期値設定をする必要がなく，データがモデルに厳密に従っていれば変数の数と同じステップ数で正しい解に収束することが保証されている [Shimizu 11]。また，ICA-LiNGAM アルゴリズムのスケール不変ではないという問題も DirectLiNGAM アルゴリズムにはない。以上のことから，DirectLiNGAM アルゴリズムを用いることで，ICA-LiNGAM アルゴリズムよりも高い精度で LiNGAM モデルを推定できることが報告されている [Shimizu 11]。アルゴリズム 2 に DirectLiNGAM 分析による LiNGAM モデルの推定手法 [Shimizu 11] を示す。

アルゴリズム 2: DirectLiNGAM アルゴリズム

インプット：n 変数，サンプルサイズ T の $n \times T$ データ行列 X ($n \ll T$)。

1. n 次元の変数ベクトルを $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}$ の要素のインデックスを表す添字の集合を U とする。変数の因果的順序リスト K を $K := \emptyset$ に初期化する。
2. $n-1$ 個の添字が K に追加されるまで (a)〜(c) を繰り返す。
   (a) $j \in U \setminus K$ を満たす全ての j について以下を行う：
      i. 全ての $i \in U \setminus K$ $(i \neq j)$ について x_i を x_j に最小二乗回帰し，データ行列 X から残差ベクトル $\boldsymbol{r}^{(j)}$，残差データ行列 $\boldsymbol{R}^{(j)}$ を計算する。
      ii. 次式を用いて残差に対して最も独立性の高い x_m を探す：

$$x_m = \arg \min_{j \in U \setminus K} T_{kernel}(x_j; U \setminus K) \qquad (8)$$

      T_{kernel} は式 (7) で定義される独立性指標である。
   (b) m を K の末尾に加える。
   (c) $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{r}^m$，$\boldsymbol{X} := \boldsymbol{R}^{(m)}$ とする。
3. 残った最後の変数の添字を K の末尾に加える。
4. K の順序に従い狭義下三角行列 B を作り，元の変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ とデータ行列 $\boldsymbol{X}$ に対して最小二乗法や最尤法など共分散に基づく既存の回帰手法を適用し，影響の強さ b_{ij} を推定する。本稿では最小二乗法を用いる。

5.2 DirectLiNGAM 分析による ARMA-LiNGAM モデルの推定

アルゴリズム 1 の手順 2 において，ICA を用いた LiNGAM 分析の代わりに Direct-LiNGAM 分析を用いて行列 M，つまり，変数間の瞬間的な影響の強さ Ψ_0 を求める。このことにより，ICA-LiNGAM 分析が持つ問題を回避し，ARMA-LiNGAM モデルの推定精度が向上することを期待できる。

6. 評価実験

人工データを用いて ARMA-(ICA)LiNGAM アルゴリズムと ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズムによるモデルの推定精度の比較実験を行った。

6.1 実験設定

人工データ生成に用いたモデルは ARMA-LiNGAM $(1,1)$ である。変数の数 $n = 3, 5, 8$，サンプル時点数 $T = 300, 500, 1000, 2000$ について，以下の手順で人工データを生成した。

1. 変数間の瞬間的な影響の強さを表す狭義下三角行列 Ψ_0 を，下三角部分に 0 を含まない密な状態，もしくは下三角部分に 0 を多く含む疎な状態のどちらかになるようにランダムに生成した [Shimizu 06]。

*3 $\boldsymbol{x}$ がモデルの全ての仮定をみたし，サンプルサイズが無限であるとき $\boldsymbol{x}$ は厳密にモデルに従うという [Shimizu 11]。

2. Ψ_0 の 0 でない要素を $[-1.5, -0.5] \cup [0.5, 1.5]$ の範囲からランダムに選んだ値に置き換え，外乱 $e_i(t)$ の分散を $[1, 3]$ の範囲から選択した。
3. 18 種類の非ガウス分布 [Bach 02] を用いて時点数 T の外乱 $e_i(t)$ をそれぞれ独立に生成した。
4. 式 (3) に従って Ψ_0，$e_i(t)$ からホワイトノイズ $\epsilon_i(t)$ を生成した。さらに，変数間の因果的順序を推定アルゴリズムに対して隠すために，$\boldsymbol{\epsilon}(t)$ の行の順序をランダムに入れ替えた。また，この順序に従って Ψ_0 の行と列を同時に入れ替えた。
5. ARMA $(1, 1)$ 過程が定常になるような係数行列をランダムに生成した[*4]。
6. ARMA $(1, 1)$ 過程に従って観測変数 $y_i(t)$ を生成した。

生成した同じデータに対し，ARMA-(ICA)LiNGAM アルゴリズムと ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズムを適用して ARMA-LiNGAM $(1, 1)$ を推定した。これを 20 回繰り返し，ARMA-(ICA)LiNGAM アルゴリズムと ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズムの Ψ_0，Ψ_1 の推定精度を比較した。

6.2 結果

表 1 では ARMA-LiNGAM $(1, 1)$ の 推定された Ψ_0 を，表 2 では ARMA$(1, 1)$ の推定された Ψ_1 の二乗平均平方根誤差（Root Mean Square Error，RMSE）の 20 回分の合計を比較している。Ψ_0 の二乗平均平方根誤差は次式で計算される：

$$RMSE(\Psi_0) = \sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i,j}^{n}\left(\Psi_{0true}(i,j) - \hat{\Psi}_0(i,j)\right)^2}$$

Ψ_1 についても同様に二乗平均平方根誤差が計算される。表 1 から分かるように，今回の評価実験では全ての場合で ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズムを用いることで変数間の瞬間的な影響の強さ Ψ_0 の推定精度が向上したことがわかる。また，これに伴い，ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズムを用いることで過去の変数からの影響の強さ Ψ_1 の推定精度が向上していることが表 2 からわかる。

6.3 考察

今回の実験では DirectLiNGAM 分析を導入することで ARMA-LiNGAM モデルの推定精度が従来手法よりも向上することがわかった。推定精度が向上した理由としては，変数間の瞬間的な影響の因果的順序をより正確に推定できるようになったためであると考えられる。また，変数間の瞬間的な影響の強さ Ψ_0 の推定精度が向上することで，その他の係数，今回の実験の場合は Ψ_1 の推定精度が向上することが確認できた。

7. 結論

変数間の瞬間的な影響を含む時系列データから変数間の因果解析をする際，時系列データに ARMA-LiNGAM モデルを適用することにより，瞬間的な影響の強さ及び，過去の変数，過去の外乱からの影響の強さを同時にモデル化することができる。従来の手法では，ARMA モデルのホワイトノイズ過程に ICA-LiNGAM 分析を適用することで変数間の瞬間的な影響の強さを推定した。しかし，ICA-LiNGAM 分析にはいくつかの潜在的な問題があり，ARMA-LiNGAM モデルの全てのパラメータの推定精度の低下を招く原因となっていた。本稿では ARMA-LiNGAM モデルの変数間の瞬間的な影響の強さの推定に DirectLiNGAM 分析を導入し，従来の ICA-LiNGAM 分析が有する問題を回避することで，ARMA-LiNGAM モデル全体の推定精度が向上することを確認した。

[*4] $z \in \mathbb{C}$，$|z| \le 1$ について $\det(I_n - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p) \neq 0$ かつ $\det(I_n - \Theta_1 z - \cdots - \Theta_q z^q) \neq 0$ を満たすとき ARMA 過程は定常となる。I_n は $n \times n$ の単位行列である。

表 1　ARMA-LiNGAM$(1, 1)$ の真の Ψ_0（変数間の瞬間的な影響の強さ）と推定された Ψ_0 の二乗平均平方根誤差の 20 回分の合計。ARMA-(ICA)LiNGAM アルゴリズムと ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズムの誤差を比べて，値が小さい方を赤字にしている。

		サンプル時点数			
		300	500	1000	2000
ARMA-(ICA)LiNGAM アルゴリズム	n=3	2.72	2.02	1.36	0.50
	n=5	6.40	3.76	1.74	1.87
	n=8	10.82	11.59	8.52	5.90
ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズム	n=3	2.12	1.26	0.59	0.32
	n=5	3.60	1.48	1.02	0.51
	n=8	5.16	5.36	2.81	3.18

表 2　ARMA-LiNGAM$(1, 1)$ の真の Ψ_1（1 時点前の変数からの影響の強さ）と推定された Ψ_1 の 20 回分の二乗平均平方根誤差の合計。ARMA-(ICA)LiNGAM アルゴリズムと ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズムの誤差を比べて，値が小さい方を赤字にしている。

		サンプル時点数			
		300	500	1000	2000
ARMA-(ICA)LiNGAM アルゴリズム	n=3	3.20	2.62	1.95	0.94
	n=5	9.11	10.48	3.57	4.55
	n=8	15.81	21.55	10.35	22.76
ARMA-DirectLiNGAM アルゴリズム	n=3	2.60	2.11	1.56	0.88
	n=5	8.86	9.31	3.36	3.74
	n=8	13.80	18.13	9.34	19.96

参考文献

[Bach 02] Bach, F. R. and Jordan, M. I.: Kernel independent component analysis, *J. Machine Learning Research*, Vol. 3, pp. 1–48 (2002)

[Bollen 89] Bollen, K. A.: *Structural equations with latent variables*, John Wiley (1989)

[Hyvärinen 01] Hyvärinen, A., Karhunen, J., and Oja, E.: *Independent Component Analysis*, Wiley Interscience (2001)

[Kawahara 11] Kawahara, Y., Shimizu, S., and Washio, T.: Analyzing relationships among ARMA processes based on non-Gaussianity of external influences, *Neurocomputing. Forthcoming.* (2011)

[Shimizu 06] Shimizu, S., Hoyer, P. O., Hyvärinen, A., and Kerminen, A.: A linear non-Gaussian acyclic model for causal discovery, *Journal of Machine Learning Research*, Vol. 7, pp. 2003–2030 (2006)

[Shimizu 11] Shimizu, S., Inazumi, T., Sogawa, Y., Hyvarinen, A., Kawahara, Y., Washio, T., Hoyer, P., and Bollen, K.: DirectLiNGAM: A direct method for learning a linear non-Gaussian structural equation model., *J. Machine Learning Research. Forthcoming.* (2011)