3H2-OS3-1

部分方向性組み合わせ論理の計算論的性質

Computational properties of Subdirectional Combinatory Logic

尾崎博子[*1]　戸次大介[*2]
Hiroko Ozaki　Daisuke Bekki

[*1*2]お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻
Graduate School of Humanities and Sciences, Advanced Science, Ochanomizu University

In recent years, formal grammars have served as a basis for robust parsing and other natural language processing tasks, and their validity as logical systems have been paid much attention. Subdirectional Combinatory Logic was proposed by [Bekki 10] to show the relation between Combinatory Categorial Grammar (CCG) and logical systems. Subdirectional Combinatory Logic is an extension of Combinatory Logic (CL) that distinguishes two directions of functional applications. The aim of this paper is to prove three computational properties (Subject-Reduction, Church-Rosser theorem, Normalization theorem) that are needed to show the validity of Subdirectional Combinatory Logic.

1. はじめに

言語処理の分野における形式的な文法理論として組み合わせ範疇文法 (CCG: [Steedman 00]) がある。CCG は頑健な構文解析に使われている一方で、言語学的には適切な制約を与えることが知られている。

[Bekki 10] では CCG と論理体系の関係を明らかにするために、部分方向性組み合わせ論理（Subdirectional Combinatory Logic）という形式体系を提案した。部分方向性組み合わせ論理は、組み合わせ論理 (CL) の拡張であり、ランベック計算のように関数適用の二つの方向性を区別する体系である。しかし、部分方向性組み合わせ論理の計算論的性質はまだ示されていない。

本研究の目的は、部分方向性組み合わせ論理の計算論的性質を明らかにすることである。[Bekki 10] では [Steedman 00] のコンビネータを用いて、CCG を部分方向性組み合わせ論理上の一体系として位置付けている。しかし、組み合わせ論理において成立するコンビネータ間の依存関係が、この論理においては方向性の区別により成立しない場合があるため、その場合を考慮に入れなければならない。

そこでまず始めに依存関係が成立するコンビネータの組み合わせを明らかにしたうえで、システムの正当性を示すために必要とされている 1) Subject-reduction、2) 合流性、3) 停止性、等の計算論的性質を証明する。

2. 部分方向性組み合わせ論理

部分方向性組み合わせ論理では、組み合わせ論理の関数適用の２つの方向性を区別する。例えば、組み合わせ論理におけるコンビネータ $\mathbf{K} : A \to (B \to A)$ には以下の４種類が対応する。

$$\mathbf{K}_{//} : (A/B)/A \quad \mathbf{K}_{\backslash/} : (A\backslash B)/A$$
$$\mathbf{K}_{/\backslash} : (A/B)\backslash A \quad \mathbf{K}_{\backslash\backslash} : (A\backslash B)\backslash A$$

(他のコンビネータについても同様)

連絡先: 尾崎博子，お茶の水女子大学大学院人間創成科学研究科理学専攻戸次研究室，東京都文京区大塚 2-1-1, ozaki.hiroko@is.ocha.ac.jp

このようにコンビネータに方向性を持たせることで、自然言語間の順番を記述できるように組み合わせ論理を拡張した論理を部分方向性組み合わせ論理と言う。

3. 構文、型規則、略記法

部分方向性組み合わせ論理の構文、型規則、略記法を以下のように定める。

構文　型 $\tau ::= \quad \gamma \mid \tau/\tau \mid \tau\backslash\tau$ 　(γ は型の要素)
　　　式 $\Lambda ::= \quad x \mid c \mid \Lambda^{\triangleright}\Lambda \mid \Lambda^{\triangleleft}\Lambda$ 　(c はコンビネータ)

型規則
$$(>)\frac{\Gamma \vdash M : A/B \quad \Delta \vdash N : B}{\Gamma, \Delta \vdash M^{\triangleright}N : A}$$
$$(<)\frac{\Delta \vdash N : B \quad \Gamma \vdash M : A\backslash B}{\Delta, \Gamma \vdash M^{\triangleleft}N : A}$$

略記法
$$\tau \between \sigma \quad \stackrel{def}{\equiv} \quad \tau/\sigma \quad \text{or} \quad \tau\backslash\sigma$$
$$M^{\triangleleft\!\triangleright}N \quad \stackrel{def}{\equiv} \quad M^{\triangleright}N \quad \text{or} \quad M^{\triangleleft}N$$
$$(<>) \quad \stackrel{def}{\equiv} \quad (<) \quad \text{or} \quad (>)$$

4. コンビネータの依存関係

[Bekki 10] では、コンビネータ $\mathbf{S}, \mathbf{B}$ は以下のように定められている。

S
$$S_{/} : (A/C)\backslash(B/C)\between(A\backslash B/C)$$
$$S_{\backslash} : (A\backslash C)/(B\backslash C)\between(A/B\backslash C)$$

B
$$B_{/} : (A/C)/(B/C)\between(A/B)$$
$$B_{\backslash} : (A\backslash C)\backslash(B\backslash C)\between(A\backslash B)$$

また、[Bekki 10] では、コンビネータ $\mathbf{K}$ は用いられていないが、コンビネータの依存関係を明らかにするために以下のように定める。

K　$K_{/} : (A/B)\between A \quad K_{\backslash} : (A\backslash B)\between A$

組み合わせ論理では $\mathbf{B}$ が $\mathbf{S}, \mathbf{K}$ から導出できることが知られているので、[Bekki 10] における $\mathbf{B}_{/}$ が $\mathbf{S}, \mathbf{K}$ から導出できるかを確かめてみると、図 1 より導出できないことが分かる。

そこで次のように $\mathbf{S}$ を変更すると、$\mathbf{B}_{/}$ が $\mathbf{S}_{/}, \mathbf{K}_{\backslash}$ から導出できることが分かる (図 2)。

$$\dfrac{K_{/} = ((A/B)/C)/(A/B) \qquad \dfrac{\dfrac{(A/C)/(B/C)\backslash((A/B)/C) \quad K_{/} = ((A/C)/(B/C)\backslash(A/B)/C)/(A/B)\between(A/C)/(B/C)\backslash((A/B)/C)}{((A/C)/(B/C)\backslash(A/B)/C)/(A/B)}(<>) \quad S_{/} = ((A/C)/(B/C)/(A/B))\backslash(((A/B)/C)/(A/B))\backslash(((A/B)/C)/(A/B))\between((A/C)/(B/C)\backslash(A/B)/C)/(A/B)}{((A/C)/(B/C)/(A/B))\backslash(((A/B)/C)/(A/B))\backslash(((A/B)/C)/(A/B))}(<>)}{B_{/} = (A/C)/(B/C)/(A/B)}(<)$$

図 1: $B_{/}$ の導出（失敗例）

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{S_{/} = (A/C)/(B/C)/((A/B)\backslash C) \quad K_{\backslash} = ((A/C)/(B/C)/(A/B)\backslash C)\backslash(A/B)\between(A/C)/(B/C)/((A/B)\backslash C)}{((A/C)/(B/C)/(A/B)\backslash C)\backslash(A/B)}(<>) \quad S_{/} = ((A/C)/(B/C)/(A/B))/(((A/B)\backslash C)/(A/B))\between((A/C)/(B/C)/(A/B)\backslash C)\backslash(A/B)}{((A/C)/(B/C)/(A/B))/(((A/B)\backslash C)/(A/B))}(<>) \qquad K_{\backslash} = ((A/B)\backslash C)/(A/B)}{B_{/} = (A/C)/(B/C)/(A/B)}(>)$$

$$\dfrac{K_{\backslash} = ((A/B)\backslash C)\backslash(A/B) \qquad \dfrac{\dfrac{S_{/} = (A/C)/(B/C)\backslash((A/B)\backslash C) \quad K_{/} = ((A/C)/(B/C)\backslash(A/B)\backslash C)/(A/B)\between(A/C)/(B/C)\backslash((A/B)\backslash C)}{((A/C)/(B/C)\backslash(A/B)\backslash C)/(A/B)}(<>) \quad S_{\backslash} = ((A/C)/(B/C)\backslash(A/B))\backslash(((A/B)\backslash C)\backslash(A/B))\between((A/C)/(B/C)\backslash(A/B)\backslash C)/(A/B)}{((A/C)/(B/C)\backslash(A/B))\backslash(((A/B)\backslash C)\backslash(A/B))}(<>)}{B_{/} = (A/C)/(B/C)\backslash(A/B)}(<)$$

図 2: $B_{/}$ の導出

<u>**S**</u>

$$S_{/} : (A/C)/(B/C)\between(A/B\backslash C)$$
$$S_{\backslash} : (A\backslash C)\backslash(B\backslash C)\between(A\backslash B/C)$$

$\mathbf{B}_{\backslash}$ についても同様であり、以上より依存関係が成立するコンビネータの組み合わせが明らかになった。

5. 簡約規則

部分方向性組み合わせ論理の簡約規則を次のように定める。

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{B}^{\lhd\!\rhd}_{/} f^{\rhd} g^{\rhd} x & \underset{CL}{\rightarrow} & f^{\rhd}(g^{\rhd} x) \\
\mathbf{B}^{\lhd\!\rhd}_{\backslash} f^{\lhd} g^{\lhd} x & \underset{CL}{\rightarrow} & f^{\lhd}(g^{\lhd} x) \\
\mathbf{S}^{\lhd\!\rhd}_{/} f^{\rhd} g^{\rhd} x & \underset{CL}{\rightarrow} & (f^{\lhd} x)^{\rhd}(g^{\rhd} x) \\
\mathbf{S}^{\lhd\!\rhd}_{\backslash} f^{\lhd} g^{\lhd} x & \underset{CL}{\rightarrow} & (f^{\rhd} x)^{\lhd}(g^{\lhd} x) \\
\mathbf{K}^{\lhd\!\rhd}_{/} x^{\rhd} y & \underset{CL}{\rightarrow} & x \\
\mathbf{K}^{\lhd\!\rhd}_{\backslash} x^{\lhd} y & \underset{CL}{\rightarrow} & x
\end{array}$$

6. Subject-Reduction

※以下の 3 章では証明の構想のみを述べる。なお、詳細については [尾崎・戸次 11] を参照。

Subject-Reduction とは以下のような性質である。

<u>Subject-Reduction</u>

$$\Gamma \vdash X : \tau \text{ で } X \underset{CL}{\rightarrow} X' \text{ の時、} \Gamma \vdash X' : \tau$$

つまり、この性質は簡約前と後で値の型が変わらないことを示している。この性質を部分方向性組み合わせ論理で証明するために、コンビネータ $\mathbf{K}, \mathbf{S}$ について簡約前後の型が一致するかを確かめる。証明方法は [Hindley 08] を参考にした。ここで $\mathbf{B}$ についてはコンビネータの依存関係より示す必要はない。

＜ $\mathbf{K}^{\lhd\!\rhd}_{/} X^{\rhd} Y \underset{CL}{\rightarrow} X$ の場合＞

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{K}_{/} : (x/y)\between x \quad X : x}{\mathbf{K}^{\lhd\!\rhd}_{/} X : x/y}(<>) \qquad Y : y}{\mathbf{K}^{\lhd\!\rhd}_{/} X^{\rhd} Y : x}(>)$$

簡約前後（$\mathbf{K}^{\lhd\!\rhd}_{/} X^{\rhd} Y$ と X）で型は x で変わっていない。

（他の $\mathbf{K}, \mathbf{S}$ についても同様）

以上より部分方向性組み合わせ論理における Subject-Reduction の性質を証明できた。

7. 合流性（Church-Rosser の定理）

合流性を示すためには以下の Church-Rosser の定理を証明すればよいとされている。

<u>Church-Rosser の定理</u>

$\twoheadrightarrow$ を 1 回以上の簡約とすると

$$X \twoheadrightarrow X_1, X \twoheadrightarrow X_2 \text{ ならば、}$$
$$\text{ある } Y \text{ について、} X_i \twoheadrightarrow Y \quad (i = 1, 2)$$

つまり、この性質は値のどこから簡約をかけても最終結果は同じになることを示している。

証明の準備としてまず以下の 3 条件を満たす関係 $\underset{CL}{\Rightarrow}$ （これ以降「並行変換」）を考える。

1. $X \underset{CL}{\rightarrow} Y$ ならば $X \underset{CL}{\Rightarrow} Y$
2. $X \underset{CL}{\Rightarrow} Y$ ならば $X \underset{CL}{\twoheadrightarrow} Y$
3. $X \underset{CL}{\Rightarrow} X_i$ $(i = 1, 2)$ ならば $X_i \underset{CL}{\Rightarrow} Y$ $(i = 1, 2)$

次に、簡約の並行変換を以下のように値の形ごとに定義する。

(C3) $K^{\lhd\!\rhd}_{/} M_1^{\rhd} M_2 \underset{CL}{\Rightarrow} N_1$ (ただし $M_1 \underset{CL}{\Rightarrow} N_1$)

(C4) $K^{\lhd\!\rhd}_{\backslash} M_1^{\lhd} M_2 \underset{CL}{\Rightarrow} N_1$ (ただし $M_1 \underset{CL}{\Rightarrow} N_1$)

(C5) $S^{\lhd\!\rhd}_{/} M_1^{\rhd} M_2^{\rhd} M_3 \underset{CL}{\Rightarrow} (N_1^{\lhd} N_3)^{\rhd}(N_2^{\rhd} N_3)$

(C6) $S^{\lhd\!\rhd}_{\backslash} M_1^{\lhd} M_2^{\lhd} M_3 \underset{CL}{\Rightarrow} (N_1^{\rhd} N_3)^{\lhd}(N_2^{\lhd} N_3)$
(ただし (C5),(C6) では $M_i \underset{CL}{\Rightarrow} N_i$ $(i = 1, 2, 3)$)

(C7) $M_1 M_2 \underset{CL}{\Rightarrow} N_1 N_2$ (ただし $M_i \underset{CL}{\Rightarrow} N_1$ $(i = 1, 2)$)

上のように定義した並行変換 $\underset{CL}{\Rightarrow}$ が条件 1, 2, 3, を満たすことを示し、合流性の証明とする。証明方法は [高橋 91] を参考にし、X の構成に関する帰納法を使った。

条件 1, 2 の証明は簡約規則と簡約の並行変換によって証明可能である。また、条件 3 の証明に際しては、X の簡約を同時に行った結果が順番に簡約を行った結果と一致することを示すために帰納法を用いる。

以上より部分方向性組み合わせ論理における合流性を証明できた。

8. 停止性（正規化定理）

停止性を示すには、正規化定理を証明すればよい。ここでは、強正規化性について証明を行う。強正規化性とは以下のような性質である。

強正規化性

$\vdash t : T$ ならば t は停止する

つまり、この性質は式の簡約が必ず有限ステップで停止するということを示している。まず、以下のような定義を設定する。

定義 1-1 $R_A(t)$ の時 t は停止する (A は基本型)

定義 1-2 $R_{T_2/T_1}(t)$ の時 t は停止し、
$R_{T_1}(s) \Rightarrow R_{T_2}(t^{\triangleright}s)$

定義 1-3 $R_{T_2\backslash T_1}(t)$ の時 t は停止し、
$R_{T_1}(s) \Rightarrow R_{T_2}(t^{\triangleleft}s)$

次に以下の補題を示す。

補題 2 $x_1 : T_1, \cdots, x_n : T_n \vdash t : T$ かつ
$v_1, \cdots, v_n$ について $R_{T_1}(v_1), \cdots, R_{T_n}(v_n)$ が
成り立つ時 $R_T([x_1 \mapsto v_1] \cdots [x_n \mapsto v_n]t)$

上の補題 2 が成り立つと強正規化性が証明できる。

証明方法は [Pierce 02] を参考にし、t の構成に関する帰納法を用いて証明した。

以上より部分方向性組み合わせ論理における強正規化性を証明できた。

9. まとめと今後の課題

本研究では部分方向性組み合わせ論理におけるコンビネータの依存関係を示し、システムの正当性を示すために必要な Subject-Reduction、合流性、正規化定理という 3 つの計算論的性質を証明した。

部分方向性組み合わせ論理では、構造規則が設定されていない。しかし、コンビネータと型規則で条件付きではあるが演繹定理が成立することが分かっている。演繹定理が成立すれば構造規則が成立することは証明可能であるので、この論理では構造規則の成立にある種の条件が必要であると考えられる。

今後の課題としては、部分方向性組み合わせ論理の妥当性が証明できたので、正規形（正規化した形）を計算しながら解析をする部分方向性組み合わせ論理の解析器の構築などを考えている。

参考文献

[Bekki 10] Bekki, D.: Combinatory Categorial Grammar as a Substructural Logic — Preliminary Remarks —, in *LENLS 7, JSAI International Symposia on AI 2010*, pp. 70–83 (2010)

[Hindley 08] Hindley, J. R. and Seldin, J. P.: *Lambda-Calculus and Combinators: an Introduction*, Cambridge University Press (2008)

[Pierce 02] Pierce, B. C.: *Types and Programming Languages*, The MIT Press (2002)

[Steedman 00] Steedman, M. J.: *The Syntactic Process (Language, Speech, and Communication)*, The MIT Press (2000)

[高橋 91] 高橋正子, 1991. 「計算論 — 計算可能性とラムダ計算 —」, 近代科学社.

[尾崎・戸次 11] 尾崎博子, 戸次大介. 2011. 「部分方向性組み合わせ論理の計算論的性質とその証明」, Technical Report of Department of Information Science, Ochanomizu University, OCHA-IS 10-2, February 7th, 2011.