

# オイラー図・ヴェン図を用いた図形推論の証明論的分析

A Proof-Theoretical Study on Diagrammatic Reasoning with Euler and Venn Diagrams

竹村亮 峯島宏次 佐藤有理 岡田光弘  
 Ryo Takemura Koji Mineshima Yuri Sato Mitsuhiro Okada

慶應義塾大学・文学部・哲学科  
 Department of Philosophy, Keio University

近年、論理学や哲学、AI研究、認知科学など様々な分野で、図形やグラフ表現に基づく推論の重要性が注目され、研究が行われるようになってきている。図形表現は、情報を視覚的に表現することでデータ理解の助けとなるだけでなく、視覚的なデータ操作を実現する手段としても期待される。本稿では、論理推論で用いられる基本的な図形表現のひとつであるオイラー図を中心に、図形推論の証明論を検討する。

## 1. はじめに

近年、論理学や哲学、AI研究、認知科学など様々な分野で、図形やグラフ表現に基づく推論の重要性が注目され、研究が行われるようになってきている。図形表現は、情報を視覚的に表現することでデータ理解の助けとなるだけでなく、視覚的なデータ操作を実現する手段としても期待される。なかでもオイラー図やヴェン図は、数学や論理学をはじめとして様々な場面でインフォーマルに用いられてきた基本的な図形表現であるが、形式的研究がなされるようになったのは1990年代になってからのことである。しかしこれまでの研究はオイラー図やヴェン図の表現形式の研究や意味論的研究が中心で、図形の操作についての証明論的研究はなされていない。こうした証明論的研究は、データ処理にかかわる多くの応用が期待でき、また同時に、図形表現を用いた定理証明系や証明支援系などを設計するための基本的計算モデルを与えることにもつながる。本稿ではこのような観点のもとでオイラー図推論の証明論を検討する。また、認知科学の観点からオイラー図推論とヴェン図推論を比較し、実際の推論における図形表現の有効性を議論する。

## 2. 領域ベースの図形の形式化：ヴェン図

近年、知識表現システムとしての述語論理に代わって、より自然言語に近い形式を持つ三段論法や記述論理が注目されている。三段論法などの基本的な論理推論にしばしば用いられてきたオイラー図では、推論に現れる名辞の間の論理的関係が、円の間の包含関係や排他関係などの位相的關係によって視覚的に表現される。例えば、「すべてのAはBである」という文は、Fig. 1の $D_1$ のように、AとBという二つの円の間の包含関係によって表現される。三段論法の二つの前提がオイラー図によって表現されると、三段論法推論はそれらの図に対する操作、特にそれらの図を合成しそこから結論となる情報を読み取るという操作に自然に置き換えることができる。例えば、「すべてのAはBである。すべてのBはCである。故にすべてのAはCである。」という三段論法はFig. 1のように表すことができる。しかし、このようなオイラー図に対する直観的な操作は、一般的に形式化するのに困難が伴い([2])、これまでオイラー図推論の証明論的研究は進められてこなかった。

オイラー図と並んでしばしば用いられる基本的な図形表現がヴェン図である。ヴェン図では、Fig. 3のようにすべての円が

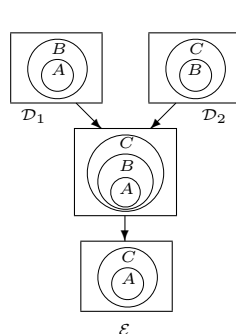


Fig. 1 オイラー図による三段論法推論

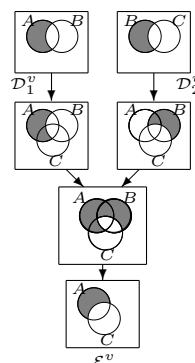


Fig. 2 ヴェン図による三段論法推論

互いに交差するような図が基本図として固定され、基本図は円の間のいかなる特定の関係も表現しないものとされる。円の間

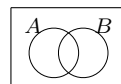


Fig. 3

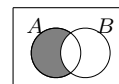
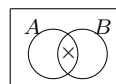


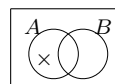
Fig. 4

「AであってBでないものはない」

の有意な関係は、オイラー図のように位相的關係ではなく、影 (shading) を用いて空な領域を指定することによって表現される。例えば「すべてのAはBである」という文は「AであってBでないものはない」と言い換えることができ、Fig. 4のように表現される。存在命題は、Peirce (1897) によって導入された「x」を用いて、空でない領域を指定することでFig. 5のように表わされる。



あるAはBである



あるAはBでない

Fig. 5 存在命題

図形に対する操作を推論規則として形式化する際に、平面図形の間の一貫性や平面図形の見やすさ等、推論規則にとって非本質的な複雑さが生じ得る。これを回避するために、図形のトークン (平面図) のレベルとタイプ (抽象的記述) のレベルという二つのレベルを区別することが重要となる。( [9] 参照。) 例えば Fig. 3の基本図は、Aの内側でBの外側にある領域 ( $z_1$ )、AとBの両方の内側にある領域 ( $z_2$ )、Bの内側

連絡先: {takemura,minesima,sato,mitsu}@abelard.flet.keio.ac.jp

で  $A$  の外側にある領域 ( $z_3$ )、 $A$  と  $B$  の両方の外側にある領域 ( $z_4$ ) の四つの最小領域から構成され、これらの各領域は、 $z_1 = (A, B)$ ,  $z_2 = (AB, \emptyset)$ ,  $z_3 = (B, A)$ ,  $z_4 = (\emptyset, AB)$  のように抽象的に記述することができる。こうしてヴェン図はタイプレベルでは領域の集合として  $\{(A, B), (AB, \emptyset), (B, A), (\emptyset, AB)\}$  のように抽象的に記述される。図形に対する推論規則は通常、このようなタイプレベルで形式化される ([3, 9])。

図形推論における最も重要な推論規則は、図形の合成規則である。二つのヴェン図を一つのヴェン図へと合成するには、Fig. 2 にあるように、まずその二つのヴェン図に含まれる円のラベルをそろえ、その上で影の領域を重ね合わせればよい。ヴェン図はオイラー図と比べて表現力が強く、また図形の合成操作を影の重ね合わせという単純な操作によって統一的に形式化できるという利点をもつ。このため、現在までヴェン図が図形推論研究において中心的に研究されてきた。形式的意味論と推論システムが与えられ、健全性、完全性、決定可能性といった基本的な性質が証明されている。([8, 9] 参照。)

他方でヴェン図では、Venn (1881) 自身が指摘しているように、円の数が少し増えただけで (円の数が 4 つの場合でさえ) 集合間の関係を視覚的に表わすという図形の利点が失われてしまう。これを回避するために、ヴェン図の影つきの領域を端的に存在しない領域 (missing region) とみなし、平面図としてはオイラー図とみなす試みもある (例えば [3])。しかしこのようなヴェン図に基づく領域ベースの図形の形式化の枠組みではやはり、図形の合成操作はヴェン図の合成操作を基に形式化されるため、Fig. 1 のようなオイラー図の直観的な推論プロセスを捉えることには成功していない。

### 3. 関係ベースの図形の形式化：オイラー図

領域ベースのヴェン図研究の枠組みに対して、[4, 6] では、Fig. 1 のようなオイラー図に対する自然な操作を推論規則として形式化することを目指し、オイラー図にとって本質的な位相的關係に基づいて図形を形式化する枠組みを提案した。この関係ベースの枠組みでは、図形のシンタクスとセマンティクスは二つの図形的対象の間に成り立つ包含関係 ( $\sqsubset$ ) と排他関係 ( $\sqsupset$ ) という二種類の位相的關係に基づいて定義される。

#### 3.1 オイラー図表現システム EUL と集合論的意味論

以下ではまず、関係ベースのオイラー図表現システム EUL とその集合論的意味論 [4, 6] について概説する。

**定義 1** EUL 図 ( $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ ) は、少なくとも二つの名前つき単純閉曲線 (以下単に円と呼び、 $A, B, C, \dots$  で表す) と名前つき点 (以下単に点と呼び、 $a, b, c, \dots$  で表す) からなる平面である。ここで、円および点はそれぞれ唯一の異なる名前を持つものとする。

以下、円と点を併せて図形的対象と呼び、 $s, t, u, \dots$  で表す。

**定義 2** EUL 関係とは異なる図形的対象の間の以下のような二項関係である。

$A \sqsubset B$	$A$ の内部が $B$ の内部の内にある
$A \sqsupset B$	$A$ の内部が $B$ の内部の外にある
$A \bowtie B$	$A$ と $B$ の内部が共通部分を持ち、どちらも包含関係にない
$b \sqsubset A$	$b$ が $A$ の内部の内にある
$b \sqsupset A$	$b$ が $A$ の内部の外にある
$a \sqsupset b$	$a$ が $b$ の外にある (つまり $a$ と $b$ は異なる位置にある)

**命題 3**  $\mathcal{D}$  を EUL 図とすると、 $\mathcal{D}$  の任意の異なる図形的対象  $s$  と  $t$  について、EUL 関係  $s \sqsubset t, t \sqsubset s, s \sqsupset t, s \bowtie t$  の内のちょうど一つが成り立つ。

命題 3 により、任意の EUL 図  $\mathcal{D}$  に対して、 $\mathcal{D}$  において成り立つ EUL 関係の集合はただ一つに定まる。その集合を  $\text{rel}(\mathcal{D})$  と表わす。また、 $\mathcal{D}$  の点の集合を  $\text{pt}(\mathcal{D})$ 、 $\mathcal{D}$  の円の集合を  $\text{cr}(\mathcal{D})$  とそれぞれ表わす。例えば、下の Fig. 6 の EUL 図  $\mathcal{E}$  の場合、 $\text{pt}(\mathcal{E})$  は  $\{a\}$ 、 $\text{cr}(\mathcal{E})$  は  $\{A, B, C\}$ 、 $\text{rel}(\mathcal{E})$  は  $\{A \bowtie B, A \sqsubset C, B \bowtie C, a \sqsupset A, a \sqsubset B, a \sqsupset C\}$  である。

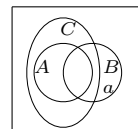


Fig. 6 EUL 図  $\mathcal{E}$

上の例に見られるように、一般に一つの図形において成り立つ EUL 関係は複数あり得るが、中でもちょうど一つの関係のみが成り立っている図形が存在する。例えば前節の Fig. 1 の  $\mathcal{D}_1$  は、 $\{A \sqsubset B\}$  という関係の集合によって抽象的に記述される。このような図形は、関係ベースの枠組みでは、一般の図形を構成する最小単位として考えることができる。

**定義 4** ちょうど一つの EUL 関係が成り立つ EUL 図は最小図と呼ばれ、 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  で表される。

EUL の意味論は、図が二項関係によって解釈されるという点で、図形表現システムに対する従来の意味論 (例えば [3] 等) とは異なる。EUL における点は特殊な円、即ち他の円を包含せず、また他の円と交差しない円とみなすことができ、これによって関係  $\sqsubset$  と  $\sqsupset$  をそれぞれ集合の間の包含関係および排他関係によって統一的に解釈することができる。

**定義 5** モデルとは順序対  $(U, I)$  のことであり、 $U$  は非空な集合、 $I$  は各図形的対象に対して  $U$  の非空な部分集合を割り当てる解釈関数である。特に任意の点  $a$  に対して  $I(a)$  はシングルトンであり、また任意の点  $a, b$  について  $I(a) \neq I(b)$  とする。

**定義 6**  $M = (U, I)$  が EUL 図  $\mathcal{D}$  のモデルである ( $M \models \mathcal{D}$  と表す) のは、以下の真理条件 (1) と (2) が成り立つときである。即ち  $\mathcal{D}$  の任意の図形的対象  $s, t$  に対して、

- (1)  $I(s) \subseteq I(t)$   $s \sqsubset t$  が  $\mathcal{D}$  で成り立つとき
- (2)  $I(s) \cap I(t) = \emptyset$   $s \sqsupset t$  が  $\mathcal{D}$  で成り立つとき

定義 6 から分かるように、 $\bowtie$  関係は EUL 図の真理条件には関わらない。 $s \bowtie t$  は排中律  $I(s) \cap I(t) = \emptyset$  or  $I(s) \cap I(t) \neq \emptyset$  を意味するものとして理解される。

以上のような図形に対するモデルの概念に基づいて、意味論的帰結の概念も通常の記号論理体系と同じように定義される。

#### 3.2 オイラー図推論体系 GDS

EUL 図に対する自然な操作は、Generalized Diagrammatic Syllogistic inference system GDS [6] において推論規則として形式化される。図形推論体系 GDS は、与えられた二つのオイラー図を合成して新たなオイラー図を得るための合成 (unification) 規則と、与えられたオイラー図から円や点を消去して新たなオイラー図を得るための除去 (deletion) 規則から構成されている。例えば、以下の Fig. 7 のような図形の合成操作について考えてみる。まず、 $\mathcal{D}_5$  と  $\mathcal{D}_6$  が合成され  $\mathcal{D}_5 + \mathcal{D}_6$  という図形が得られる。ここでは、 $\mathcal{D}_5$  と  $\mathcal{D}_6$  に共通する点  $c$  が同一視され、 $c$  を含むように  $B$  が  $\mathcal{D}_5$  に加えられている。特に、 $A$  と  $B$  の関係について何も新しい情報を生まないように、 $B$  は  $A$  と交差するように加えられる。 $\mathcal{D}_5 + \mathcal{D}_6$  はさらに  $\mathcal{D}_7$  と合成され、 $(\mathcal{D}_5 + \mathcal{D}_6) + \mathcal{D}_7$  が得られる。ここで、 $\mathcal{D}_7$  の  $A \sqsubset B$

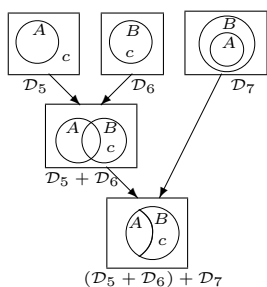


Fig. 7 EUL 図の合成

は、 $D_5 + D_6$  の  $A \bowtie B$  よりも意味論的に強い ( $A \bowtie B$  は特定の意味論的情報を持たない) ため、 $(D_5 + D_6) + D_7$  では、 $A \sqsubset B$  が保持されている。このようにして合成された図  $(D_5 + D_6) + D_7$  は、 $D_5, D_6, D_7$  の図形的情報を合わせた図となっている。

ここでは、最も基本的なオイラー図推論を形式化するために、合成規則に対して二種類の制約を課す。一つは「決定性の制約」であり、点の位置に関する選言の曖昧さを避けるための制約である。例えば Fig. 7 で、 $D_6$  と  $D_7$  を最初に合成することは許されない。何故なら点  $c$  の位置が  $A$  の内側か外側が決まらないためである。もう一つは、「図形的整合性の制約」であり、一つの図の中で矛盾した情報を表現するために生じる複雑さを避けるための制約である。<sup>\*1</sup> 例えば、Fig. 8 の  $D_8$  と  $D_9$  には合成規則を適用することができない。また  $D_{10}$  と  $D_{11}$  に対しても同様に、GDS では合成規則を適用することができない。何故なら我々の意味論 (定義 5) では、各円は非空な集合によって解釈され、 $D_{10}$  と  $D_{11}$  も矛盾するためである。

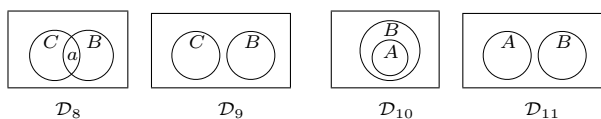


Fig. 8

EUL 図の合成規則は、二つの図の片方を最小図に限ることによって形式化される。これにより最小図を一つの命令と見なして、与えられたオイラー図を書き換えていく操作として合成規則を捉えることができるため、合成規則の操作的意味がより明確で理解しやすいものとなり、Fig. 1 に例示されるような推論プロセスを直接捉えることが可能となる。さらに、完全性定理 ([6]) から、一般図どうしの合成は、最小図に限定した合成規則によって捉えられることが保証される。

GDS の推論規則は EUL 関係を基に記述される。即ち、与えられた図  $D$  と最小図  $\alpha$  に対して、それを合成して得られる図  $D + \alpha$  の関係の集合  $\text{rel}(D + \alpha)$  が定義される。 $D + \alpha$  は  $D$  と  $\alpha$  が少なくとも一つの図形的対象を共有している場合に定義され、次の二つのグループに分けられる。(I)  $D$  と  $\alpha$  が一つの対象を共有している場合、その対象及び  $\alpha$  に成り立っている関係に応じて U1-U8 規則によって合成される。(I) の各規則には決定性の制約が課される。(II)  $D$  と  $\alpha$  が二つの円を共有している場合、 $\alpha$  に成り立っている関係に応じて U9 または U10 規則によって合成される。(II) の各規則には図形的整合性の制約が課される。ここでは紙幅の都合上、(I) の U7 と (II) の U9 規則のみを紹介する。その他の推論規則については [6] 参照。

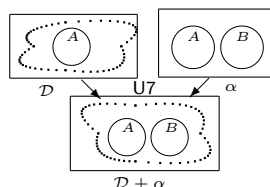
U7.  $A \sqcup B$  が  $\alpha$  に成り立っていて、 $A \in \text{cr}(D)$  のとき、任意の  $x \in \text{pt}(D)$  について  $x \sqsubset A$  が成り立つならば、 $D$  と  $\alpha$  は以

<sup>\*1</sup> 「図形的整合性の制約」の代わりに、Gentzen の自然演繹にあるような矛盾規則 (absurdity rule) を導入することも可能である。例えば [3] などはこのような規則を採用している。

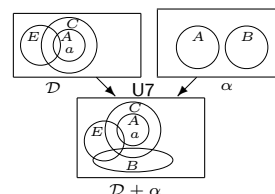
下の関係の集合から成る図  $D + \alpha$  に合成される。

$$\text{rel}(D) \cup \{A \sqcup B\} \cup \{x \bowtie B \mid A \sqsubset x \text{ or } A \sqcup x \text{ or } A \bowtie x \in \text{rel}(D)\} \\ \cup \{x \sqcup B \mid x \sqsubset A \in \text{rel}(D)\} \cup \{x \sqcup B \mid x \in \text{pt}(D)\}$$

U7 のスキーマ



U7 の適用例

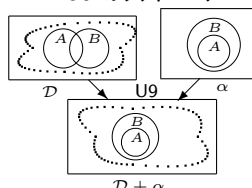


U7 規則は、 $D$  において円  $A$  の内側にないすべての円と交差するように、円  $B$  を  $D$  に加えるという操作を記述している。例えば U7 規則の適用例においては、 $D$  の円  $E$  および円  $C$  と交差するように円  $B$  が加えられている。

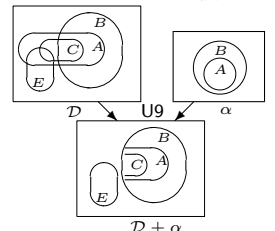
U9.  $A \sqsubset B$  が  $\alpha$  に成り立ち、 $A \bowtie B$  が  $D$  に成り立ち、また  $s \sqsubset A$  かつ  $s \sqcup B$  が成り立つ図形的対象  $s$  が  $D$  に存在しないとき、 $D$  と  $\alpha$  は以下のように  $D + \alpha$  に合成される。

$$(\text{rel}(D) \setminus \{A \bowtie B\} \setminus \{A \bowtie X \mid B \sqsubset X \in \text{rel}(D)\} \setminus \{A \bowtie X \mid B \sqcup X \in \text{rel}(D)\} \\ \setminus \{X \bowtie B \mid X \sqsubset A \in \text{rel}(D)\} \setminus \{Y \sqcup X \mid Y \sqsubset A, B \sqsubset X \in \text{rel}(D)\} \\ \setminus \{X \bowtie Y \mid X \sqsubset A, Y \sqcup B \in \text{rel}(D)\}) \\ \cup \{A \sqsubset B\} \cup \{A \sqsubset X \mid B \sqsubset X \in \text{rel}(D)\} \cup \{A \sqcup X \mid B \sqcup X \in \text{rel}(D)\} \\ \cup \{X \sqsubset B \mid X \sqsubset A \in \text{rel}(D)\} \cup \{Y \sqsubset X \mid Y \sqsubset A, B \sqsubset X \in \text{rel}(D)\} \\ \cup \{X \sqcup Y \mid X \sqsubset A, Y \sqcup B \in \text{rel}(D)\}$$

U9 のスキーマ



U9 の適用例



U9 規則は、 $A$  の輪郭及び  $A$  の内側にある任意の円の輪郭で、 $B$  の外側にある部分を消す、という操作を記述している。例えば U9 規則の適用例においては、 $A$  と  $C$  の輪郭で  $B$  の外側にある部分が消されている。

GDS は 3.1 節の意味論に対して完全であることが示される。

定理 7 (GDS の健全性と完全性 [6])  $D_1, \dots, D_n, \mathcal{E}$  を EUL 図の集合とし、また  $D_1, \dots, D_n$  はモデルを持つとする。 $\mathcal{E}$  が  $D_1, \dots, D_n$  の意味論的帰結であることと、 $D_1, \dots, D_n$  から  $\mathcal{E}$  への GDS の図形的証明があることは同値である。

### 3.3 EUL グラフ

EUL 図  $D$  に対する集合  $\text{rel}(D)$  は、 $\sqsubset$  関係を図形的対象上の反射推移的關係、 $\sqcup$  関係を非反射的対称的關係、とする順序集合とみなすことができる。そこで、順序集合に対する covering graph (ないし Hasse diagram) と呼ばれるグラフ表現に基づいて、EUL 図は EUL グラフと呼ばれる有向グラフと見なすことができる。例えば 3.1 節 Fig. 6 の  $\text{rel}(\mathcal{E})$  は、下の Fig. 9 のようなグラフによって表される。 $\sqsubset$  関係は  $\rightarrow$  辺によって、また  $\bowtie$  関係は辺が存在しないことによって表される。

このような EUL グラフは、EUL 図の構造を抽象的に把握するのに役立つだけでなく、グラフ理論に基づく [1] 等の平面図描画手法を応用することで、関係の集合として抽象的に定義された EUL 図から、平面図を再構成することを可能にする。

さらに EUL グラフは、下限や上限を導入することで自然に拡張することができる。そのようなグラフの拡張は、EUL に

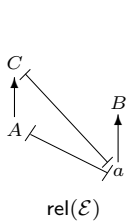


Fig. 9 EUL グラフ

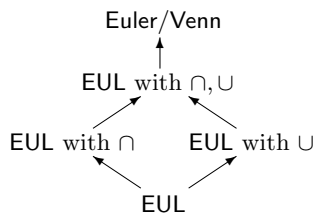




Fig. 10 EUL 図の階層

共通集合領域や和集合領域を図形的対象として加え、それらの間の位相的關係を取り扱うことに対応する。こうして得られる種々の拡張体系は、それぞれの論理的表現力によって、Fig. 10 のように階層付けることができる。最も基本的なシステムである EUL は三段論法推論を特徴付けるのに十分な表現力を持ち、共通集合領域や和集合領域など新たな図形的対象を導入することにより、一項述語論理と同等の表現力を持つ Euler/Venn 体系へと拡張される。また、この階層における図形推論体系はそれぞれ、保守的拡大の關係にあることが示される [5]。

#### 4. オイラー図推論とヴェン図推論の比較実験

オイラー図推論は、図形的対象の間の包含・排他關係によるより直観的な図形的操作に基づいているため、人が実際に行う推論においても効果的であると期待される。そこで我々は、オイラー図とヴェン図の三段論法における認知的効果を比較する行動実験を行った。被験者を言語グループ (45 名)、ヴェン図グループ (68 名)、オイラー図グループ (63 名) の 3 つに分け、教示に対する理解が確認された被験者について、計 31 題の三段論法課題に対するパフォーマンスを比較した。例えば、オイラー図グループの課題では、次のように三段論法の前提とそれに対応するオイラー図が与えられ、被験者は 5 つの選択肢の中から正解を選ぶ。

すべての B は A である。 

ある C は B である。 

1. すべての C は A である。
2. どの C も A でない。
3. ある C は A である。
4. ある C は A でない。
5. どれもでない。

(正解: 3)

ヴェン図グループにはオイラー図の代わりにヴェン図が与えられ、言語グループには言語推論課題のみが与えられた。

実験の結果は Fig. 11 に示される通りである。3 グループ間の推論課題の正答率について分散分析を行った結果、オイラー図グループの正答率は、ヴェン図グループよりも有意に高く、ヴェン図グループの正答率は、言語グループよりも有意に高かった。言語グループとヴェン図グループの差は、図が解釈上の効果をもち、図を用いることで課題文の誤解釈に基づく推論エラーが阻止されることを示唆している。一方、ヴェン図グループとオイラー図グループの差は、オイラー図の場合、解釈上の効果だけでなく、推論上の効果をも有し、結論を導く推論プロセスを図の合成というより具体的な図形操作として実現できることを示唆している。(実験の詳細な結果と分析については、[7] を参照。)

#### 5. まとめ

記号論理の観点からは一般に、図形は論理式に対応し、図形に対する操作は形式的体系における推論規則に対応する。このような観点に基づいて、関係ベースのオイラー図体系と領域ベースのヴェン図体系を、記号論理学の推論体系として比較すると表 1 のようにまとめることができる。関係の集合として

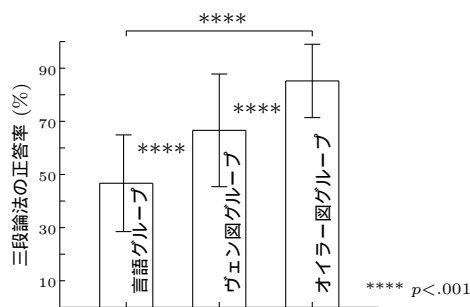


Fig. 11 3 グループの三段論法課題の平均正答率

定義されるオイラー図は含意結合子に基づく論理式に対応し、そのようなオイラー図に基づく図形推論体系は最小論理の自然演繹体系に対応する。他方で、領域の集合として抽象的に定義されるヴェン図は選言標準形の論理式に対応し、そのようなヴェン図に基づく図形推論体系は導出計算体系に対応する。

	オイラー図 (関係ベース)	ヴェン図 (領域ベース)
表現	自然演繹 位相的關係 含意論理式	導出計算 領域と影 (shading) 選言標準形論理式
推論	合成規則と除去規則 含意結合子に付随する規則	重ね合せ規則と消去規則 導出原理

表 1 オイラー図体系とヴェン図体系の比較

我々のオイラー図推論体系は、オイラー図の自然な推論プロセスを捉えているだけでなく、人の実際の推論においても効果的であることが分かった。また、この体系では、自然演繹体系の正規形証明の概念に基づいて、正規形のオイラー図証明を考えることができる ([6] 参照)。特にそのような正規形のオイラー図証明では、前提と結論となる図形に応じて、証明中に現れる円の数を制御することができる。このような正規形のオイラー図証明概念は、オイラー図に基づく証明支援系の設計においても中心概念となるものと考えられる。

#### 参考文献

- [1] J. Flower and J. Howse, Generating Euler Diagrams, *Proc. of Diagrams 2002*, LNAI, Springer, Vol. 2317, 61-75, 2002.
- [2] E. Hammer and S.-J. Shin, Euler's visual logic, *History and Philosophy of Logic*, 19, 1-29, 1998.
- [3] J. Howse, G. Stapleton, J. Taylor, Spider Diagrams, *LMS Journal of Computation and Mathematics*, Vol. 8, 145-194, London Mathematical Society, 2005.
- [4] K. Mineshima, M. Okada, Y. Sato, R. Takemura, Diagrammatic Reasoning System with Euler Circles: Theory and Experiment Design, *Proceedings of Diagrams 2008*, LNAI, Springer, Vol. 5223, 188-205, 2008.
- [5] K. Mineshima, M. Okada, R. Takemura, Conservativity for a hierarchy of Euler and Venn reasoning systems, *Proc. Visual Languages and Logic 2009*, CEUR, 510, 37-61, 2009.
- [6] K. Mineshima, M. Okada, and R. Takemura, A Diagrammatic Inference System with Euler Circles, submitted, 2009.
- [7] Y. Sato, K. Mineshima, R. Takemura, The efficacy of Euler and Venn diagrams in deductive reasoning: Empirical findings, to appear in *Proc. Diagrams 2010*.
- [8] S.-J. Shin, *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge University Press, 1994.
- [9] G. Stapleton, A survey of reasoning systems based on Euler diagrams, *Proc. Euler 2004*, ENTCS, 134(1) 127-151, 2005.