1E1-2

# 非古典論理のクリプキ・モデルに基づく列・多重集合・集合への様相演算子の導入とその画像・音楽処理への応用

# A Consideration of Modal Operators on Sequences, Multisets, and Naïve Subsets in Kripke Models for Non-classical Logics and Its Application to Image and Music Information

村井哲也[*1] Tetsuya MURAI　宮本定明[*2] Sadaaki MIYAMOTO　生方誠希[*1] Seiki UBUKATA　工藤康生[*3] Yasuo KUDO　赤間世紀[*4] Seiki AKAMA

[*1] 北海道大学 Hokkaido Univ.　[*2] 筑波大学 Univ. of Tsukuba　[*3] 室蘭工業大学 Muroan Institute of Tech.　[*4] C-リパブリック C-Republic

This presentation provides a consideration on representing the concepts of sequences, multisets, and usual subsets in the framework of Kripke semantics. First, a Carnap model, which is a tuple of a non-empty set of possible worlds and a valuation mapping, that is, a Kripke model without a binary relation on the nonempty set, is shown to represent, in general, a multiset, and in special case, a subset. Also sequences are represented by special kinds of Kripke models. Further, some applications to image and music information are described.

## 1. はじめに

多重(マルチ)集合および，列，通常の(部分)集合の概念を表現する数学的定式化として，代数的方法，族(写像)による方法，帰納的定義など種々のアプローチがある(cf.[Grassmann 1996]).

様相論理や直観主義論理など非古典論理の意味論を定式化するクリプキ・モデル[Bull 2001, Chellas 19802]は族(写像)の拡張と見なすことができる．本稿ではこの点に着目して，列と多重集合，通常の(部分)集合の概念を表現する族(写像)に基づく方法をクリプキ・モデルの枠組で再検討する.

このモデルは自然に多重集合を表現し，特別な場合として通常の(部分)集合を含み，世界の集合として自然数全体を取れば，自然に順序関係が2項関係として設定され，直観主義論理などのモデルとなり，これが列を表現する．その結果，これら3つの概念に対して，ラフ集合[Pawlak 1991]で扱う粒状性に関する近似に対応する様相演算子を統一的に定義できる.

画像や音楽への応用として，例えば，自然数集合の直積を取れば，有向集合になり，ディジタル画像を表現する．ディジタル画像には元の2次元ユークリッド空間の位相を2重に粒状化した位相が入り，4近傍や8近傍など画像処理における位相概念を表現できる.

また，クリプキ・モデルが表現する列は音楽のコード進行とみなすことができる．その結果，様相論理の必然性・可能性(対応する位相構造では，開核・閉包，ラフ集合では，下近似・上近似)による粒状計算を導入したコード進行の表現と生成を理解できる可能性がある.

## 2. 準備

### 2.1 多重集合

集合 A 上の多重集合(cf.[Miyamoto 2004])はカウント関数

$$\mathrm{Ct}: A \to \mathbb{N}$$

のことである．Ct(a)は A の要素 a が多重集合において出現する回数(重複度)を表す.

連絡先：村井哲也，北海道大学大学院情報科学研究科コンピュータサイエンス専攻数理計算科学講座，060-0814 札幌市北区北 14 条西 9 丁目，電子メイル：murahiko@main.ist.hokudai.ac.jp

A 上の多重集合 Ct, Ct'に対して,

$$\mathrm{Ct} = \mathrm{Ct}' \Leftrightarrow \forall a \in A(\mathrm{Ct}(a) = \mathrm{Ct}'(a)),$$

$$\mathrm{Ct} \subseteq \mathrm{Ct}' \Leftrightarrow \forall a \in A(\mathrm{Ct}(a) \le \mathrm{Ct}'(a))$$

によって，それぞれ，相等関係と包含関係(部分多重集合)が定義される．多重集合間の 2 項演算として，和集合，積集合，加算がある：

和集合 $(\mathrm{Ct} \cup \mathrm{Ct}')(a) = \max(\mathrm{Ct}(a), \mathrm{Ct}'(a))$,

積集合 $(\mathrm{Ct} \cap \mathrm{Ct}')(a) = \min(\mathrm{Ct}(a), \mathrm{Ct}'(a))$,

加算 $(\mathrm{Ct} + \mathrm{Ct}')(a) = \mathrm{Ct}(a) + \mathrm{Ct}'(a)$.

2つの集合 A,I に対して，写像

$$\varphi: I \to A$$

を A 上の I-族と呼び，I を A のインデックス集合という．I が有限集合の時，有限族という.

集合 A 上の I-族 φ においては，相異なるインデックス $i \neq j$ $(i, j \in I)$ に対して，$\varphi(i) = \varphi(j)$ となることが可能であるから，φ は一般に，A 上のマルチ集合と同等である.

集合 A 上の I-族 $\varphi: I \to A$ に対して，インデックス集合 I の任意の部分集合 J $(\subseteq I)$ に対して，φ の定義域を J への制限した写像 $\varphi|_J$ は A 上の J-族であり，φ の部分族と呼ぶ．部分族 φ' は族 φ の定義域を制限したものなので，同値類の要素数は減ることはあって増えることはない：

$$|[i]_{\sim\varphi'}| \le |[i]_{\sim\varphi}|.$$

すなわち，部分族は部分マルチ集合である.

A 上の I-族 φ 自身が単射である時は，任意の $i \in I$ について，$[i]_{\sim\varphi} = \{i\}$ であり，φ は A の部分集合と同等である．単射な族 φ の部分族 φ' は明らかに単射であるから，φ' は φ の通常の部分集合である.

インデックス集合 I として自然数の集合 ℕ を取り，自然数間の通常の全順序関係 ≤ を考えると，A 上の ℕ-族

$$s: \mathbb{N} \to A$$

は A 上の無限列である．A 上のℕ-族 s の部分族を s の部分列と呼ぶ．ℕ -族の有限部分族は A 上の有限列である.

### 2.2 クリプキ・モデル

記号の集合を P とする．例えば，命題論理では原子命題の集合となる．カルナップ・モデル(cf. [Bull 2001])とは組

$$\langle W, v \rangle$$

である．ここで，W は非空集合，v は次の写像

$v: P\times W\to 2$ (ただし, $2=\{0, 1\}$)

である. W の要素はしばしば可能世界と呼ばれる. 写像 v は様相命題論理では, 各原子命題の各世界における真理値(0 or 1)を与える.

カルナップ・モデルは様相論理 S5 (KT5) に対するモデルである. このモデルはクリプキらによって更に追究され, カルナップ・モデル$\langle W, v\rangle$ に W 上の2項関係 R ($\subseteq W\times W$) を追加した組

$\langle W, R, v\rangle$

を一般にクリプキ・モデル(cf.[Bull2001, Chellas 1980)と呼ぶ.

クリプキ・モデル$\langle W, R, v\rangle$ において, W の任意の部分集合 X ($\subseteq W$) に対する様相演算子, すなわち, 必然・可能の演算子がそれぞれ,

$[R]X=\{w\in W \mid W_w\subseteq X\}$,

$\langle R\rangle X=\{w\in W \mid W_w\cap X\neq\emptyset\}$

によって定義される. ここで,

$W_w=\{w'\in W \mid wRw'\}$

である. これらは位相空間[Sierpinsky 1956]ではそれぞれ, X の開核・閉包, ラフ集合論[Pawlak 1991]ではそれぞれ, (一般化)下近似・(一般化)上近似と呼ばれる.

W 上の2項関係 R が満たす条件(連鎖的, 反射的, 対称的, 推移的, euclid 的, 反対称的, 部分関数的, 有向的など)によって種々の様相論理や直観主義論理に健全 and/or 完全の意味で対応することが知られている.

## 3. クリプキ・モデルと多重集合

### 3.1 カルナップ・モデルと多重集合

記号の集合を P とする. カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$ は $2^P$ 上のマルチ集合と同等である. 実際, 写像 v から

$\varphi_M(w)=\{p\in P \mid v(p, w)=1\}$

によって, $2^P$ 上のマルチ集合($2^P$ 上の W-族)

$\varphi_M: W\to 2^P$

を構成できる. 逆に, $2^P$ 上の W-族$\varphi$ に対して, 明らかに

$v_\varphi(p, w)=1 \Leftrightarrow p\in\varphi(w)$

によって, カルナップ・モデル $M_\varphi=\langle W, v_\varphi\rangle$を構成できる.

[例] $P=\{p, q\}$, $W=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$とし, 写像 v が次の表

| v | p | q |
|---|---|---|
| $\alpha$ | 1 | 1 |
| $\beta$ | 1 | 0 |
| $\gamma$ | 1 | 0 |
| $\delta$ | 0 | 1 |

で与えられる時, カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$ から構成される 2P 上のマルチ集合 φM は次である:

$\{1/\{p, q\}, 2/\{p\}, 1/\{q\}\}$. (終)

集合 P の要素 $p(\in P)$に対して, 対応

$p\mapsto\{p\}$

によって, P をべき集合 $2^P$ に埋め込む. この時, カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$から導びかれるマルチ集合の像 $\varphi_M(W)$ について, $\varphi_M(W)\subseteq P$ が成り立つならば, カルナップ・モデル M は P 上のマルチ集合である.

[例] 「さいの目 k が出る」という事象 $e_k$ $(1\le k\le 6)$ に対して,

$P=\{e_k \mid k\in\mathbb{N}\wedge(1\le k\le 6)\}$

とする. さいころの場合は異なる $j\neq k$ に対して, 2つの事象 $e_j$, $e_k$ が同時に起こらないから, 各世界で真(1)となるのは P のいずれかの要素ただ一つである. 例えば, $W=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ とし, 写像 v は次の表

| v | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\beta$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\gamma$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\delta$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

で与えられる時, カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$ から P 上のマルチ集合 $\varphi_M$ が構成される:

$\{1/e_1, 2/e_2, 1/e_5\}$. (終)

カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$ が与えられた時, 任意の部分集合 $X(\subseteq W)$に対して,

$M_X=\langle X, v_X\rangle$

を M の部分カルナップ・モデルと呼ぶ. 部分カルナップ・モデルから導かれる $2^P$ 上のマルチ集合($2^P$ 上の X-族)

$\varphi_{M_X}: X\to 2^P$

は明らかに, $\varphi_M$ の部分マルチ集合である.

### 3.2 クリプキ・モデルと多重集合

前節ではインデックスの集合である W の要素間に関係を考えない, あるいは, すべて互いに関係する全体関係を持つと考えてもよい, カルナップ・モデルとマルチ集合との同等性を論じた. しかし, 2.2 節で述べたように, 一般に, A 上の W-族 $\varphi$ では同値関係$\sim_\varphi$ が自然に導ける. したがって, $2^P$ 上のマルチ集合(W-族) $\varphi$ はカルナップ・モデル $M\varphi$ に同値関係$\sim_\varphi$ を加えた Kripke モデル

$\langle W, \sim_\varphi, v\rangle$

で表現する方法も考えられる. これは様相論理 S5 (KT5) のモデルであり, $\sim\varphi$ による様相演算子は

$[\sim_\varphi]X=\{w\in W \mid W_w\subseteq X\}$,

$\langle\sim_\varphi\rangle X=\{w\in W \mid W_w\cap X\neq\emptyset\}$.

によって定義される. ここで,

$W_w=\{w'\in W \mid w\sim_\varphi w'\}$

である. これらの演算子の性質として, 以下が成り立つ:

$[\sim_\varphi]X\subseteq X\subseteq\langle\sim_\varphi\rangle X$,

$X\subseteq[\sim_\varphi]\langle\sim_\varphi\rangle X$,

$[\sim_\varphi][\sim_\varphi]X=[\sim_\varphi]X$,

$\langle\sim_\varphi\rangle[\sim_\varphi]X=\langle\sim_\varphi\rangle X$.

これら2つの様相演算子に基づいて, 部分マルチ集合の様相演算子を定義する. 集合 A 上の W-族 $\varphi$ と W の非空部分集合 $X(\subseteq W)$ に対して, 部分マルチ集合 $\varphi|_X: X\to 2^P$ を考える時, クリプキ・モデルでは, X から2つの部分集合$[\sim_\varphi]X$ と$\langle\sim_\varphi\rangle X$ が定義され, それぞれから部分マルチ集合が生成される:

$[\sim_\varphi]\varphi|_X=\varphi|_{[\sim\varphi]X}$,

$\langle\sim_\varphi\rangle\varphi|_X=\varphi|_{\langle\sim\varphi\rangle X}$.

この2演算子に関して, 以下が成り立つ:

$[\sim_\varphi]\varphi|_X\subseteq\varphi|_X\subseteq\langle\sim_\varphi\rangle\varphi|_X$,

$\varphi|_X\subseteq[\sim_\varphi]\langle\sim_\varphi\rangle\varphi|_X$,

$[\sim_\varphi][\sim_\varphi]\varphi|_X=[\sim_\varphi]\varphi|_X$,

$\langle\sim_\varphi\rangle[\sim_\varphi]\varphi|_X=\langle\sim_\varphi\rangle\varphi|_X$.

$2^P$ 上のマルチ集合 $\varphi$ が単射であれば, 同値関係$\sim\varphi$ は W 上の相当関係＝であり,

$\langle W, =, v\rangle$

は $2^P$ の部分集合である. これも S5 のモデルである. しかし, 相等関係に基づく S5 モデルでは,

$[\sim_\varphi]X=X=\langle\sim_\varphi\rangle X$

が成り立ち，様相演算子は消えてしまう．したがって，このモデルでは，集合の様相も縮退する:

$[\sim_\varphi]\varphi|_X = \varphi|_X = \langle\sim_\varphi\rangle\varphi|_X$.

[注] 本節のマルチ集合に関する観点から厳密には，A 上のマルチ集合(I-族) φ は単なる集合間の写像ではなく，終集合には相当関係という順序関係が入った

$\varphi: I \to \langle A, =\rangle$

であると考えるべきである．A 上の列の場合は

$s: \langle \mathbb{N}, \leq\rangle \to \langle A, =\rangle$

である．順序保存性などは入らない．(終)

命題論理では原子命題の集合 P から論理演算子¬(否定), ∧(連言), ∨(選言), →(含意), ↔(同値)を含む命題論理式の集合 $L_{PL}$ に拡張される．これに従って，写像 v も

$v: L_{PL} \times W \to 2$

に拡張される．よって，Kripke モデル $M = \langle W, \sim_\varphi, v\rangle$は $2^P$ 上のマルチ集合(W-族)から拡張した $2^{L_{PL}}$ 上のマルチ集合を表現する．

### 3.3 クリプキ・モデルと列

直観主義論理や時相論理では，2項関係を順序関係とする Kripke モデルで意味論を与えることができる．例えば，世界の集合として時点を表す自然数の集合ℕを取れば，2.4 節で述べたように，自然に全順序関係 ≤ を伴い，ℕ-族は無限列と同等であった．よって，Kripke モデル

$\langle \mathbb{N}, \leq, v\rangle$

は $2^P$ または $2^{L_{PL}}$ 上の列を表現する．後者の場合は論理式の集合列である．

[注] より正確に言えば，Kripke モデル $\langle \mathbb{N}, \leq, v\rangle$ でも同値関係 $\sim_{\varphi_M}$ は導かれるので，2つの到達可能関係を持つ多重様相の Kripke モデル

$\langle \mathbb{N}, \leq, \sim_{\varphi_M}, v\rangle$

である．(終)

## 4. 列と多重集合の様相演算子

集合 A 上に2項関係 $S(\subseteq A\times A)$ が定義される場合もインデックス集合 W に2項関係 $R_S$ を

$wR_Sw' \Leftrightarrow \varphi(w)S\varphi(w')$

によって導ける．一般に，インデックス集合 W 上に2項関係 R $(\subseteq W\times W)$が与えられたクリプキ・モデル$\langle W,R,v\rangle$において，部分多重集合の様相演算子を定義する．集合 A 上の W-族 φ と W の非空部分集合 $X(\subseteq W)$ に対して，部分多重集合

$\varphi|_X : X \to 2^P$

を考える．この時，クリプキ・モデルでは，X から2つの部分集合 [R]X と⟨R⟩X が定義され，それぞれから部分多重集合が生成される:

$[R]\varphi|_X = \varphi|_{[R]X}$,

$\langle R\rangle\varphi|_X = \varphi|_{\langle R\rangle X}$.

この定義は列にも適用できる．

## 5. 画像の表現と粒状化位相

自然数の順序集合(ℕ,≤) に対して，直積 ℕ×ℕ 上の 2 項関係を任意の(m,k), (m',k')∈ℕ×ℕ に対して

$(m,k) \leq (m',k') \Leftrightarrow m \leq m' \wedge k \leq k'$

によって定義すれば，(ℕ×ℕ, ≤) は有向集合である．

RGB によるカラー・ディジタル画像を考え，

$A = \{R,G,B\}$,

$256 = \{0,1, . . . ,255\}$

とおけば，有向集合(ℕ×ℕ, ≤)上の 256 値クリプキ・モデルで画像を表現できる:

$img = \langle \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq, v_{256}\rangle$

ここで，

$v_{256}: A\times \mathbb{N}\times \mathbb{N} \to 256$

は画像の高さを h，幅を w とする時，矩形部分集合

$[0,w)\times[0,h) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

で定義された部分写像である．写像 $v_{256}$ は次のように書き換えられるので，RGB によるカラー・ディジタル画像である:

$f_{256}: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to 256^A$,

ここで，$256^A = \{p \mid p: A\to 256\}$.

ディジタル画像は 2 次元ユークリッド平面 ℝ×ℝ上の矩形を量子化することで得られる．量子化はℝ×ℝ の分割を与える．この分割を与える同値関係を R とする時，

$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R} / R$

である．

一方，同値関係 R はℕ×ℕ における R-ラフ集合(上・下近似: 様相演算の集合版)[6]を導入できる．分割の要素(同値類)およびそれを基底として生成される集合はラフ集合の位相では閉かつ開(clopen)である．すなわち，ディジタル画像にはラフ集合の位相から導かれた離散位相が入る．

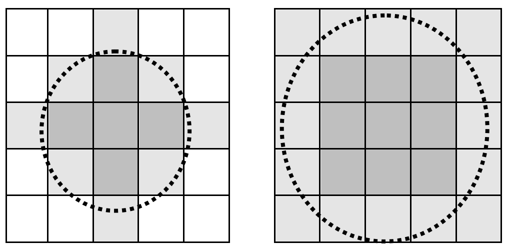
よって，位相空間(平面) ℝ×ℝ における通常 ε 開近傍 $B_\varepsilon(x)$の R による上・下近似を

$[R]B_\varepsilon(x) = \{p\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid p \subseteq B_\varepsilon(x)\}$,

$\langle R\rangle B_\varepsilon(x) = \{p\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid p \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset\}$

はディジタル画像における閉かつ開集合である．ここで，よって定義される．

これらの近似によって，4近傍，8近傍などを表現できる．次の図では，各セルは一つのピクセル，点線の円が中央のセルの中心からの ε 開近傍，濃い網掛け部分が下近似，それに薄い網掛けを付加した部分が上近似である:



中心から半径 ε を広げて行く時，一定の値で，ピクセルが下近似に含まれる．次図にその順を記入した:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 5 | 6 |
| 5 | 3 | 2 | 3 | 5 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 4 |
| 5 | 3 | 2 | 3 | 5 |
| 6 | 5 | 4 | 5 | 6 |

値2以下を取れば，4近傍，3以下を取れば8近傍である．これら値は距離をなさないが，適当な修正により距離にできる．

## 6. 音楽情報の表現

コードを表現するために，記号の集合 P を 12 音(オクターヴは同一視)の集合とし，コード名を可能世界集合 W とするカルナップ・モデル

$\langle W, v\rangle$

を考える．ここで，v：P×W→2 である．例えば，コード C,F,G は次のように表現される：

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | D♭ | | E♭ | | | G♭ | | A♭ | | B♭ | |
| | C | C# | D | D# | E | F | F# | G | G# | A | A# | B |
| W\P | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| C | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $G_7$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

ハ長調のダイアトニック･コードの例も示す：

| | C | C# | D | D# | E | F | F# | G | G# | A | A# | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W\P | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| C | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Dm | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Em | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| F | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $G_7$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Am | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $Bm^{-5}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

トライトーンの解決は次表の上の3つの世界から一番下の世界への移動として理解できる：

| | C | C# | D | D# | E | F | F# | G | G# | A | A# | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W\P | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $G_7$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $Bm_7^{-5}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $D^{\flat}m_7$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| C | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

次に，コード進行を表現するために，記号の集合 P をコード名の集合とし，時点を表す自然数の集合ℕを可能世界集合とするクリプキ･モデル

$\langle \mathbb{N}, \leq, v \rangle$

を考える．ここで，v：P×ℕ→2 である．コード進行「CFGC」の例を示す：

| v | C | Dm | Em | F | G | Am | Bm | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| : | | | | | | | | |

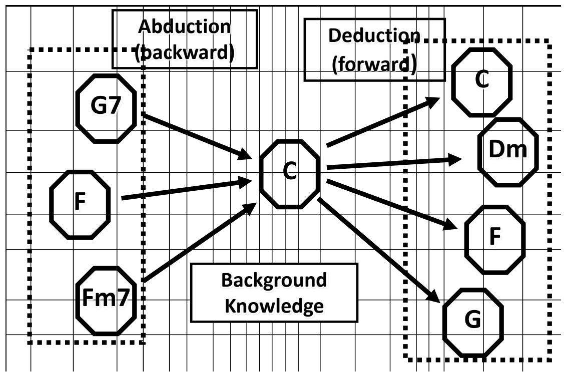
様相演算子は世界集合ℕとコード名の集合 P のそれぞれ両者に導入できる．世界集合ℕはいくつかのコード名の単位に分割できる．上例で各コード名に同じ拍が割り当てられているとし，例えば，簡単のため，コード名4個で一つの構造を作るとすると，ℕは同値類に分割される．その結果，高次のモデル(商モデル)を構成できる：

| v | C | Dm | Em | F | G | Am | Bm | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [0] | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| [4] | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| : | | | | | | | | |

これは GTTM(cf[Hirata 2008])における簡約化に対応すると考えられる．数学的には同値類の代表元は自由に選択できるが，簡約化としては，その結果でラベリングするのが妥当である．

一方，代理コードなどの存在から，コード名の集合 P にも様相の構造を入れることができる．例えば，カデンツ CFGC に対して，F の代わりに Dm を使える，などである．しかし，CFC の場合は代理として使えないという規則があるので，代理の関係はその時点以前の文脈に依存して決まる相対的様相になると考えられ，文脈を与えるものは背景知識とみなすことができる．

音楽の流れは，音楽の性格に対応する P の部分集合に対して，ある時点毎にそれらの文脈で形成される様相の下で得られる上または下近似から，次の時点のコード名を選ぶことで生成する意思決定過程として定式化できるであろう．




そこでは，通常の進行はデダクションとして，例えば，トゥー･ファイヴなどの導入によるコードの複雑な生成はアブダクションとして理解できる可能性がある．

## 文献

[Bull 2001] R.A.Bull and K.Segerberg, Basic Modal Logic. In D.M. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic: Vol.3 (2nd ed.), Springer, pp.1-82.

[Chellas 1980] B.F.Chellas, Modal Logic: an Introduction. Cambridge University Press.

[Grassmann 1996] W.K.Grassmann and J.-P. Tremblay, Logic and Discrete Mathematics: A Computer Science Perspective. Prentice-hall.

[Hirata 2008] 平田圭二, 東条敏, 浜中雅敏, 平賀譲: 道しるべ: 計算の視点から音楽の構造を眺めてみると(連載). 情報処理 Vol.49, No.7--11.

[Miyamoto 2004] S.Miyamoto, Generalizations of Multisets and Rough Approximations, International Journal of Intelligent Systems, Vol.19, pp.639-652.

[Pawlak 1991] Z.Pawlak, Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic Publishers.

[Sierpinski 1956] W.Sierpinski, General Topology, University of Toronto Press.