位相と推論 (1b)
Topology and Reasoning (1b)

村井 哲也 [1] 生方 誠希 [1] 工藤 康生 [2]
Tetsuya MURAI Seiki UBUKATA Yasuo KUDO

[1] 北海道大学 Hokkaido University
[2] 室蘭工業大学 Muroran Institute of Technology

In this series of presentation, we shall examine several relationships between reasoning and topological structures. Emphasis is put on pragmatics of topology, or, 'how to use topology' in reasoning processes. In this presentation, we deal with (1) a rough set structure induced from distance spaces, and (2) sequences (texts) and sets.

1. はじめに

標記のタイトルで今後しばらく，推論における「位相の使い方」に関して考察したいと計画した．数学の観点からは的外れであることを恐れながらも，既に 2 か所で拙い考察を発表させていただいた[Murai2009a, 2009b]．今回は第 3 回であるものの，位相という概念がなかなか厄介なので，考察が順調に進まないことを予想し，慎重に(1b)としている．

実際，著名な数学文化人森毅による位相の入門書[Mori2006](と言っても難しい)によると，数学的構造として，

代数構造： 演算の法則性
順序構造： 比較の法則性
位相構造： 近似の法則性

の 3 つが代表的である．最初の2つは比較的なじみやすいものの，第 3 の位相構造は大学でも数学科以外ではカリキュラムにはあまり登場しないようである．かつて大学の理工系学部では，教養の解析学で ε-δ 論法をたたきこまれ，それが事実上，位相の基礎を習得することにつながった．したがって，大学教育の現状では，工学系でさえ位相構造はなかなか理解の難しい対象である．

論理と位相の深い理論的関係については，例えば，[Tanaka2000]で知ることができる．しかし，本シリーズで扱うのは，厳密な演繹などの inference を含む広い意味での推論(reasoning)を対象とし，アブダクションなども扱う予定である．

本稿では，距離空間から生成されるラフ集合[Pawlak1982]の構造，および，列と集合に関して考察する．

2. ラフ集合と位相

全体集合を U とし，U 上の同値関係 R が与えられたとき，組

$\langle U,R\rangle$

を Pawlak 近似空間と呼ぶ．U の任意の部分集合 X に対して，R が生成する同値類$[x]_R$を使って，次の 2 種類の近似

$[R]X =\cup\{[x]_R \mid [x]_R\subseteq X\}$,
$\langle R\rangle X=\cup\{[x]_R \mid [x]_R\cap X\neq\emptyset\}$

を構成でき，それぞれ，下近似，上近似と呼ぶ．これら2つの近似のペア

$\langle [R]X, \langle R\rangle X\rangle$

を X の R に関するラフ集合と呼ぶ．一般に

$[R]X\subseteq X\subseteq\langle R\rangle X$

が成り立つ．U の部分集合が

$[R]X = X = \langle R\rangle X$

を満たすとき，R-定義可能集合と呼ぶ．異なる R を採ることで，基礎となる近似の粒度が変えることができる．

なお，U 上の関係を同値関係に限定せず，一般に2項関係とする$\langle U,R\rangle$は一般化近似空間[Yao1997]と呼ばれる．

Pawlak 近似空間<U,R>は同値関係を持つ Kripke フレームそのものであり，様相論理[Chellas1980]と表裏一体である．Kripke フレームの拡張である Scott-Montague(近傍)フレームは位相空間の拡張でもあり，ラフ集合との関係も含めて，詳細は拙稿[Murai2003]を参照されたい．

更に，Pawlak 近似空間<U,R>はそれ自体が位相空間である．実際，R-定義可能集合とそれらの和集合は開集合であり，閉集合でもあり，clopen な位相を与える．

以下では，この位相から離れて，距離空間において，ラフ集合の構造を生成する一考え方を述べる．

位相空間[Ichiraku2008]の定義は周知の通り，開集合，閉集合，近傍系などいくつかの異なる定義があり，互いに同値である．ここでは近傍系 N を用いる：

$F = \langle U, N\rangle$.

近傍系 N: $U\to P(P(U)$は次の条件が要求される．すなわち，U の点 p，U の部分集合 X, Y について，

(1) $U\in N(x)$
(2) $X\in N(x) \Rightarrow x\in X$
(3) $X,Y\in N(x) \Rightarrow X\cap Y\in N(x)$
(4) $X\in N(x)$ and $X\subseteq Y \Rightarrow Y\in N(x)$
(5) $X\in N(x) \Rightarrow \exists Y\in N(x)[Y\subseteq X$ and $\forall y(y\in Y \Rightarrow X\in N(y))]$

である．

距離空間(U,d)では点 $p\in U$ の ε-開近傍(半径 ε の開球)を直観的に自然に定義できる：

$B_\varepsilon(p)=\{x \mid d(p, x)<\varepsilon\}$

これを使って，近傍を定義できる：

$X(\subseteq U)$：点 $x\in U$ の近傍 $\Leftrightarrow \exists\,\varepsilon>0\ (B_\varepsilon(x)\subseteq X)$

逆に，これら近傍から構成される近傍系に対して，ε-開近傍全体を基本近傍系と呼ぶ．近傍全体を扱うより，こちらのほうがパラメタ付けられていて扱いやすい．

基本近傍系の取り方は，ε-開近傍以外にも存在する．ε-開近傍ではパラメタが連続濃度である．そこで，例えば，自然数 n と実定数α>0 を用いてα/n-開近傍

$B_{\alpha/n}(p)=\{x \mid d(p, x)<\alpha/n, n\in\mathbb{N}\}$

を考えれば，それら全体は基本近傍系となり，パラメタは可算濃度である．

連絡先：村井哲也，北海道大学大学院情報科学研究科コンピュータサイエンス専攻情報解析学研究室，060-0814 札幌市北区北14条西9丁目，murahiko@main.ist.hokudai.ac.jp

α/n-開近傍を設定すれば，全体集合 U 及び各 n のα/n-開近傍で差集合を取ることにより同値類を構成できる．すなわち，差集合

$B_{\alpha/n}(p) - B_{\alpha/(n+1)}(p)$

はドーナツ型の集合となる．最小の同値類は一点{p}である．同一のドーナツ型集合内の 2 点に関係 R_B^{α}があると定義すれば，同値関係となる．よって，距離空間 U の任意の部分集合 X に対して，ラフ集合

$([R_B^{\alpha}]X, \langle R_B^{\alpha}\rangle X)$

を構成できる．

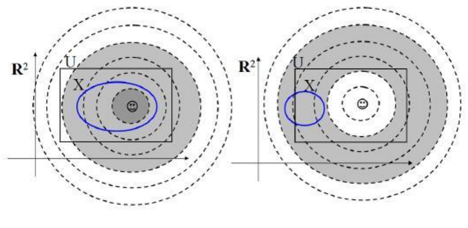

図 1: 近傍系 $B_{\alpha/n}$ によるXのラフ集合

実定数αの与え方によって粒度が異なる近似空間を生成できる．

3. 列と集合

論理における推論(inference)は，形式的証明，すなわち，ある条件を満たす論理式の列として表現される．例えば，

p, p→q, q

は列の最初の 2 つの論理式から，推論規則 MP(モダス・ポネンス)を使って，第 3 の式を導いている．

一般に，列はその構成要素の出現する順序と回数に意味がある．その意味では，オカランス列としてのテクストも該当する．順序を無視するとバッグ(マルチ集合)という概念になる．さらに，回数も無視すると，通常の集合概念が得られる．回数を無視し，順序を無視しない概念は今のところ私は知らない（何度か共同研究をした論理学者赤間世紀氏も聞いたことがないと語った）．しかし，お一人様1個限り販売します，という場合は，並んだ順序は無視できず，しかし，2回以上並んだ人は無視されるので，現実に存在する概念である．これはn回まで可能いう形式に一般化できる．

順序 \ 回数	回数に意味	回数を無視
順序に意味	列(テクスト)	?
順序を無視	バッグ	集合

これらの場合の数を計算する方法は高校数学以来，なじみ深いものが対応することは，当たり前ではあり，一方．興味深くもある．一番基本となると思われる順列に相当する概念が現状では見当たらないからである．

順序 \ 回数	回数に意味	回数を無視
順序に意味	重複順列	順列
順序を無視	重複組合せ	組合せ

4. おわりに

近傍系はあくまで，近傍の構造を数学的に記述したものであって，一度，位相を設定した世界では自然法則のように働く神の如し存在である．実際の応用においては，コンテクストに応じて，近傍を一つ選択して利用・行動しなければならない．その選び方が位相の使い方であり，位相の pragmatics と呼んでよいと思われる．

非集中システム[Resnick2001]という考え方が提唱され，マルチエージェントなどにも応用されている．伸縮する近傍を使ったエージェント同士の小競り合いを制御の原理にすることが考えられ，更に，推論の場合でも，同様な定式化ができないか，今後の検討課題である．

続報は以下を予定している：

(1c) 第 25 回ファジィシステムシンポジウム 2009.7

(2) 第 11 回感性工学会大会 2009.9

謝辞 本研究の一部は平成 21 年度日本学術振興会科学研究費挑戦的萌芽研究(19650046: 代表)および基盤研究(B)(19300074: 分担)の援助を受けて行った．

文献

[Chellas1980] B.F.Chellas: Modal Logic: An Introduction. Cambridge University Press, 1980.

[Ichiraku2008] 一樂重雄: 意味がわかる位相空間論．日本評論社, 2008

[Mori2006] 森毅: 位相のこころ．筑摩書房, 2006.

[Murai2003] T.Murai, G.Resconi, Y.Sato: A Note on Rough Sets, Neighborhood Systems and Scott-Montague Models for Modal Logic. Bulletin of International Rough Set Society, Vol.7, No.1/2, pp.3-7, 2003.

[Murai2009a] 村井哲也: 位相と推論(0)．感性フォーラム札幌 2009 講演予稿集, 日本感性工学会, 2009.

[Murai2009b] 村井哲也: 位相と推論(1a)．日本感性工学会第 5 回春季大会, 大阪, 2009.

[Tanaka2000] 田中俊一: 位相と論理．日本評論社, 2000.

[Resnick2001] M.Resnick: 非集中システム．コロナ社. 2001.

[Pawlak1982] Z.Pawlak: Rough Sets. Int. J. Computer and Information Sciences, Vol.11, pp.341-356, 1982.

[Yao1997] Y.Y.Yao, S.K.M.Wang, and T.Y.Lin, A Review of Rough Set Models. In T.Y.Lin and N.Cercone(eds.), Rough Sets and Data Mining, Kluwer, pp.47-75, 1997.