

## 高次元ダイナミクスシステムのフィルタリング手法の提案

A Filtering-based Identification Method for High Dimensional Dynamic Systems

グエン ベトフォン\*1  
VietPhuong Nguyen鷲尾 隆\*1  
Washio Takashi中野 慎也\*2  
Shinya Nakano上野 玄太\*2  
Genta Ueno中村 和幸\*2  
Kazuyuki Nakamura樋口 知之\*2  
Tomoyuki Higuchi

\*1大阪大学産業科学研究所

The Institute of Scientific and Industrial Research, Osaka University

\*2統計数理研究所

The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo

This paper assesses a new approach for filtering-based identification of high dimensional dynamic systems. The performance of the proposed approach is evaluated by artificially generated data.

## 1. はじめに

様々な応用分野において、対象となるダイナミックシステムを解析して理解することは、システムの制御、管理、異常診断などに不可欠なタスクとなっている。従って、ダイナミックシステムの同定は統計学における重要な研究テーマとなっている。ダイナミックシステムのフィルタリングとは、ノイズを含んだ観測時系列データから、状態揺らぎを含む対象システムの直接に観測できない状態を推定し、ダイナミックシステムの正確な状態を再現しようとするものである。対象システムの性質に応じて、様々なフィルタリングアルゴリズムが提案されて使い分けられている。ダイナミクスが線形と仮定でき、状態確率密度がガウス確率密度と仮定できる場合、Kalman Filter[Kalman 1960]がよく使われる。しかし、線形ダイナミクスと考えられる実際の物理現象や社会システムは限られるので、Kalman Filterの適用性はそれほど大きくない。非線形のダイナミクスを線形方程式で近似する Extended Kalman Filter[Julier 1997]も提案されているが、非線形性が強いシステムを対象とする場合には、精度があまり良くないことが知られている[Evensen 1992]。

一方、一般的な非線形システムの状態推定のため、状態確率密度を粒子と呼ばれる実現値の集合(アンサンブルという)により近似する方法が考えられている。この方法論の中で、最初に提案されたのは Ensemble Kalman Filter[Evensen 1994]であるが、状態と観測値との関係が線形であるという前提が必要である。更に、Kalman filterの基本原則が使われているため、複雑な行列計算が多く含まれ、計算量が大きいという欠点も有する。そこで、状態と観測値との関係が非線形でも適用可能なもっと単純な手法として Particle Filter(PF)[Kitagawa 1993]が提案された。PFでは粒子集合および各粒子の観測値に対する尤度を計算し、この尤度と比例する確率でのリサンプリングにより、尤度が低い粒子を枝狩りし、尤度が高い粒子を重複し、状態確率密度を近似的に表す粒子集合を得る。しかし、尤度と比例する確率でのリサンプリングを何度も行うことにより、粒子集合の多様性がなくなり状態確率密度の近似精度が落ちるといふ、いわゆる degeneration 問題を生じる。直接この問

題を回避する方法は粒子数を増やすことであるが、粒子数を増やすと全体の計算量が増大し、扱いが困難となる。これに対して、近年、効率的に degeneration 問題を軽減する手法として Merging Particle Filter(MPF)[Nakano 2007]が提案された。MPFでは、粒子の尤度と比例するリサンプリングを複数回行い、重み付きの線形結合を取り、状態確率密度を近似する粒子集合の多様性を維持する。しかし、重み付きの線形結合により、粒子集合とその尤度に反映される状態確率密度の平均と共分散の情報が保持されるが、状態確率密度が著しく非ガウスである場合、十分な精度で確率密度を保持することが困難となり、状態推定精度が低下してしまう可能性がある。

以上を背景として、本研究では PFの基本原則を拡張し、状態確率密度を精度良く近似しながら粒子の配置を最適化し、高精度な期待平均状態推定(マージナル状態推定)を行う(PAI)-PF(PDF Preserving Approximation and Intensive Particle Filter)手法を提案する。-PFでは粒子の配置を任意に変更しても状態確率密度を保持できる方法を用い、更に粒子配置を状態確率密度を精度良く近似できるように最適化して、一般に PFや MPFよりも少ない粒子数で高い精度の状態推定を得る。本稿では幾つかの状態推定実験を行って -PFの性能を示す。

更に、別の問題として、高次元状態空間システムを対象とする状態推定が挙げられる。本研究では理論的解析により、PFの基本原則を用いる手法のこの問題に対する適用限界を示す。そして、以上の条件下でも PFや MPFと異なり、-PFは主に観測過程による最適推定を通じて妥当な状態推定を行うことができることを数値評価実験を通じて示す。

## 2. 開発手法(-PF)の原理

## 2.1 対象表現: 状態空間モデル

一般的に状態空間モデルは以下の二つの方程式で定義される。

$$X_t = F(X_{t-1}, U_t) \quad (1)$$

$$Y_t = H(X_t, V_t) \quad (2)$$

$X_t \in \mathbb{R}^N$ ,  $Y_t \in \mathbb{R}^M$  はそれぞれ時刻  $t(t = 1, 2, \dots, T)$  における次元  $N$  の状態ベクトル、次元  $M$  の観測ベクトルであり、 $U_t \in \mathbb{R}^{N_U}$ ,  $V_t \in \mathbb{R}^{M_V}$  はそれぞれ次元  $N_U$  のシステムノイズベクトル、次元  $M_V$  の観測ノイズベクトルである。本稿で、状態ベクトルを状態といい、観測ベクトルを観測値という。F は状態の時間遷移を表す演算子であり、H は状態と観測値の関係を表す演算子である。(1) はシステム過程の方程式といい、(2)

連絡先:

氏名: Nguyen Viet Phuong

所属: 大阪大学産業科学研究所

住所: 大阪府茨木市美穂ヶ丘 8-1

電子メールアドレス: vphuong@ar.sanken.osaka-u.ac.jp

は観測過程の方程式と呼ばれる。本稿ではこの状態空間モデルで良く表現できる対象システムの場合を考える。

## 2.2 状態確率密度の近似

-PF は PF の基本的な原理を用い、粒子により状態確率密度を近似する概念を考える。

定義 1: 状態確率密度の  $\delta$ -関数近似 状態  $X \in \mathbb{R}^N$  の確率密度を  $p(X)$  とする。標準的な PF では、 $p(X)$  を粒子集合  $Q \subset \mathbb{R}^N$  および各粒子重みに基づき、 $\delta$ -関数を用いて以下のように近似する。

$$p(X) \approx p^\delta(X|Q) = \sum_{i \in Q} w(X^{(i)}|Q) \delta(X - X^{(i)}).$$

但し、 $X^{(i)}$  は  $i$  番目粒子の状態を表す。ここで、 $w(X^{(i)}|Q)$  は  $i$  番目の粒子重みであり、標準的な PF では、粒子  $i$  の重みは粒子  $i$  の観測値との適合度合いを表す尤度から計算される [Nakano 2007]。この  $p^\delta(X|Q)$  を、状態確率密度の  $\delta$ -関数近似と定義する。

定義 2: 状態確率密度の超球カーネル関数近似 粒子集合  $Q \subset \mathbb{R}^N$  を用いて状態確率密度を近似することを考える。粒子集合  $Q$  の下で、状態  $X \in \mathbb{R}^N$  の近傍  $N$  次元空間  $V(X|Q) \subset \mathbb{R}^N$  に含まれる近傍粒子集合  $N(X|Q) \subseteq Q$  及びその近傍体積  $|V(X|Q)| \in \mathbb{R}$  が与えられた時、状態  $X$  の確率密度  $p(X)$  を以下のように近似する。

$$\begin{aligned} p(X) &\cong p(X|Q) = \frac{1}{|V(X|Q)|} \int_{V(X|Q)} p(X') dX' \\ &\cong p^n(X|Q) = \frac{1}{|V(X|Q)|} \int_{V(X|Q)} p^\delta(X'|Q) dX' \\ &= \frac{1}{|V(X|Q)|} \int_{V(X|Q)} \sum_{i \in Q} w(X^{(i)}|Q) \delta(X' - X^{(i)}) dX' \\ &= \frac{1}{|V(X|Q)|} \sum_{i \in N(X|Q)} w(X^{(i)}|Q). \end{aligned}$$

但し、状態  $X$  の近傍  $N$  次元空間  $V(X|Q)$  は  $\mathbb{R}^N$  中で  $X$  から距離以内の空間 (半径  $\varepsilon$  の  $N$  次元超球) とし、その内部に存在するの粒子集合を  $X$  の近傍粒子集合とする。

$p^n(X|Q)$  は  $N$  次元空間における  $X$  を中心とした半径  $\varepsilon$  の  $N$  次元超球空間を切り取り、この空間内に含まれる粒子重みを平坦化したものなので、 $p^n(X|Q)$  を状態  $X$  の確率密度  $p(X)$  の超球カーネル関数近似と定義する。

## 2.3 状態確率密度の保存近似

状態  $X$  における確率密度  $p(X)$  の粒子集合  $Q \subset \mathbb{R}^N$  による超球カーネル関数近似  $p^n(X|Q)$  を、 $p(X)$  の別の粒子集合  $Q' \subset \mathbb{R}^N$  による超球カーネル関数近似  $p^n(X|Q')$  により近似的に保存することを考える。即ち、各粒子  $i \in Q'$  が表す状態  $X^{(i)}$  の確率密度  $p(X^{(i)})$  の超球カーネル関数近似  $p^n(X^{(i)}|Q')$  が、粒子集合  $Q$  の下での超球カーネル関数近似  $p^n(X^{(i)}|Q)$  と等しくなるように、各粒子  $i \in Q'$  の重み  $w(X^{(i)}|Q')$  を次のように決定する。

各粒子  $i \in Q'$  の状態  $X^{(i)}$  に置く  $Q$  の下での超球カーネル関数近似は  $p^n(X^{(i)}|Q) = \frac{1}{|V(X^{(i)}|Q)|} \sum_{k \in N(X^{(i)}|Q)} w(X^{(k)}|Q)$

であり、同じ各状態  $X^{(i)}$  の  $Q'$  の下での超球カーネル関数近似は  $p^n(X^{(i)}|Q') = \frac{1}{|V(X^{(i)}|Q')|} \sum_{k \in N(X^{(i)}|Q')} w(X^{(k)}|Q')$  である。

各粒子  $i \in Q'$  での確率密度の保存近似条件  $p^n(X^{(i)}|Q) = p^n(X^{(i)}|Q')$  とすると

$$\frac{|V(X^{(i)}|Q')|}{|V(X^{(i)}|Q)|} \sum_{k \in N(X^{(i)}|Q)} w(X^{(k)}|Q) = \sum_{k \in N(X^{(i)}|Q')} w(X^{(k)}|Q')$$

である。以上より、 $Q'$  の各粒子  $i$  の重み  $w(X^{(i)}|Q')$  は連立方程式  $P = AW$  の解で与えられる。ここで、 $W = [w(X^{(i)}|Q') | i \in Q']^T$  であり、

$$P = \left[ \frac{|V(X^{(i)}|Q')|}{|V(X^{(i)}|Q)|} \sum_{k \in N(X^{(i)}|Q)} w(X^{(k)}|Q) | i \in Q' \right]^T \text{ である。}$$

$A$  は  $|Q'| \times |Q'|$  行列であり、 $A = [a_{ij} | j \in N(X^{(i)}|Q'), a_{ij} = 1, \text{ otherwise } a_{ij} = 0 | i \in Q']$  で与えられる。

## 2.4 集約サンプリングインポートンスリサンプリング

前節で説明した状態確率密度の保存近似を用いて、サンプリングインポートンスリサンプリング [Kitagawa 1993] を拡張し、確率密度保存集約サンプリングインポートンスリサンプリング (PDF Preserving Approximation and Intensive Sampling Importance Resampling: (PAI)-SIR) という新しいサンプリング方法を提案する。粒子集合  $Q$  及びその各粒子  $i \in Q$  の状態  $X^{(i)}$  とその重みを  $w(X^{(i)}|Q)$  が与えられた時、以下の 3 ステップにより確率密度を保存しながら尤度の高い状態を優先的に探索するインポートンスリサンプリングを行う。

$$\begin{aligned} &[Q^I, \{X^{(i)} | i \in Q^I\}, \{w(X^{(i)}|Q^I) | i \in Q^I\}] \\ &= -\text{SIR}(Q, \{X^{(i)} | i \in Q\}, \{w(X^{(i)}|Q) | i \in Q\}) \end{aligned}$$

Intensive step:  $Q$  中で任意の  $\alpha | Q| (0 \leq \alpha \leq 1)$  個の粒子を集合  $Q^\alpha (|Q^\alpha| = \alpha |Q|)$  とする。 $Q^\alpha$  の各粒子  $i$  の状態  $X^{(i)}$  を初期値として、各々最急降下法により  $w(X^{(i)}|Q)$  が最大となる  $X^{(i)}$  を導出し、 $\alpha |Q|$  個の粒子からなる集合  $Q'^\alpha$  を得る。そして、 $Q' = Q - Q^\alpha + Q'^\alpha (|Q'| = |Q|)$  を得る。

PDF Preserving Approximation step: 粒子集合  $Q$  が表す確率密度を粒子集合  $Q'$  が表す確率密度により保存することを考える。 $Q$  と  $Q'$  の間に節 2.3 で説明した確率密度の保存近似を適用し、各粒子  $i \in Q'$  の重み  $w(X^{(i)}|Q')$  を得る。

Importance Resampling step: 各粒子  $i \in Q'$  を重み  $w(X^{(i)}|Q')$  の大きさに比例した確率でリサンプリングすることを  $|Q|$  回繰り返す、集合  $Q^I (|Q^I| = |Q|)$  を得る。リサンプリングした集合  $Q^I$  の粒子重みを  $w(X^{(i)}|Q) = 1/|Q|$  とする。

-SIR の結果として、粒子集合  $Q^I$  と  $Q^I$  の各粒子の状態  $X^{(i)}$ 、その重み  $w(X^{(i)}|Q) = 1/|Q|$  が得られる。

## 2.5 -PF の全体アルゴリズム

これまでに説明した原理を用いて、以下の 4 ステップからなる -PF のアルゴリズムを考える。

ステップ 1: 時刻  $t - 1$  まで観測された時系列データ  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1}$  の下で得た粒子集合  $Q_{t-1}$  の各粒子  $i \in Q_{t-1}$  の状態を、 $X_{t-1|t-1}^{(i)}$  とする。これから、 $Q_{t-1}$  による状態確率密度の  $\delta$ -関数近似  $p(X_{t-1}|Y_1, \dots, Y_{t-1}) \approx p^\delta(X_{t-1}|Q_{t-1}) = \frac{1}{|Q_{t-1}|} \sum_{i \in Q_{t-1}} \delta(X_{t-1} - X_{t-1|t-1}^{(i)})$  を得る。

ステップ 2: システム過程を表す方程式 (1) の  $X_{t|t-1}^{(i)} = F(X_{t-1|t-1}^{(i)}, U_t)$  により、時刻  $t - 1$  の各粒子  $i \in Q_{t-1}$  の状態から次の時刻の予測状態を計算し、 $\delta$ -関数近似により  $p(X_t|Y_1, \dots, Y_{t-1}) \approx p^\delta(X_t|Q_{t-1}) = \frac{1}{|Q_{t-1}|} \sum_{i \in Q_{t-1}} \delta(X_t - X_{t|t-1}^{(i)})$  を得る。

ステップ 3: ステップ 2 で得られた  $p(X_t|Y_1, \dots, Y_{t-1})$  から、時刻  $t$  における観測値  $Y_t$  を用いて、状態確率密度  $p(X_t|Y_1, \dots, Y_t)$  を計算する。状態  $X_t$  の下での観測値  $Y_t$  の尤度を  $p(Y_t|X_t)$  とすれば、Bayes の定理により、 $p(X_t|Y_1, \dots, Y_t) = \frac{p(Y_t|X_t)p(X_t|Y_1, \dots, Y_{t-1})}{\int_{\mathbb{R}^N} p(Y_t|X_t)p(X_t|Y_1, \dots, Y_{t-1})dX_t}$

が与えられる。この  $p(X_t|Y_1, \dots, Y_t)$  に  $p^\delta(X_t|Q_{t-1}) = \frac{1}{|Q_{t-1}|} \sum_{i \in Q_{t-1}} \delta(X_t - X_{t|t-1}^{(i)})$  を代入し、 $p(X_t|Y_1, \dots, Y_t) \approx$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{\sum_{i \in Q_{t-1}} p(Y_t | X_{t|t-1}^{(i)})} \sum_{i \in Q_{t-1}} p(Y_t | X_{t|t-1}^{(i)}) \delta(X_t - X_{t|t-1}^{(i)}) \\ &= \sum_{i \in Q_{t-1}} w(X_{t|t-1}^{(i)} | Q_{t-1}) \delta(X_t - X_{t|t-1}^{(i)}) \text{ を得る. 但し,} \end{aligned}$$

$$w(X_{t|t-1}^{(i)} | Q_{t-1}) = \frac{p(Y_t | X_{t|t-1}^{(i)})}{\sum_{i \in Q_{t-1}} p(Y_t | X_{t|t-1}^{(i)})} \text{ であり, } p(Y_t | X_{t|t-1}^{(i)}) \text{ は}$$

$X_{t|t-1}^{(i)}$  が与えられた下の観測値  $Y_t$  の尤度である.

ステップ 4: 各粒子  $i \in Q_{t-1}$  の状態  $X_{t|t-1}^{(i)}$  の重み  $w(X_{t|t-1}^{(i)} | Q_{t-1})$  が与えられた下で, 節 2.4 で説明した -SIR を,  $[Q_t, \{X_{t|t}^{(i)} | i \in Q_t\}, \{w(X_{t|t}^{(i)} | Q_t) | i \in Q_t\}] = -SIR(Q_{t-1}, \{X_{t|t-1}^{(i)} | i \in Q_{t-1}\}, \{w(X_{t|t-1}^{(i)} | Q_{t-1}) | i \in Q_{t-1}\})$  として適用し, 粒子集合  $Q_t$  とその各粒子  $i \in Q_t$  の状態  $X_{t|t}^{(i)}$  と重み  $w(X_{t|t}^{(i)} | Q_t)$  を得る. 時刻  $t$  を更新してステップ 1 に戻る.

このアルゴリズムは, 状態確率密度を近似する粒子集合  $Q$  の粒子数  $|Q|$ , -SIR の Intensive Step に必要な粒子数割合  $\alpha$  と確率密度超の超球カーネル関数近似の  $N$  次元超球近傍空間  $V(X|Q)$  半径  $\varepsilon$  という3つのパラメータを設定する必要がある. 最適な粒子数  $|Q|$  および粒子数割合  $\alpha$  は数値計算評価により決める必要がある. しかし, 状態推定精度の粒子数割合  $\alpha$  に対する依存性は弱いことが分かっており, 実際には殆どの場合に  $\alpha = 0.3$  程度で十分である. 一方,  $\varepsilon$  の最適値は次節に示す理論的な解析から与えられる.

## 2.6 -PF の超球近傍空間半径 $\varepsilon$ の決定

ここで, -PF において -SIR を適用する時に用いられる状態確率密度の超球カーネル関数近似誤差と保存近似誤差の理論的上界を考え, また, それらを最小にする超球近傍空間半径  $\varepsilon_{min}$  の理論式を導く.

定理 1: 状態確率密度の超球カーネル関数近似誤差 状態  $X \in \mathbb{R}^N$  の確率密度  $p(X)$  と, 超球カーネル関数近似  $p^n(X|Q)$  の 2 乗誤差  $\varepsilon^2(p(X), p^n(X|Q))$  の上界は以下で与えられる (証明略).

$$\varepsilon^2(p(X), p^n(X|Q)) \leq \sup_{C \in V(X|Q)} \left| \frac{\partial p(C)}{\partial C} \right|^2 \left( \frac{N\varepsilon}{N+1} \right)^2 + \frac{\Gamma(N/2+1)p(X)}{\pi^{N/2}\varepsilon^N} (1/|Q|) \quad (3).$$

但し,  $C = (c_1, \dots, c_N)^t \in V(X|Q)$ ,  $\partial p(C)/\partial C = (\partial p(C)/\partial c_1, \dots, \partial p(C)/\partial c_N)^t$  である.  $\varepsilon$  は超球近傍空間  $V(X|Q)$  の半径であり,  $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である.

補題 1: 超球カーネル関数近似誤差を最小化する超球近傍空間半径 一般的な状態  $X \in \mathbb{R}^N$  の確率密度  $p(X)$  に対して, 超球カーネル関数近似誤差を最小化する超球近傍空間半径  $\varepsilon_{min}$  は以下で与えられる (証明略).

$$\varepsilon_{min} \cong [1/(2|Q|)]^{\frac{1}{N+2}} \left( \frac{(N+1)^2 \Gamma(N/2+1)p(X)}{N\pi^{N/2} \sup_{C \in V(X|Q)} \left| \frac{\partial p(C)}{\partial C} \right|^2} \right)^{\frac{1}{N+2}} \quad (4).$$

定理 2: 状態確率密度の超球カーネル近似および保存近似誤差 状態  $X \in \mathbb{R}^N$  の確率密度  $p(X)$  と, 保存近似により導かれる粒子集合  $Q' \subset \mathbb{R}^N$  下での  $p(X)$  の超球カーネル関数近似  $p^n(X|Q')$  の 2 乗誤差は以下で与えられる (証明略).

$$\varepsilon^2(p(X), p^n(X|Q')) \leq \sup_{C \in V(X|Q)} \left| \frac{\partial p(C)}{\partial C} \right|^2 \left( \frac{N\varepsilon}{N+1} \right)^2 \frac{\Gamma(N/2+1)p(X)}{\pi^{N/2}\varepsilon^N} (1/|Q| + 1/|Q'|).$$

補題 2: 状態確率密度の超球カーネル近似および保存近似誤差を最小化する超球近傍空間半径 一般的な状態  $X \in \mathbb{R}^N$  の確率密度  $p(X)$  に対して, 超球カーネル関数近似および保存近似誤差を最小化する超球近傍空間半径  $\varepsilon_{min}$  は以下で与えられる (証明略).

$$\varepsilon_{min} \cong \left[ \frac{1}{2|Q|} + \frac{1}{2|Q'|} \right]^{\frac{1}{N+2}} \left( \frac{(N+1)^2 \Gamma(N/2+1)p(X)}{N\pi^{N/2} \sup_{C \in V(X|Q)} \left| \frac{\partial p(C)}{\partial C} \right|^2} \right)^{\frac{1}{N+2}}$$

補題 2 より, 何らかの手段で状態確率密度が与えれば, 状態空間の次元数  $N$  と粒子数  $|Q|$  と  $|Q'|$  に対する超球カーネル関数近似および保存近似誤差を最小化する超球近傍空間半径  $\varepsilon$  を計算できる. しかし, 殆どの実問題の場合, 対象システムの状態確率密度が未知のため, 補題 2 を直接に用いることはできない. しかし, 任意の分布に従う多くの変数の線形加算の確率分布は中心極限定理によりガウス分布に収束するので, ここでは状態確率密度として多く次元ガウス分布を仮定し, 更に具体的な  $\varepsilon_{min}$  を導く.

補題 3: 多次元ガウス確率密度の超球カーネル関数近似と保存近似誤差を最小化する超球近傍空間半径 状態  $X \in \mathbb{R}^N$  の確率密度  $p(X)$  を平均  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^t$ , 共分散行列  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2)$  の多次元ガウス分布と仮定する時, 状態確率密度の超球カーネル関数近似と保存近似誤差を最小化する超球近傍空間半径  $\varepsilon_{min}$  の統計的期待値は以下で与えられる (証明略).

$$E[\varepsilon_{min}] \cong \left( \frac{\varepsilon \sigma_{min}^2 (1/|Q| + 1/|Q'|)}{2} \right)^{\frac{1}{N+2}} \times \left( 2^{N/2} \bar{\sigma}^N \frac{(N+1)^2}{N} \left( \frac{N+3}{N+5} \right)^{\frac{N}{2}} \Gamma(N/2+1) \right)^{\frac{1}{N+2}}$$

但し,  $\sigma_{min} = \min_{k=1,2,\dots,N} \sigma_k$ ,  $\bar{\sigma} = \left( \prod_{k=1}^N \sigma_k \right)^{1/N}$  である.

補題 3 により, PF において最小の状態推定誤差をもたらすと期待される妥当かつ具体的な超球近傍空間半径  $\varepsilon$  を得る.

## 3. 人工データによる評価実験

ここでは,  $N$  次元状態および  $M = N/2$  次元観測値から成る状態空間モデルにより作成した人工データを用い, 提案する -PF および PF, MPF の性能比較を行う. モデル中のシステム過程としては,  $N$  次元 Lorenz 96 モデル [Lorenz 1998] を採用した.  $N$  次元 Lorenz 96 モデルの状態  $X = (x_1, \dots, x_N)^T$  は  $\frac{dx_j}{dt} = (x_{j+1} - x_{j-2})x_{j-1} - x_j + 8$  というシステム過程の微分方程式に従う. ここで, システムノイズベクトル  $U_t$  は無視し,  $U_t = 0$  としている. これは, 個々の 4 次元カオスダイナミクスが  $j$  について隣の 3 つの次元を共有して結合した系であり, 複雑な挙動を示す. 観測過程は, 状態の偶数番目の次元のみを観測値とした. これにより  $M = N/2$  となる. 観測ノイズベクトル  $V_t$  は平均 0, 共分散行列  $\Sigma = \text{diag}(1.5^2, 1.5^2, \dots, 1.5^2)$  のガウス分布に従う. このモデルにおいて,  $N=12, M=N/2=6$  と  $N=30, M=N/2=15$  の 2 つの場合について, 状態遷移シミュレーションを行い時間ステップ数  $T = 4000$  に亘り人工的な時系列データを生成した. 各時系列データに PF, MPF, -PF を適用して, 期待状態推定, 即ちマージナル状態推定を行った.

状態推定精度は, 以下の推定誤差  $e_t$  により評価した. 時刻  $t$  において推定した  $N$  次元状態を  $\hat{X}_t$  とし,  $\hat{X}_t$  の第  $i$  成分を  $\hat{x}_{i,t}$  とする. また, 同じく時刻  $t$  における真の状態を  $X_t$  とし, その第  $i$  成分を  $x_{i,t}$  とする. その時, 時刻  $t$  における状態推定誤差を  $e_t = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_{i,t} - x_{i,t})^2}$  と定義する. そして, 時間ス

テップ数  $T$  に亘る状態推定誤差の平均を  $\bar{e} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t$  とする.

PF, MPF, -PF に共通するパラメータは粒子数  $|Q|$  である. ここでは, 非常に少ない粒子数から比較的多い粒子数までの状態推定誤差への影響を見るために,  $|Q|$  を 16, 64, 256 の 3 つに設定する. PF は  $|Q|$  以外のパラメータを持たない. これに対し, MPF は粒子のリサンプリング回数とそれら粒子の

表 1:  $N=12, M=6$  と  $N=30, M=15$  場合の状態推定誤差  $\bar{\epsilon}$

	$N=12, M=6$			$N=30, M=15$		
	PF	MPF	-PF	PF	MPF	-PF
$ Q =16$	3.21	2.75	2.47	4.46	4.46	2.66
計算時間 (秒)	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$ Q =64$	2.08	1.41	1.35	3.71	3.04	1.81
計算時間 (秒)	0.02	0.02	0.04	0.03	0.03	0.05
$ Q =256$	1.26	1.06	1.10	2.91	1.55	1.52
計算時間 (秒)	0.07	0.08	0.42	0.9	0.9	0.61

計算時間は各時間ステップ  $t$  における平均計算時間である。

線形結合重みをパラメータとして含むが, [Nakano 2007] 等が最適であるとする 3 回のリサンプリングを線形結合するデフォルト値に設定した。-PF のパラメータである超球近傍空間半径  $\epsilon$  については, 状態確率密度が多次元ガウス分布の確率密度であるとの近似的仮定を置いて, 補題 3 の理論最適値を用いる。但し, 仮定する多次元ガウス確率分布の各次元に関する分散  $\sigma$  として実際の粒子分布の分散を用いる。-PF の Intensive step で用いる粒子割合  $\alpha$  については, 事前の種々の数値計算評価結果で  $\alpha$  が 0.3 以上では殆ど状態推定精度は向上しないことを確認し, 計算効率を考え,  $\alpha = 0.3$  とした。

表 1 は, 前記 2 つの  $N, M$  の場合の状態空間モデルについて, PF, MPF と -PF の状態推定誤差  $\bar{\epsilon}$  と計算時間の比較を示す。この結果により, PF と MPF に比べて, -PF は少ない粒子数  $|Q|$  を用いて精度良く状態を推定できることが分かる。次元  $N=12$  の場合, PF, MPF および -PF の精度差は小さい。一方,  $N=30$  の場合, 粒子数が少ない場合には, -PF の状態推定精度は PF や MPF よりも良い。これは, -PF が精度を維持するために, 少ない粒子の配置を最適化するためであると考えられる。また, 粒子数が増えると, -PF の計算時間は PF や MPF の計算時間より明らかに大きくなる。これは PF や MPF が  $O(|Q|)$  の処理しか含まないのに対し, -PF は  $O(|Q|^2)$  である  $\epsilon$ -近傍範囲問い合わせ処理を含むためである。従って, -PF の計算効率向上のため, より効率的な  $\epsilon$ -近傍範囲問い合わせの導入が課題である。

#### 4. 高次元状態システムへの適用性

##### 4.1 理論的考察

粒子分布により状態確率密度を近似する PF や MPF, -PF 等の手法高次元状態システムへの適用性を考察する。定理 1 の式 (3) し示される状態確率密度の超球カーネル関数近似誤差の上限を最小にする超球近傍空間半径  $\epsilon$  が補題 1 の式 (4) である。この式において,  $N \rightarrow \infty$  の極限では, 詳細な計算は省略するが,  $\Gamma(N/2 + 1)^{1/(N+2)} \rightarrow \infty$  などにより  $\epsilon_{min} \rightarrow \infty$  となる。この  $N \rightarrow \infty$   $\epsilon_{min} \rightarrow \infty$  の結果を式 (3) に代入すると, その右辺の第 1 項目は  $\infty$  に, 第 2 項目は 0 に近づき, 全体としては超球カーネル関数近似誤差の上限の極限は  $\infty$  となることが分かる。即ち, 一般に粒子分布から状態確率密度を超球カーネル関数近似によって得ようとする, その関数の広がり最適化しても, 非常に高次元な状態空間では有限な粒子数  $|Q|$  によっては, 精度の良い状態確率密度を得られないことが分かる。今回は, 超球カーネルを用いた証明を行ったが, 超立方体や多次元ガウスカーネルによる粒子近似でも同様のことが言える。つまり, 高次元状態空間では, 有限個の粒子分布に状態確率密度の情報を十分な精度で持たせることができない。従って, 一般的に粒子を用いる手法は高次元状態システムに適用することが困難であると分かる。

##### 4.2 高次元状態システムを対象とした実験

高次元状態システムに関する PF, MPF, -PF の状態推定の性能を評価するため, 3 節で用いた状態空間モデル (Lorenz96) の次元  $N=80$  と  $N=320$  の場合について,  $T=4000$  に亘る人工時系列データを生成した。粒子数の大きな差を状態推定誤差の変化を見るために, 粒子数  $|Q|$  を 64, 256, 1024 とし, 他のパラ

表 2:  $N=80, M=40$  と  $N=320, M=160$  場合の状態推定誤差  $\bar{\epsilon}$

	$N=80, M=40$			$N=320, M=160$		
	PF	MPF	-PF	PF	MPF	-PF
$ Q =64$	5.02	3.61	2.22	5.75	5.63	2.38
計算時間 (秒)	0.03	0.03	0.13	0.29	0.31	0.91
$ Q =256$	4.61	2.73	1.81	5.65	5.41	1.81
計算時間 (秒)	0.1	0.11	0.81	1.12	1.13	3.06
$ Q =1024$	4.27	2.34	1.71	5.65	5.35	1.75
計算時間 (秒)	0.64	0.65	12.5	4.31	4.34	17.2

計算時間は各時間ステップ  $t$  における平均計算時間である。

メータを 3 節と同じとして PF, MPF, -PF を適用した。表 2 に実験結果を示す。これより, 現実的な計算時間で扱うことが可能な限られた粒子数の下では, PF や MPF と比べて -PF の状態推定精度は非常に良いことが分かる。前節の理論的考察によれば, 粒子配置の最適化を行う -PF であっても状態確率密度を正確には計算できない。しかし, Intensive step で各時刻の観測値に関する尤度  $p(Y_t | X_{t-1}^{(i)}) \propto w(X_{t-1}^{(i)} | Q_{t-1})$  を最大化する粒子集合を探索するので, システム過程を通じた状態確率密度の推定精度が悪くとも, 観測過程を通じた尤度最大化を行うという意味において良い推定精度をもたらすと考えられる。一方, PF や MPF の実験結果精度は悪い。これは, 前節の理論的考察が示すように粒子数を非常に大きくしても状態確率密度を精度良く反映する粒子分布が得ることができず, かつリサンプリングにおいて観測値に関する尤度の最適化を行わないためである。-PF の計算時間に関しては, 低次元の場合同様に今後高速な  $\epsilon$  近傍範囲問い合わせを導入する必要がある。

#### 5. まとめ

本研究では, 状態確率密度保存近似と粒子配置の最適化を導入した新しい粒子フィルタリング手法を提案した。提案手法 -PF を低次元状態システムに適用した場合, 状態確率密度を正確に近似しながら粒子配置を最適化するため, PF や MPF などより少ない粒子で効率良く状態推定を行えることが分かった。また, 高次元状態空間システムを対象とする場合, 粒子で状態確率密度を近似する一般的な手法の理論的限界を明らかにした。更に, 高次元状態空間システムでは, PF や MPF による妥当な状態推定が困難になるのに対して, -PF では, 主に観測過程による最適推定を通じて妥当な状態推定を行えることが明らかとなった。但し, -PF では粒子の近傍問い合わせ計算時間がかかるため, この高速化が今後の課題である。

#### 参考文献

- [Evensen 1992] Evensen, G.: Using the extended Kalman filter with a multilayer quasi-geostrophic model. Journal of Geophysical Research, 97. (1992)
- [Evensen 1994] Evensen, G.: Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. Journal of Geophysical Research, 99. (1994)
- [Julier 1997] Julier, Simon, J and Jeffery, K. U: A New Extension of the Kalman Filter to nonlinear Systems. In the Proceedings of AeroSense. (1997)
- [Kalman 1960] Kalman, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, 82. (1960)
- [Kitagawa 1993] Kitagawa, G. : A Monte Carlo filtering and smoothing method for non-Gaussian nonlinear state space models. Research Memorandum, 462. (1993)
- [Lorenz 1998] Lorenz, E.N. and Emanuel, K.A. : Optimal sites for supplementary weather observations: Simulations with a small model. Journal of the Atmospheric Sciences, 20. (1963)
- [Nakano 2007] Nakano, S., Ueno, G. and Higuchi, T. : Merging particle filter for sequential data assimilation. Nonlinear Processes in Geophysics, 14. (2007)