論理プログラムの統一的な意味論

Unified Semanctics for Logic Programs

秋葉 澄孝
Sumitaka Akiba

独立行政法人 産業技術総合研究所
National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST)

We define a map associated with an extended logic program by using an "immediate consequence operator" which has one parameter and one argument. The map maps sets of ground extended literals into sets of ground extended literals, where extended literals mean (classical) literals and negation-as-failure of literals. We show that the set of fixed points of the map includes answer sets, well-founded model and Fitting's least fixed point model of the program. We introduce new models of an extended logic program which are consistent fixed points of the map. Also we introduce new models of a general extended disjunctive program.

1. はじめに

本稿では，拡張論理プログラムに関係する写像を定義し，answer set，well-founded model および Fitting の最小不動点モデルは，この写像の不動点であることを示す．また，別の写像を定義し，answer set と well-founded model はこの写像の不動点であり，Fitting の最小不動点モデルは，well-founded model ではない場合には，この写像の不動点ではないことを示す．

論理プログラムが様々に応用されてきた大きな理由の 1 つは，初期の論理プログラムが数理論理学で確立された意味論によって意味付けられていたからであり，数理論理学にはない失敗による否定が論理プログラムに導入されてからは，失敗による否定を意味付けるために多数の意味論が提案されてきている．しかし，それぞれ独自の視点から特徴付けられて提案されたために，それらを比較した研究では各々の視点による相互の比較がほとんどであり，統一的な視点による研究は少ない．結果として失敗による否定に対する理解は不十分である．

本研究の結果は，一見全く異なる形で定義されている既存の代表的なモデルが，実は同一写像の不動点であることを示すものであり，また，(無限の) 失敗による否定を意味付ける 2 つのモデルと，そうではないモデルを，同一写像の不動点で説明できることを示すものである．つまりこの結果は，失敗による否定に対する理解を一歩進めるものといえる．

この他に，一般拡張選言プログラムのモデルも提案する．

2. 準備

本稿では否定を表す 2 種類の記号，古典的否定 (明示的否定) $\neg$ と失敗による否定 $\sim$，を用いる．

原子式 A および原子式の (古典的) 否定 $\neg A$ を**リテラル**あるいは**標準的リテラル**とよぶ．リテラルの失敗による否定 $\sim L$ を**失敗リテラル**とよぶ．リテラルと失敗リテラルを**拡張リテラル**とよぶ．

I がリテラルの集合のとき，集合 $\{\sim L \mid L \in I\}$ を $\sim I$ で表す．

連絡先: 秋葉澄孝，産業技術総合研究所 情報技術研究部門
〒 305-8568 茨城県つくば市梅園 1-1-1 中央第 2，
s.akiba@aist.go.jp

拡張リテラルの集合 I に対して，I に属する標準的リテラル全体の集合 $\{L \in I \mid L$ は標準的リテラル$\}$ を $I^{\pm}$ で表し，I に属する失敗リテラルを構成する標準的リテラル全体の集合 $\{L \mid \sim L \in I\}$ を $I^{\wr}$ で表す．すなわち，I に属する失敗リテラル全体の集合は $\sim I^{\wr}$ であり，$I = I^{\pm} \cup \sim I^{\wr}$ と $I^{\pm} \cap \sim I^{\wr} = \emptyset$ が成り立つ．

I を基礎拡張リテラルの集合とする．I が **NAF 無矛盾**であるとは，$I^{\pm} \cap I^{\wr} = \emptyset$ であることをいう．I が**古典的無矛盾**であるとは，$A \in I$ かつ $\neg A \in I$ が成り立つ基礎原子式 A が存在しないことをいう．I が**無矛盾**であるとは，I が NAF 無矛盾かつ古典的無矛盾であることをいう．

(標準的) 基礎リテラル全体の集合を $\mathrm{GL}^{\pm}$ で表す．基礎拡張リテラル全体の集合は $\mathrm{GL}^{\pm} \cup \sim \mathrm{GL}^{\pm}$ と表される．

基礎リテラルの集合 I に対して，I に属さない基礎リテラル全体の集合 $\{L \in \mathrm{GL}^{\pm} \mid L \notin I\}$ を $\overline{I}$ で表す．

標準的リテラル L に対して $\sim L$ を L の補リテラルとよび，失敗リテラル $\sim L$ に対して L を $\sim L$ の補リテラルとよぶ．I と J を 標準的リテラルの集合とし，B を拡張リテラルとする．B の補リテラルが $I \cup \sim J$ に属することと，$B \in J \cup \sim I$ は同値である．

I と J を基礎リテラルの集合とし，B を基礎拡張リテラルとするとき，$B \notin I \cup \sim J$ と $B \in \overline{I} \cup \sim \overline{J}$ は同値である．

X を集合とするとき，2^X から 2^X への写像 (2^X は X のベキ集合) を，X の部分集合を**対応付ける写像**とよぶ．

T を $\mathrm{GL}^{\pm} \cup \sim \mathrm{GL}^{\pm}$ の部分集合を対応付ける写像とする．T が**単調**であるとは，$I \subseteq J (\subseteq \mathrm{GL}^{\pm} \cup \sim \mathrm{GL}^{\pm})$ ならば $T(I) \subseteq T(J)$ であることをいう．T の**不動点**とは，$T(I) = I$ が成り立つ I のことをいう．T の**最小不動点**とは，T の任意の不動点 J に対して $I \subseteq J$ が成り立つ T の不動点 I のことをいい，$\mathrm{lfp}(T)$ で表す．T が単調ならば，T の最小不動点が存在して

$$\mathrm{lfp}(T) = \bigcap \{ I \mid T(I) = I \} = \bigcap \{ I \mid T(I) \subseteq I \}$$

が成り立ち，$\mathrm{lfp}(T)$ は $T(I) \subseteq I$ が成り立つ最小の I である．

3. 写像とその不動点

本節では拡張論理プログラムについて考察する．

拡張論理プログラムの規則とは $H \leftarrow B_1, \ldots, B_n$ の形の式で，H はリテラル, $B_1, \ldots, B_n$ は拡張リテラルであるものをいう．$n = 0$ でも良い．拡張論理プログラムとは，拡張論理プ

ログラムの規則の集合のことである．本節では，拡張論理プログラムのことを**プログラム**と呼ぶ．プログラム P の規則の基礎代入例全体の集合を gnd(P) で表す．

定義 3.1 P をプログラムとする．$T_{\mathrm{P}}[I]$ を，基礎リテラルの集合 I をパラメータとしてとり，基礎リテラルの集合 X に対して，次のように定められる基礎リテラルの集合 $T_{\mathrm{P}}[I](X)$ を対応付ける写像とする．

$$T_{\mathrm{P}}[I](X) = \left\{ H \,\middle|\, \begin{array}{l} H \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd}(\mathrm{P}) \text{ が存在して} \\ \{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq X \cup {\sim} I \end{array} \right\} \qquad \square$$

$T_{\mathrm{P}}[I](X)$ を 2 引数の形で $T_{\mathrm{P}}(I, X)$ のように表さないのは次の理由による．本稿ではパラメータ I を固定して $T_{\mathrm{P}}[I]$ の不動点を考察する．この形だと，最小不動点は $\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I])$ と表記できる．$T_{\mathrm{P}}(I, X)$ の形だと，このような表現が難しいので，$T_{\mathrm{P}}[I](X)$ という 1 つのパラメータと 1 つの変数の形の表記法を用いる．$T_{\mathrm{P}}(X) = T_{\mathrm{P}}[X^{\mp}](X^{\pm})$ とおくと，この $T_{\mathrm{P}}(X)$ はいわゆる immediate consequence operator である．本稿でこの T_{P} を用いないのも，$T_{\mathrm{P}}[I]$ の最小不動点などを表現しにくいからである．

定義 3.2 $\mathrm{GL}^{\pm} \cup {\sim}\mathrm{GL}^{\pm}$ の部分集合を対応付ける写像 $M_{0\mathrm{P}}$，M_{P}，$M_{1\mathrm{P}}$，N_{P} を次のように定義する．

$$\begin{aligned} M_{0\mathrm{P}}(I) &= T_{\mathrm{P}}[I^{\mp}](I^{\pm}) \cup {\sim}\overline{T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}](\overline{I^{\mp}})} \\ M_{\mathrm{P}}(I) &= \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I^{\mp}]) \cup {\sim}\overline{T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}](\overline{I^{\mp}})} \\ M_{1\mathrm{P}}(I) &= T_{\mathrm{P}}[I^{\mp}](I^{\pm}) \cup {\sim}\overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}])} \\ N_{\mathrm{P}}(I) &= \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I^{\mp}]) \cup {\sim}\overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}])} \end{aligned} \qquad \square$$

本稿では，これらの写像の不動点を考察する．注目する主な対象は，$M_{0\mathrm{P}}$ の不動点 I のうちの，$I^{\pm}$ が $T_{\mathrm{P}}[I^{\mp}]$ の最小不動点となっているもの，$\overline{I^{\mp}}$ が $T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}]$ の最小不動点となっているもの，および，これらの両方が成り立っているものである．そのような不動点を簡単に表現するために，上の 4 つの写像を定義した．

例 3.1 $P_1 = \{d \leftarrow d\}$ のとき，
M_{0P_1} の不動点は $\emptyset$，$\{d\}$*1，$\{{\sim}d\}$，$\{d, {\sim}d\}$，
M_{P_1} の不動点は $\emptyset$，$\{{\sim}d\}$，
M_{1P_1} の不動点は $\{{\sim}d\}$，$\{d, {\sim}d\}$，
N_{P_1} の不動点は $\{{\sim}d\}$．

$P_2 = \{c \leftarrow {\sim}c\}$ のとき，M_{0P_2}，M_{P_2}，M_{1P_2}，N_{P_2} の不動点は $\emptyset$，$\{c, {\sim}c\}$．

$P_3 = \{a \leftarrow {\sim}b,\ b \leftarrow {\sim}a\}$ のとき，M_{0P_3}，M_{P_3}，M_{1P_3}，N_{P_3} の不動点は $\emptyset$，$\{a, {\sim}b\}$，$\{b, {\sim}a\}$，$\{a, b, {\sim}a, {\sim}b\}$．

$P_4 = \{a \leftarrow {\sim}b,\ b \leftarrow {\sim}a,\ c \leftarrow {\sim}c\}$ のとき，M_{0P_4}，M_{P_4}，M_{1P_4}，N_{P_4} の不動点は
$\emptyset$，$\{a, {\sim}b\}$，$\{b, {\sim}a\}$，$\{a, b, {\sim}a, {\sim}b\}$，$\{c, {\sim}c\}$，
$\{a, c, {\sim}b, {\sim}c\}$，$\{b, c, {\sim}a, {\sim}c\}$，$\{a, b, c, {\sim}a, {\sim}b, {\sim}c\}$．

$P_5 = \{a \leftarrow {\sim}b,\ b \leftarrow {\sim}a,\ c \leftarrow a, {\sim}c\}$ のとき，M_{0P_5}，M_{P_5}，M_{1P_5}，N_{P_5} の不動点は
$\emptyset$，$\{a, {\sim}b\}$，$\{b, {\sim}a, {\sim}c\}$，$\{a, c, {\sim}b, {\sim}c\}$，
$\{a, b, c, {\sim}a, {\sim}b, {\sim}c\}$．

$P_6 = \{d \leftarrow d,\ c \leftarrow {\sim}c, {\sim}d\}$ のとき，
M_{0P_6} の不動点は $\emptyset$，$\{{\sim}d\}$，$\{d, {\sim}c\}$，$\{c, {\sim}c, {\sim}d\}$，
$\{c, d, {\sim}c, {\sim}d\}$，
M_{P_6} の不動点は $\emptyset$，$\{{\sim}d\}$，$\{c, {\sim}c, {\sim}d\}$，
M_{1P_6} の不動点は $\{{\sim}d\}$，$\{c, {\sim}c, {\sim}d\}$，$\{c, d, {\sim}c, {\sim}d\}$，
N_{P_6} の不動点は $\{{\sim}d\}$，$\{c, {\sim}c, {\sim}d\}$． □

*1 $\neg d$ や d 以外の記号もあるので，正確には $\{d\} \cup {\sim}\overline{\{d\}}$ である．このように表現すると分かり難いので，プログラムに現れない記号の部分を省略して表した．他の例についても同様に表す．

不動点全体の集合の包含関係と，最小不動点の集合としての包含関係は，次の通りである．

$$\begin{aligned} \{M_{0\mathrm{P}} \text{ の不動点}\} &\supseteq \{M_{\mathrm{P}} \text{ の不動点}\} \cup \{M_{1\mathrm{P}} \text{ の不動点}\} \\ &\supseteq \{M_{\mathrm{P}} \text{ の不動点}\} \cap \{M_{1\mathrm{P}} \text{ の不動点}\} \\ &= \{N_{\mathrm{P}} \text{ の不動点}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{0\mathrm{P}} \text{ の最小不動点} &= M_{\mathrm{P}} \text{ の最小不動点} \\ \subseteq M_{1\mathrm{P}} \text{ の最小不動点} &= N_{\mathrm{P}} \text{ の最小不動点} \end{aligned}$$

以下 3.1 節から 3.3 節では，answer set と well-founded model は N_{P} の不動点であり，Fitting の最小不動点モデルは M_{P} の最小不動点であることを示す．

3.1 Answer Set

[Gelfond 91] での定義によると，古典的無矛盾ではない answer set とは $\mathrm{GL}^{\pm}$ のことである．以下では古典的無矛盾な answer set のことを，単に answer set とよぶ．

[Gelfond 91] での定義より，$\sim$ を含まないプログラム P の answer set $\alpha(\mathrm{P})$ とは，

$$\left\{ L_0 \,\middle|\, \begin{array}{l} L_0 \leftarrow L_1, \ldots, L_m \in \mathrm{gnd}(\mathrm{P}) \\ \text{が存在して } L_1, \ldots, L_m \in S \end{array} \right\} \subseteq S$$

が成り立つ最小の S のことである．

この式の左辺の集合は $T_{\mathrm{P}}[I](S)$ だから，$\alpha(\mathrm{P}) = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I])$ である．P は $\sim$ を含まないので，$T_{\mathrm{P}}[I](X)$ は I に依存しないことに注意されたい．ゆえに，$\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I]) = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{S}])$ である．ゆえに，$\sim$ を含まないプログラム P の answer set とは，$S = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{S}])$ が成り立つ基礎リテラルの集合 S のことである．

[Gelfond 91] での定義より，基礎リテラルの集合 S によるプログラム P の "Gelfond-Lifschitz 変換" P^S とは

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^S = \{ H \leftarrow L_1, \ldots, L_m & \\ \mid H \leftarrow L_1, \ldots, L_m, {\sim}K_1, \ldots, {\sim}K_n \in \mathrm{gnd}(\mathrm{P}) & \\ L_1, \ldots, L_m \in \mathrm{GL}^{\pm},\ K_1, \ldots, K_n \notin S \} & \end{aligned}$$

のことであり，$\sim$ を含むプログラム P の answer set とは，$S = \alpha(\mathrm{P}^S)$ が成り立つ基礎リテラルの集合 S のことである．

すなわち，$S = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}^S}[I])$ が成り立つ S のことである．

$\sim$ を含むプログラム P について，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} & T_{\mathrm{P}^S}[I](X) \\ &= \left\{ H \,\middle|\, \begin{array}{l} H \leftarrow L_1, \ldots, L_m \in \mathrm{P}^S \text{ が存在して} \\ L_1, \ldots, L_m \in X \end{array} \right\} \\ &= \left\{ H \,\middle|\, \begin{array}{l} H \leftarrow L_1, \ldots, L_m, {\sim}K_1, \ldots, {\sim}K_n \in \mathrm{gnd}(\mathrm{P}) \\ \text{が存在して} \\ L_1, \ldots, L_m \in X,\ K_1, \ldots, K_n \notin S \end{array} \right\} \\ &= \left\{ H \,\middle|\, \begin{array}{l} H \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd}(\mathrm{P}) \text{ が存在して} \\ B_1, \ldots, B_n \in X \cup {\sim}\overline{S} \end{array} \right\} \\ &= T_{\mathrm{P}}[\overline{S}](X) \end{aligned}$$

ゆえに，P が $\sim$ を含むプログラムの場合でも，P の answer set とは $S = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{S}])$ が成り立つ S のことである．

P をプログラムとし，S を P の answer set とする．$I = S \cup {\sim}\overline{S}$ とおく．$S = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{S}])$ より，$I^{\pm} = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I^{\mp}])$ と $\overline{I^{\mp}} = \overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}])}$ が成り立つ．ゆえに，I は N_{P} の不動点

であり， $I^{\Lsh} = \overline{I^{\pm}}$ が成り立つ．逆に，I は N_{P} の不動点であり，$I^{\Lsh} = \overline{I^{\pm}}$ が成り立つと仮定する．$S = I^{\pm}$ とおくと，$S = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{S}])$ だから，S は P の answer set である．

以上より，次の命題が成り立つ．

命題 3.1 P の古典的無矛盾な answer set とは，$I^{\Lsh} = \overline{I^{\pm}}$ が成り立つ N_{P} の不動点 I の，標準的リテラル部分 $I^{\pm}$ のことである． □

3.2 Well-Founded Model

[Van Gelder 91] の $\neg$ は本稿の $\sim$ に相当する．

[Van Gelder 91] には本稿の $\neg$ に相当する記号は出てこない．

P をプログラムとする．$\mathrm{GL}^{\pm}$ の部分集合を対応付ける写像 $T_{\mathrm{P}}[I, J]$ を，次のように定義する．

$$T_{\mathrm{P}}[I, J](X) = T_{\mathrm{P}}[I](J \cap X)$$

$T_{\mathrm{P}}[I, J]$ は単調であり，最小不動点が存在する．

また，$J = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I, J])$ と $J = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I])$ は同値である．

以下では，P をプログラム，I を基礎拡張リテラルの集合とする．

[Van Gelder 91] での定義より，(標準的) 基礎リテラルの集合 A が I に関する P の unfounded set であるとは，

$$A \subseteq \left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{各 } p \leftarrow q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ について，次の} \\ \text{(1) と (2) の少なくとも一方が成り立つ．} \\ \text{(1) ある } q_i \text{ が存在して } q_i \in I^{\Lsh} \cup \sim I^{\pm} \\ \text{(2) ある } q_i \text{ が存在して } q_i \in A \end{array} \right\}$$

が成り立つことである．

この式の右辺の集合について，

右辺の集合

$$= \left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{各 } p \leftarrow q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ について，} \\ \text{ある } q_i \text{ が存在して } q_i \in I^{\Lsh} \cup \sim I^{\pm} \cup A \end{array} \right\}$$

$$= \overline{\left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } p \leftarrow q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ が存在して，} \\ \text{すべての } q_i \text{ について } q_i \notin I^{\Lsh} \cup A \cup \sim I^{\pm} \end{array} \right\}}$$

$$= \overline{\left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } p \leftarrow q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ が存在して，} \\ \text{すべての } q_i \text{ について } q_i \in \overline{I^{\Lsh} \cup A} \cup \sim \overline{I^{\pm}} \end{array} \right\}}$$

$$= \overline{\left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } p \leftarrow q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ が存在して，} \\ \text{すべての } q_i \text{ について } q_i \in (\overline{I^{\Lsh}} \cap \overline{A}) \cup \sim \overline{I^{\pm}} \end{array} \right\}}$$

$$= \overline{T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}](\overline{A})}$$

が成り立つ．ゆえに，A が I に関する P の unfounded set であることと，$\overline{A} \supseteq T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}](\overline{A})$ は同値である．

[Van Gelder 91] での定義より，I に関する P の greatest unfounded set とは，I に関する P の unfounded set 全部の和集合のことである．

すなわち，greatest unfounded set とは

$$\bigcup \{ A \mid T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}](\overline{A}) \subseteq \overline{A} \}$$
$$= \overline{\bigcap \{ B \mid T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}](B) \subseteq B \}}$$
$$= \overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}])}$$

のことである．

[Van Gelder 91] での定義より，well-founded model とは，次のように定義される $\mathrm{W_P}$ の最小不動点のことである．

$$\mathrm{T_P}(I) = \left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} p \leftarrow q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ が存在して} \\ \text{すべての } q_i \text{ について } q_i \in I \end{array} \right\}$$

$\mathrm{U_P}(I) =$「I に関する P の greatest unfounded set」

$\mathrm{W_P}(I) = \mathrm{T_P}(I) \cup \sim \mathrm{U_P}(I)$

これらを本稿の記号で書き直すと次のようになる．

$$\mathrm{T_P}(I) = T_{\mathrm{P}}[I^{\Lsh}](I^{\pm})$$
$$\mathrm{U_P}(I) = \overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}])}$$
$$\mathrm{W_P}(I) = T_{\mathrm{P}}[I^{\Lsh}](I^{\pm}) \cup \sim \overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}])}$$

$J = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I, J])$ と $J = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I])$ は同値なので，

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}])} = I^{\Lsh} &\iff \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}, \overline{I^{\Lsh}}]) = \overline{I^{\Lsh}} \\ &\iff \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}]) = \overline{I^{\Lsh}} \\ &\iff \overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}])} = I^{\Lsh} \end{aligned}$$

が成り立つ．

ゆえに，$\mathrm{W_P}$ の不動点は $M_{1\mathrm{P}}$ の不動点であり，その逆も成り立つ．ゆえに，次の命題が成り立つ．

命題 3.2 P の well-founded model とは，N_{P} の最小不動点のことである． □

3.3 Fitting の不動点モデル

[Fitting 85] の符号付基礎原子式 TA を本稿の基礎リテラル A と同一視し，FA を基礎失敗リテラル $\sim A$ と同一視する．[Fitting 85] には本稿の $\neg$ に相当する記号は出てこない．

[Fitting 85] での定義より，Fitting の不動点モデルとは，次のように定義される $\mathrm{GL}^{\pm} \cup \sim \mathrm{GL}^{\pm}$ の部分集合を対応付ける写像 Φ_{P} の不動点のことである．

$$\Phi_{\mathrm{P}}(X)$$
$$= \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ が存在して} \\ \text{すべての } B_i \text{ について } B_i \in X \end{array} \right\}$$
$$\cup \left\{ \sim A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{すべての } A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ につい} \\ \text{て，ある } B_i \text{ が存在して } B_i \in X^{\Lsh} \cup \sim X^{\pm} \end{array} \right\}$$

この等式の右辺左側の集合は $T_{\mathrm{P}}[X^{\Lsh}](X^{\pm})$ であり，

右辺右側の集合

$$= \sim \overline{\left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ が存在して} \\ \text{すべての } B_i \text{ について } B_i \notin X^{\Lsh} \cup \sim X^{\pm} \end{array} \right\}}$$

$$= \sim \overline{\left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } A \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd(P)} \text{ が存在して} \\ \text{すべての } B_i \text{ について } B_i \in \overline{X^{\Lsh}} \cup \sim \overline{X^{\pm}} \end{array} \right\}}$$

$$= \sim \overline{T_{\mathrm{P}}[\overline{X^{\pm}}](\overline{X^{\Lsh}})}$$

である．

ゆえに，$\Phi_{\mathrm{P}}(X) = M_{0\mathrm{P}}(X)$ でだから，次の命題が成り立つ．

命題 3.3 P の Fitting の不動点モデルとは，$M_{0\mathrm{P}}$ の不動点のことである．Fitting の最小不動点モデルとは M_{P} の最小不動点のことである． □

Fitting の不動点モデルは $M_{0\mathrm{P}}$ の不動点であるが，例 3.1 の P_1 や P_6 のように，N_{P} や M_{P} の不動点ではないものがある．また，Fitting の最小不動点モデルは M_{P} の最小不動点であるが，N_{P} の最小不動点ではないものがある．例えば，例 3.1 の P_1 について，Fitting の最小不動点モデルは $\emptyset$ であるけれども，これは N_{P_1} の不動点ではない．

3.4 不動点モデル

基礎拡張リテラルの集合 I に属する L を真であるということにすると，無矛盾な基礎拡張リテラルの集合を解釈の一種とみなすことができる．数理論理学の解釈と異なるのは，失敗リテラルについても定めるところである．基礎リテラル L に対

して，L と $\neg L$ の両方が真ではない場合や，L と $\sim L$ の両方が真ではない場合があるという意味で，無矛盾な基礎拡張リテラルの集合は 3 値解釈である．

$M_{0\mathrm{P}}$ の不動点は，つまり Fitting の不動点モデルは，プログラム P を充足するという意味でモデルである．一方，論理プログラムのモデルには，P を充足するだけでなく，P の結論を過不足なく表現していることを，期待されている．

例えば，$P = \{ d \leftarrow d \}$ のとき，$\{ d \}$ は $M_{0\mathrm{P}}$ の不動点である (例 3.1)．しかし，d を P の結論とはいいにくい．$I^{\pm} = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I^{\updownarrow}])$ が成り立つ不動点 I，つまり M_{P} の不動点に限定すると，このような不動点を除くことができる．

$P = \{ d \leftarrow d \}$ のとき，$I = \emptyset$ は $M_{0\mathrm{P}}$ の $I^{\pm} = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I^{\updownarrow}])$ が成り立つ不動点である (例 3.1)．このモデルでは $\sim d$ は真ではない．$I^{\updownarrow} = \overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}])}$ が成り立つ不動点に限定すると，このような不動点を除くことができる．

以上をまとめると，次の定義になる．

定義 3.3 $M_{0\mathrm{P}}$ の無矛盾な不動点であり $I^{\pm} = \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I^{\updownarrow}])$ が成り立つ I を，つまり M_{P} の無矛盾な不動点を P のモデルとよぶ．さらに $I^{\updownarrow} = \overline{\mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}])}$ が成り立つものを，つまり N_{P} の無矛盾な不動点を P の NAF 型のモデルとよぶ． □

answer set I は，$\overline{I^{\updownarrow}} = I^{\pm}$ だから，N_{P} の NAF 無矛盾な不動点のうちの極大なものである．例 3.1 の P_4 のように，answer set がない場合があるが，一方，NAF 無矛盾な不動点のうちの極大なものは必ず存在する．P_4 の場合は $\{a, \sim b\}$ と $\{b, \sim a\}$ が極大である．この例は，$I^{\updownarrow} = \overline{I^{\pm}}$ が成り立つ不動点よりも，NAF 無矛盾な不動点のうちの極大なものに注目した方が良いことを表している．

$\mathrm{P} = \{ a \leftarrow \sim b,\ b \leftarrow \sim a,\ d \leftarrow d \}$ のとき，$\{a, \sim b\}$ は M_{P} の不動点である．これは a と b に関して answer set のような不動点であり，d に関して Fitting の最小不動点モデルのような不動点である．M_{P} の不動点には，この例のような局所的に性質が異なる不動点が含まれる．P_4 の $\{a, \sim b\}$ と $\{b, \sim a\}$ も同様な例である．

3.5 選言プログラム

本節では，一般拡張選言プログラムのモデルを提案する．前節の M_{P} と N_{P} の不動点のように，このモデルが一般拡張選言プログラムに対する既存のモデルを包含すると予想している．

一般拡張選言プログラムの規則とは

$$H_1; \ldots; H_m \leftarrow B_1, \ldots, B_n$$

の形の式で，$H_1, \ldots, H_m, B_1, \ldots, B_n$ は拡張リテラルであるものをいう．$n = 0$ でも良い．一般拡張選言プログラムとは，一般拡張選言プログラムの規則の集合のことである．

一般拡張選言プログラム P の規則の基礎代入例全体の集合を gnd(P) で表す．

定義 3.4 $T_{\mathrm{P}}[I]$ を，基礎リテラルの集合 I をパラメータとしてとり，基礎リテラルの集合 X に対して基礎リテラルの集合

$$T_{\mathrm{P}}[I](X) = \left\{ L \;\middle|\; \begin{array}{l} H_1; \ldots; H_m \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd}(\mathrm{P}) \text{ が} \\ \text{存在して，} L \in \mathrm{GL}^{\pm} \cap \{ H_1, \ldots, H_m \} \\ \text{かつ } \{ B_1, \ldots, B_n \} \subseteq X \cup \sim I \end{array} \right\}$$

を対応付ける写像とする．次の条件

(1) 任意の $H_1; \ldots; H_m \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd}(\mathrm{P})$ について $\{ B_1, \ldots, B_n \} \subseteq I$ ならば $\{ H_1, \ldots, H_m \} \cap I \neq \emptyset$,

(2) 任意の $H_1; \ldots; H_m \leftarrow B_1, \ldots, B_n \in \mathrm{gnd}(\mathrm{P})$ について $\{ B_1, \ldots, B_n \} \subseteq \overline{I^{\updownarrow}} \cup \sim\overline{I^{\pm}}$ ならば $\{ H_1, \ldots, H_m \} \cap (\overline{I^{\updownarrow}} \cup \sim\overline{I^{\pm}}) \neq \emptyset$,

(3) $I^{\pm} \subseteq T_{\mathrm{P}}[I^{\updownarrow}](I^{\pm})$，$I^{\pm} \subseteq \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[I^{\updownarrow}])$,

(4a) $\overline{I^{\updownarrow}} \subseteq T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}](\overline{I^{\updownarrow}})$,

(5) I は無矛盾,

をすべてみたす基礎拡張リテラルの集合 I を，一般拡張選言プログラム P のモデルとよぶ． これらの 5 つの条件と共に

(4b) $\overline{I^{\updownarrow}} \subseteq \mathrm{lfp}(T_{\mathrm{P}}[\overline{I^{\pm}}])$

もみたす I を，NAF 型のモデルとよぶ． □

上の (1) は I が P を充足するという条件であり，(2) は $\overline{I^{\updownarrow}} \cup \sim\overline{I^{\pm}}$ が P を充足するという条件である．

(3) は $I^{\pm}$ を P の結論として妥当なものに制限するための条件であり，(4a) と (4b) は $\overline{I^{\updownarrow}}$ に対する同様な条件である．

P を拡張論理プログラムとする．このときは，この $T_{\mathrm{P}}[I]$ とこれまでの $T_{\mathrm{P}}[I]$ は同じ写像である．また，I が M_{P} の不動点であることと，I が (1)，(2)，(3) および (4a) をみたすことは同値であり，I が N_{P} の不動点であることと，I が (1)，(2)，(3) および (4b) をみたすことは同値である．

4. おわりに

answer set，well-founded model および Fitting の最小不動点モデルは，N_{P} の不動点であることを示した．この結果，これらが同じ種類のモデルであることが分かっただけでなく，元の定義よりも扱いやすい定式化ができた．

本稿では，モデルの条件に古典的無矛盾性を入れた．しかし，この条件を外した方が良い場合がある．例えば，$\mathrm{P} = \{ p(a), p(b), \neg p(b), \neg p(c) \}$ に対して，矛盾の原因を探すための質問 $p(x) \wedge \neg p(x)$ を受け付け，$x = b$ と回答するシステムを容易に構築できる．しかし，基礎リテラル全体の集合を P のモデルとしたり，モデルは存在しないことにしてしまうと，このシステムを適切に意味付けることができない．

$$\{ p(a), p(b), \neg p(b), \neg p(c) \} \cup \sim\overline{\{ p(a), p(b), \neg p(b), \neg p(c) \}}$$

は N_{P} の不動点だから，本稿のモデルの条件から古典的無矛盾性を除くと，この不動点は P を表現する適切なモデルだといえる．

謝辞

この研究は栢森情報科学振興財団の助成を受けて遂行された．

参考文献

[Fitting 85] Fitting, M.: A Kripke-Kleene Semantics for Logic Programs, *Journal of Logic Programming*, Vol. 2, No. 4, pp. 295–312 (1985)

[Gelfond 91] Gelfond, M. and Lifschitz, V.: Classical Negation in Logic Programs and Disjunctive Databases, *New Generation Computing*, Vol. 9, No. 3, 4, pp. 365–385 (1991)

[Van Gelder 91] Van Gelder, A., Ross, K. A., and Schlipf, J. S.: The Well-Founded Semantics for General Logic Programs, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 38, No. 3, pp. 620–650 (1991)