特性関数の簡略記述法を用いた提携構造の形成

Coalition Structure Generation Utilizing Compact Characteristic Function Representations

一村 良[*1] Ryo Ichimura　大田 直樹[*1] Naoki Ohta　Vincent Conitzer[*2]　佐藤 恭史[*1*3] Yasufumi Satoh　櫻井 祐子[*1*4] Yuko Sakurai
岩崎 敦[*1] Atsushi Iwasaki　横尾 真[*1] Makoto Yokoo

[*1]九州大学大学院システム情報科学府 Graduate School of ISEE, Kyushu University　[*2]Duke University, Department of Computer Science

Forming effective coalitions is a major research challenge in AI and multi-agent systems. Coalition structure generation (CSG), which involves partitioning a set of agents into coalitions so that social surplus is maximized, is a central research topic due to its computational complexity. In this paper, we present new methods for CSG utilizing recently developed compact representation schemes for characteristic functions. We characterize the complexity of CSG under these representation schemes. In this context, the complexity is driven more by the number of "rules" than by the number of agents. Furthermore, we develop mixed integer programming formulations and show that an off-the-shelf optimization package can solve these problems quite efficiently, i.e., it can solve instances with a few hundred of agents, while the state-of-the-art algorithm (which does not make use of compact representation) can solve instances up to 27 agents.

1. はじめに

利己的なエージェント間で協調関係を結ぶことが可能な協力ゲーム [岡田 96] において，社会的に望ましい協調関係（提携）を形作ること，すなわち提携構造の形成は，重要な研究分野である．提携構造形成問題 (CSG, Coalition Structure Generation) [Sandholm 97] では，エージェントの集合を，社会的余剰（効用の総和）が最大化されるように分割する．この問題は，AI やマルチエージェントの分野において，より一層注目を集める研究分野となることが予想される．

協力ゲームでは，エージェントが形成する提携に対して，その効用を与える関数 (特性関数) が存在する．既存の研究では，ゲームの特性関数は一般的な形で表されることを前提としているが，任意の特性関数を記述するには $\Theta(2^n)$ の表記量を必要とするため，多くのエージェントが存在する協力ゲームでは，現実的な時間で提携構造形成問題の解を発見することは困難である．しかし通常，特性関数の構造には何らかの特徴が存在するため，その特徴を利用した簡略記述が可能であり，盛んに研究が行われている [Ieong 05, Conitzer 06].

特性関数の簡略記述法として，MC-nets (Marginal Contribution networks) [Ieong 05] や SCG (Synergy Coalition Group) [Conitzer 06] が存在する．このように，特性関数の簡略記述法に関する研究が存在する一方で，これらの手法を提携構造形成問題に応用する研究は現在までに行われていない．そこで，本論文では，これらの手法を応用して提携構造形成問題を解く研究を行う[*5]．具体的には，MC-nets，SCG の 2 つの手法を用いて実験を行い，それぞれの効果を検証する．

提案手法は，特性関数の簡略記述法を利用しない手法よりもはるかに高速な解の発見を可能にする．また，これらの手法を用いた提携構造形成問題は，ある制約のもとで，効用を最大にするような "ルール" の部分集合を発見する問題であるという共通点を持つ．各手法の表現する提携構造形成問題は NP 困難であり，問題のサイズはエージェントの数でなく "ルール" の数に依存する．また，それぞれの問題の構造を混合整数計画法によって定式化し，市販の最適化エンジン (ILOG CPLEX) によって効果的にこれらの問題を解くことが可能である．

連絡先: 一村 良，九州大学大学院システム情報科学府，812-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576, ichimura@agent.is.kyushu-u.ac.jp

*3 現在はジオ技術研究所所属.
*4 現在はヤフー株式会社所属.
*5 紙幅の都合上，各定理の証明は省略する．詳細については著者に連絡されたい.

2. モデル

協力ゲームでは特性関数が提携のもたらす効用を決定する．特性関数 v とは，エージェントの全体集合を A とするとき，その部分集合であるエージェントの集合（提携）S を引数とする関数であり，$v(S)$ は提携 S に属するエージェントが協力して得る効用を示す.

定義 1 (特性関数) 特性関数 $v : 2^A \to \Re$ は，任意のエージェントの集合 S に対し，S に属するエージェントが協力した際に得る効用 $v(S)$ を与える．

特性関数は通常，ゲームの特徴に対応した構造を持ち，その代表的な構造として優加法性が存在する．優加法性とは，$S_i \cap S_j = \emptyset$ を満たす任意の提携 S_i, S_j について，$v(S_i) + v(S_j) \le v(S_i \cup S_j)$ が成立する性質のことをいう．特性関数が優加法性を満たす場合，提携の人数が増えることによって個々のエージェントの効用が減少することはない．このとき全体の効用を最大化するには，人数が最大の提携，すなわち全体提携を形成すればよい．しかし，特性関数が優加法性を満たさない場合，全体提携が効用の総和を最大化するとは限らない．そのような場合，それぞれのエージェントが適切な提携に含まれるような，提携の構造を考える必要がある．

提携構造形成問題では，エージェントの全体集合をいくつかの提携に分割する．これを $CS = \{S_1, S_2, \ldots\}$ とするとき，

CS を提携構造といい，CS は以下を満たす．

$$\forall i,j\ (i \neq j),\ S_i \cap S_j = \emptyset,\ \bigcup_{S_i \in CS} S_i = A.$$

提携構造のもたらす効用 $V(CS)$ は，CS に含まれるすべての提携の効用の和，すなわち $V(CS) = \sum_{S_i \in CS} v(S_i)$ である．提携構造形成問題における解とは，$V(CS)$ が最大となる提携構造を発見すること，すなわち $\forall CS,\ V(CS^*) \geq V(CS)$ を満たす CS^* を発見することである．

3. 特性関数の簡略記述法

本章では，提携構造形成問題に利用可能な特性関数の簡略記述法として，MC-nets と SCG を紹介する．

3.1 MC-nets

Ieong と Shoham は，marginal contribution networks (MC-nets) と呼ばれる特性関数の簡略記述法を提案した [Ieong 05]．この手法は，提携の効用をルールの集合によって記述することで，特性関数の簡略記述を可能にする．

定義 2 (MC-nets) MC-nets は，提携が満たすべきルールの集合 R によって記述される．任意のルール $r \in R$ は，$(P_r, N_r) \rightarrow v_r$ という形で表される．P_r, N_r はそれぞれ "存在しなければならない" および "存在してはならない" エージェントの集合であり，$P_r \subseteq A, N_r \subseteq A$，$P_r \cap N_r = \emptyset$ である．$v_r \in \Re$ は，ルール r が満たされた場合の効用を表す．$P_r \subseteq S$ *and* $N_r \cap S = \emptyset$ が成り立つとき，ルール r は提携 S に適用可能であるといい，S に適用可能なルールの全体集合を R_S とするとき，任意の提携 S の効用は $v(S) = \sum_{r \in R_S} v_r$ で与えられる．したがって，任意の提携構造の効用は $V(CS) = \sum_{S \in CS} \sum_{r \in R_S} v_r$ である．

従来，MC-nets に含まれるルールは正負両方の効用を持ちうると定義していた．本論文では，ルールは必ず正の効用を持つよう制限する．また，任意のルール r について $|P_r| \geq 1$ と仮定する．この制限のもとでも，MC-nets を用いてあらゆる特性関数を記述できる．

例 1 5 人のエージェント a,b,c,d,e による協力ゲームにおいて，$r_1 : (\{b,e\},\{\}) \rightarrow 3$，$r_2 : (\{a,b,c\},\{d\}) \rightarrow 2$，$r_3 : (\{a,d\},\{\}) \rightarrow 1$，$r_4 : (\{c\},\{e\}) \rightarrow 1$ という 4 つのルールが特性関数を簡略に記述しているとする．このとき，$\{a,b,c\}$ という提携にはルール r_2 と r_4 が適用可能であり，この提携の効用は $v(\{a,b,c\}) = v(r_1) + v(r_2) = 2 + 1 = 3$ である．

3.2 SCG

Conitzer と Sandholm は，シナジー提携集合 (SCG, Synergy Coalition Group) と呼ばれる特性関数の簡略記述法を提案した [Conitzer 06]．この手法は，エージェントの組合せによって新たな効用が生まれる提携 (シナジー提携) とその効用のみを記述することで，特性関数の簡略記述を可能にする．

定義 3 (シナジー提携集合) シナジー提携集合（以下，SCG と呼称する）は，提携 S とその効用 $v(S)$ の組合せ $(S, v(S))$ の集合である．任意の提携 S に関して，特性関数の定義する効用は $v(S) = \max\{\sum_{S_i \in p_S} v(S_i)\}$ である．p_S は，p_S の任意の要素 S_i は互いに共通部分を持たず，$\bigcup_{S_i \in p_S} S_i = S$ であり，$(S_i, v(S_i)) \in SCG$ であるような S の分割である．また，S が必ず分割可能であるようにするため，$|S| = 1$ なる提携はすべて SCG に含まれるとする．

SCG が提携 S の効用を記述していない場合，SCG に含まれる提携を用いた S の分割を考えることで効用を計算することができる．しかし，従来の SCG の定義では，優加法性を満たす特性関数しか記述できない．優加法性を満たさない特性関数の簡略記述を可能とするため，本論文では p_S に以下の制限を設ける．

- $\forall p'_S \subseteq p_S$，where $|p'_S| \geq 2, (\bigcup_{S_{i \in p'_S}} S_i, v(\bigcup_{S_i \in p'_S} S_i))$ は SCG の要素でない．

この条件は，提携の効用を算出するために提携を分割するとき，SCG の要素である提携をより小さな提携に分割できないことを規定している．この条件を付加した SCG は，優加法性を満たさない特性関数をはじめとしたあらゆる特性関数を記述できる．これは，最悪でもすべての提携を SCG の要素とすれば，特性関数とまったく同じ内容を記述できるためである．

例 2 5 人のエージェント a,b,c,d,e による協力ゲームにおいて，$SCG = \{(\{a\},0),(\{b\},0),(\{c\},1),(\{d\},2),(\{e\},3),$ $(\{a,b\},3)$，$(\{a,b,c\},3)\}$ となっているとする．このとき，$v(\{d,e\}) = v(\{d\}) + v(\{e\}) = 5$ となり，$v(\{a,b,c,d,e\}) = v(\{a,b,c\}) + v(\{d\}) + v(\{e\}) = 8$ となる．これは，$v(\{a,b,c,d,e\})$ の効用を計算するとき，$\{a,b\} \cup \{c\} = \{a,b,c\}$ という提携が SCG に記述されているため，この提携をさらに分割できない，すなわち $v(\{a,b\}) + v(\{c\}) + v(\{d\}) + v(\{e\}) = 9$ と提携 $\{a,b,c,d,e\}$ の効用を算出できないためである．

4. 提案手法

本章では，既存の特性関数の簡略記述法を用いて提携構造形成問題を解く手法を提案する．

4.1 MC-nets を用いた提携構造の形成

本節では，MC-nets の記述するルールのグラフ表現と，その提携構造形成問題の解を求める方法を述べる．

定義 4 (実現可能なルール集合) ルールの集合 $R' \subseteq R$ について，任意のルール $r \in R'$ が必ずいずれかの提携に適用可能であるような提携構造 CS が存在するとき，"R' は実現可能なルール集合である" という．

例 1 より，$\{r_2, r_4\}$ というルール集合は，$\{\{a,b,c\},\{d,e\}\}$ という提携構造によって実現可能である．一方，$\{r_1, r_2, r_4\}$ や $\{r_2, r_3\}$ というルール集合は実現不可能である．MC-nets をもとに最適な提携構造を発見することは，$\sum_{r \in R'} v_r$ を最大化するような，実現可能なルール集合 R' を発見することに等しい．

定義 5 (ルール間の関係) 任意の 2 つのルール r と r' の間には，以下に示すような 4 種の関係が存在する．これらの関係は，任意のルールの組に必ずただ 1 つ成立する．

同提携で両立可能 (Compatible on the same coalition)
$P_r \cap P_{r'} \neq \emptyset$ *and* $P_r \cap N_{r'} = P_{r'} \cap N_r = \emptyset$ が成立するとき，ルール r と r' は同提携で両立可能である．例 1 では，r_1 と r_2 は同提携で両立可能である．r_1 と r_2 を同時に適用するとき，$S \supseteq \{a,b,c,e\}$ *and* $d \notin S$ を満たす提携 S が CS に存在する．

両立不可能 (Incompatible) $P_r \cap P_{r'} \neq \emptyset$ *and* $(P_r \cap N_{r'} \neq \emptyset$ *or* $P_{r'} \cap N_r \neq \emptyset)$ が成立するとき，ルール r と r' は両立不可能である．例 1 では，r_2 と r_3 は両立不可能であり，これら 2 つのルールは同時に適用できない．

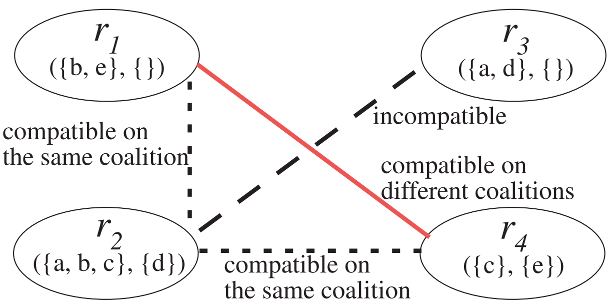

図 1: 例 1 に基づくルールのグラフ表現

他提携で両立可能 (Compatible on different coalitions) $P_r \cap P_{r'} = \emptyset$ *and* $(P_r \cap N_{r'} \neq \emptyset$ *or* $P_{r'} \cap N_r \neq \emptyset)$ が成立するとき，ルール r と r' は他提携で両立可能である．例 1 では，r_1 と r_4 は他提携で両立可能である．これらのルールを同時に適用するとき，$S_1 \supseteq \{b, e\}$ *and* $S_2 \supseteq \{c\}$ を満たすような異なる 2 つの提携 S_1，S_2 が CS に存在する．

独立 (Independent) $P_r \cap P_{r'} = \emptyset$ *and* $P_r \cap N_{r'} = P_{r'} \cap N_r = \emptyset$ が成立するとき，ルール r と r' は独立である．例 1 では，r_1 と r_3 は独立であり，同じ提携にも異なる提携にも，同時に適用可能である．

MC-nets によるルールの集合は，各ルールをノード，ルール間の関係をエッジとしたグラフで表現できる．図 1 に，例 1 のグラフ表現を示す．ただし，"独立" のエッジは省略する．

以下の定理にルール集合が実現可能であるための必要十分条件を記述する．

定理 1 *ルールの集合 R' は，以下の条件を同時に満たすとき，またそのときに限り実現可能である．*

(a) R' は，"両立不可能" なエッジで連結されたルール（ノード）の組を持たない．

(b) R' に含まれる任意のルール（ノード）の組が "他提携で両立可能" なエッジで連結されているとき，このルール（ノード）の組は "同提携で両立可能" なエッジによって到達不可能である．

定理 2 特性関数を MC-nets を用いて記述しているとき，最適な提携構造を発見することは *NP* 困難である．また，$\mathcal{NP} = \mathcal{ZPP}$ でなければ，いかなる $\epsilon > 0$ に対しても，$O(|R|^{1-\epsilon})$ 時間での近似アルゴリズムは存在しない．

定理 2 における最大独立集合問題の MC-nets を用いた提携構造形成問題への帰着は，ルール間の "両立不可能" な性質によるところが大きい．グラフの内部に "両立不可能" なエッジが存在しない場合，この提携構造形成問題は，最小カット問題の一般化であるマルチカット問題 [Vazirani 01] に等しい．

定義 6 (MC-nets による提携構造形成問題の混合整数計画法表現) $\sum_{r \in R'} v_r$ を最大化する，実現可能なルールの集合 R' を発見する問題は，以下のような整数計画法問題として表現できる．

$max \quad \sum_{r \in R} v_r \cdot x(r)$
$s.t. \forall e = (r, r')$, *where e is an "incompatible" edge,*
$x(r) + x(r') \leq 1$, — *(i)*
$\forall e = (r, r')$, *where e is*
a "compatible on different coalitions" edge,
$dis(e, r) = 0$, $dis(e, r') \geq 1$, — *(ii)*
$\forall e' = (r_1, r_2)$, *where e' is*
a "compatible on the same coalition" edge,
$dis(e, r_1) \leq dis(e, r_2) + (1 - x(r_1)) + (1 - x(r_2))$, — *(iii)*
$dis(e, r_2) \leq dis(e, r_1) + (1 - x(r_1)) + (1 - x(r_2))$, — *(iv)*
$\forall r \in R$, $x(r) \in \{0, 1\}$.

ルール r が選択されるとき，$x(r) = 1$ となる．制約 (i) は，"両立不可能" なエッジで結ばれたルールの組が存在しないことを保証する．また，制約 (ii) によって，"他提携で両立可能" なエッジ $e = (r, r')$ のそれぞれについて，e の距離／重みを $dis(e, r) = 0$ かつ $dis(e, r') \geq 1$ であると定義する．制約 (iii) と (iv) は，"同提携で両立可能" なエッジで結ばれているルールの組 r_1 と r_2 を同時に選択するならば，これらのルールの距離は必ず等しいことを保証する．また，$dis(e, r) = 0$ かつ $dis(e, r') \geq 1$ が成り立つとき，r と r' は互いに "同提携で両立可能" なエッジによって到達不可能であることが保証される．

この表現では，変数の数はルールの数に等しい．d_{in}，d_{cd}，d_{cs} をそれぞれ "両立不可能"，"他提携で両立可能"，"同提携で両立可能" なエッジの数であるとするとき，制約の数は $d_{in} + d_{cd}(2d_{cs} + 1)$ である．

4.2 SCG を用いた提携構造の形成

本節では，SCG を用いて提携構造形成問題の解を求める方法について述べる．

特性関数を SCG を用いて簡略に記述するとき，最適な提携構造 CS^* を求めるためには，SCG の要素である提携のみを考慮すればよい．

定理 3 $V(CS) = V(CS^*)$ *and* $\forall S \in CS, (S, v(S)) \in SCG$ を満たす提携構造 CS が必ず存在する．

定理 3 より，SCG をもとに最適な提携構造を探索することは，エージェントを財とし，SCG の要素である提携を入札と考えたとき，組合せオークションにおける勝者決定問題に等しく，またこれは重みつき集合充填問題に等しい [Sandholm 02]．

定理 4 *SCG を用いて特性関数を記述しているとき，最適な提携構造を発見することは NP 困難である．また，$\mathcal{NP} = \mathcal{ZPP}$ でなければ，いかなる $\epsilon > 0$ に対しても，$O(|SCG|^{1-\epsilon})$ 時間での近似アルゴリズムは存在しない．*

SCG を用いた提携構造形成問題は，組合せオークションと同様の手法によって，整数計画法問題として表現できる．

定義 7 (SCG による提携構造形成問題の整数計画法表現) *SCG* を利用した CS^* の探索は，以下のような整数計画法問題として表現できる．

$$\begin{aligned} max \quad & \sum_{(S, v(S)) \in SCG} v(S) \cdot x(S) \\ s.t. \quad & \forall a \in A, \sum_{S \ni a} x(S) = 1 \\ & x(S) \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

$x(S)$ は，S が CS^* に含まれれば 1，そうでなければ 0 となる．この整数計画法問題では，変数の数は SCG の要素の数に等しく，制約の数はエージェントの数に等しい．

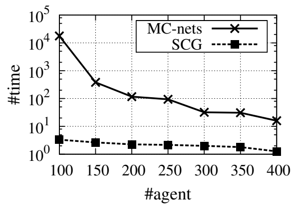

図 2: ルール／提携数を 100 に固定した場合

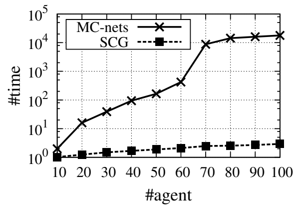

図 3: ルール／提携数とエージェント数が等しい場合

5. 評価実験

本章では，提案した手法を用いて提携構造形成問題を実際に解く計算機実験を行い，その性能を評価する．本論文で提示される実験は，Pentium4 3GHz プロセッサと 2GB メモリを搭載した Windows XP Professional SP2 マシンで行った．また，各手法で表現される整数計画法問題を解くため，市販の最適化エンジンである ILOG CPLEX 10.1 を使用した．

5.1 実験設定

本論文では，(i) ルール／提携の数を 100 に固定し，エージェント数を 100 から 400 の間で変化させる，(ii) ルール／提携の数とエージェントの数が等しいという条件のもと，これらの値を 10 から 100 の間で変化させるという 2 つの設定において，それぞれ MC-nets および SCG を利用して提携構造形成問題の解を発見するまでの時間を測定する実験を行った．

評価のための提携構造形成問題は，次のように生成した．SCG の場合，以下に示す減衰分布 (decay distribution) によって問題を生成した [Sandholm 02]．まず，ランダムなエージェント 1 人からなる提携を形成し，その提携に確率 α でランダムな他のエージェントを追加する．エージェントを追加しなくなるか，これ以上エージェントを追加できない場合は動作を終了し，1 つの提携を決定する．以上の動作を繰り返すことで任意個の提携を生成する．ただし，提携の重複は許さないとする．また，生成された提携のもたらす効用は，0 から提携に含まれるエージェント数の間の一様分布によって決定される．本論文では，$\alpha = 0.55$ とした．

MC-nets の場合，まず，SCG の場合と同様の手順によって，$(S, \{\}) \to v(S)$ なるルールを生成する．その後，確率 p で "存在しなければならない" エージェントを "存在してはならない" エージェントへと変化させる．本論文では，$p = 0.2$ とした．

5.2 考察

図 2，図 3 にそれぞれ設定 (i), (ii) における実験の結果を示す．横軸はエージェント数，縦軸は時間である．また，データ点は 50 問の提携構造形成問題の求解にかかる時間のうち中央値をプロットしている．図 2 では，エージェント数が増加するにつれて，問題の難易度は低下している．これは，ルール (または提携) の数，すなわちグラフ表現でのノードの数を固定している状況では，エージェントの数が増加するほどノード数に対するエッジの割合が疎になるためである．図 3 では，エージェント数／ルール数が増加するにつれて，問題の難易度は上昇している．これは，ルール数の増加にともなってノード数とエッジ数が増加し，問題の規模が大きくなるためである．以上の性質は，異なる設定においても基本的に同様である．

どちらの実験においても，整数計画法表現が簡潔な SCG は，高速に解を発見できるという点で，他の手法より優れている．さらに，SCG を用いた提携構造形成問題には，勝者決定問題に対する研究を利用することが可能である．MC-nets を用いた提携構造形成問題では，制約同士の繋がりを表す補助の変数を追加するため，制約の数は "独立" のエッジを除くエッジの総数に依存する．しかし通常，特性関数をより簡略に記述する能力では，MC-nets は SCG よりも優れている．

Rahwan らは，27 エージェントの存在する提携構造形成問題の解を 90 分以内で発見するアルゴリズムを提案した [Rahwan 07]．しかし，このアルゴリズムは $\Theta(2^n)$ 個の提携を入力として持つため，問題の規模はエージェント数に対して指数的に増加する．したがって，このアルゴリズムを大規模な問題に適用することは現実的でないといえる．

6. 結論

本論文では，MC-nets および SCG という特性関数の簡略記述法を利用することで，従来よりもはるかに大きな規模の提携構造形成問題を現実的な時間で解けることを示した．また，どの手法によっても，提携構造形成問題を解くことは NP 困難であり，ルールの数を N とするとき，いかなる $\epsilon > 0$ に対しても $O(N^{1-\epsilon})$ 時間の近似アルゴリズムは存在しないことを示し，混合整数計画法による問題の表現を提示した．実験の結果，提案手法を用いることで従来の手法よりもはるかに高速に解を発見できる．今後の課題として，これらの簡略記述法を利用して提携構造形成問題を解く anytime アルゴリズムまたは近似アルゴリズムの提案が挙げられる．

参考文献

[Conitzer 06] Conitzer, V. and Sandholm, T.: Complexity of Constructing Solutions in the Core Based on Synergies Among Coalitions., *Artificial Intelligence*, Vol. 170, No. 6, pp. 607–619 (2006)

[Ieong 05] Ieong, S. and Shoham, Y.: Marginal contribution nets: a compact representation scheme for coalitional games, in *Proc. of the 6th ACM Conf. on Electronic Commerce (ACM EC)*, pp. 193–202 (2005)

[Rahwan 07] Rahwan, T., Ramchurn, S. D., Dang, V. D., Giovannucci, A., and Jennings, N. R.: Anytime Optimal Coalition Structure Generation., in *Proc. of the 22nd Conf. on Artificial Intelligence (AAAI)*, pp. 1184–1190 (2007)

[Sandholm 97] Sandholm, T. and Lesser, V. R.: Coalitions among computationally bounded agents, *Artificial Intelligence*, Vol. 94, No. 1-2, pp. 99–137 (1997)

[Sandholm 02] Sandholm, T.: Algorithm for Optimal Winner Determination in Combinatorial Auctions, *Artificial Intelligence*, Vol. 135, No. 1-2, pp. 1–54 (2002)

[Vazirani 01] Vazirani, V. V.: *Approximation Algorithms*, Springer (2001)

[岡田 96] 岡田章：ゲーム理論, 有斐閣 (1996)