

# 1/fゆらぎによるカオスの縁の検出

Detecting the edge of chaos by 1/f noise

蜷川 繁

Shigeru Ninagawa

金沢工業大学情報学部

Division of Information and Computer Science, Kanazawa Institute of Technology

Based on "the edge of chaos" hypothesis and spectral analysis results of computationally universal cellular automata, it is reasonable to suppose that there is a relationship between 1/f noise and complex behavior in CAs. We use several methods to investigate the relationship in elementary cellular automata and one-dimensional two-state five-neighbor cellular automata. The results suggest that complex rules at the edge of chaos tend to exhibit 1/f noise.

## 1. はじめに

セルオートマトン (cellular automaton, CA) において, ルールを漸進的に変化させた場合, 規則的な振る舞いを示すルールからカオス的なルールへの変化の際に, 相転移に似た現象が発生することが知られており, カオスの縁 (edge of chaos) とよばれている. カオスの縁では複雑な振る舞いを示すルールが存在することがあり, それらのルールは計算万能性をもつと予想されている. これをカオスの縁仮説とよぶ [1].

2次元 CA のライフゲームは計算万能性をもつことが予想されているいっぽうで, ランダム初期様相から状態遷移を行ったセルの状態の時系列データが 1/f ゆらぎを示すことが知られている [2]. また, 単純セルオートマトン (elementary cellular automaton, ECA) とよばれる 1次元 2状態 3近傍セルオートマトンにおいてルール 110 は計算万能性をもつ [3] だけでなく, 1/f ゆらぎを示す [4]. これらの結果から計算万能性と 1/f ゆらぎの間には何らかの関連があると予想される.

カオスの縁仮説と万能セルオートマトンのスペクトル解析の結果をまとめると, 複雑なルールと 1/f ゆらぎとの間に関連があるのではないかと予想される. 本研究では ECA および 1次元 2状態 5近傍 CA (1-2-5CA) を対象にこの予想を検証する.

## 2. 単純セルオートマトンにおける複雑ルール

独立な ECA ルールは全部で 88 個ある [5] が, このなかでルール 54, 62, 110 は複雑な振る舞いを示すルールとして知られている. ステップ  $t$  における  $i$  番目のセルの状態を  $x_i(t)$  とすると, パワースペクトルは

$$\hat{x}_i(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_i(t) \exp(-i \frac{2\pi t f}{T}), \quad (1)$$

とフーリエ変換し

$$S(f) = \sum_i |\hat{x}_i(f)|^2, \quad (2)$$

で求め,  $f = 1 \sim 10$  の範囲で最小自乗法により  $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f$  と近似して傾き  $\beta$  を求める. また残差平方和  $\sigma^2$  を

連絡先: e-mail: ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp

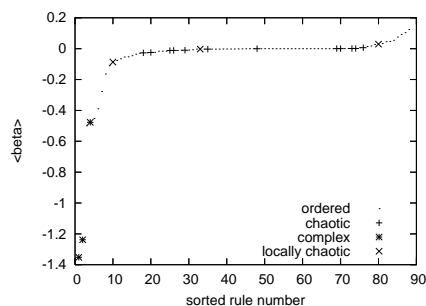


図 1: 昇順にソートした 88 個の単純セルオートマトンのパワースペクトルの傾きの平均値  $\langle \beta \rangle$ . 規則的ルール ( $\cdot$ ), カオス的ルール ( $+$ ), 複雑ルール ( $*$ ), 局所カオスルール ( $\times$ ).

次式で求める.

$$\sigma^2 = \frac{1}{f_r} \sum_{f=1}^{f_r} (\ln(S(f)) - \alpha - \beta \ln(f))^2,$$

ただし  $T = 1024$ ,  $f_r = 10$  とした. 本研究を通してセル数 1000 のランダム初期様相を用い, 周期境界条件を用いる. 一般に 1次元セルオートマトンは初期様相による諸量の変動が大きいので, 100 回の平均値  $\langle \beta \rangle$  を求める. 88 個のルールの  $\beta$  の昇順にソートした結果を図 1 に示す.

ここで 1/f ゆらぎの条件として  $\langle \beta \rangle \leq -0.8$  かつ  $\langle \sigma^2 \rangle \leq 0.1$  を要請すると, この条件を満たすものはルール 62 と 110 だけであり, ルール 54 は条件を満たさない.

## 3. 5近傍セルオートマトン

次に 5近傍に拡張した CA において, 同様の実験を行う. 1-2-5CA の状態遷移関数は  $F$  は次式で定義され,

$$x_i(t+1) = F(x_{i-2}(t), x_{i-1}(t), x_i(t), x_{i+1}(t), x_{i+2}(t)),$$

各ルールは次の 32 ビット (または 16 進数 8 桁) で指定される.

$$F(1, 1, 1, 1, 1)F(1, 1, 1, 1, 0) \cdots F(0, 0, 0, 0, 1)F(0, 0, 0, 0, 0).$$

本研究では  $F(0,0,0,0,0) = 0$  かつ左右対称なルールのみを扱う。

テーブルウォークスルー法によって 507 個のルールを生成し、時空間パターンにおける振る舞いをもとにそれらのルールを分類したところ、規則的なルールは 311 個、カオス的なルールは 155 個、複雑なルールは 20 個、その他のルールは 21 個だった。その他のルールのほとんどは局所カオスルールだった。今回、複雑なルールの基準として次の 3 つの条件を決めた。

- 定常的なパターンが存在する
- 左および右に伝播するパターンが存在する
- 上記のパターンの相互作用が存在する

これらの条件をすべて満たすものを複雑ルールとした。

### 3.1 相互情報量による分類

1024 ステップにわたるセルの状態  $x_i(t)$  を確率変数  $X$ ,  $x_i(t+1)$  を確率変数  $Y$  とみなしそれらの相互情報量  $I(X, Y)$  を次式で求める。

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y),$$

ただし  $H(\cdot)$  はそれぞれの引数のエントロピーを表し、次式で定義される。

$$H = - \sum_{j=0}^1 p_j \log_2 p_j.$$

ここで  $p_j (j = 0, 1)$  は 1024 ステップ中、状態 0 および 1 が現れる確率を表す。すべてのルールについて 10 回の平均値を求めた結果を図 2 に示す。これより複雑ルールはカオスのルールと周期的ルールの間値をとることがわかる。

### 3.2 摂動拡大率による分類

中央部の連続した  $L_i$  セルのみが互いに異なる 2 つの初期様相からそれぞれ独立に  $T$  ステップ状態遷移した様相を左からスキャンした場合に状態が異なる最初のセルの位置を  $d_L(T)$  とし、右から同様にスキャンした場合の位置を  $d_R(T)$  とする ( $d_L(T) \leq d_R(T)$ )。摂動拡大率  $\gamma$  を次式で定義する。

$$\gamma = \frac{d_R(T) - d_L(T) - L_i}{T}.$$

ここでは  $L_i = 10$ ,  $T = 100$  とし、10 回の平均値  $\langle \gamma \rangle$  を求めた結果を図 3 に示す。これより複雑ルール ( および局所カオスのルール ) はカオスのルールと周期的ルールの間値をとることがわかる。

### 3.3 パワースペクトルによる分類

ECA と同じ条件でパワースペクトルを求めた。ただし、傾き  $\beta$  は  $f = 1 \sim 100$  の範囲で求め、10 回の平均値を求めた結果を図 4 に示す。

ECA の場合と同じ  $1/f$  ゆらぎの条件を満たすものは 311 個の規則的ルール中 8 ルール、155 個のカオス的なルール中 1 ルール、20 個の複雑ルール中 10 ルール、21 個のその他のルール中 7 ルールであった。複雑ルールのうち  $1/f$  ゆらぎの条件を満たさないものは過渡状態が比較的短いという特徴がみられた。複雑ルールのうち  $1/f$  ゆらぎの条件を満たすルール ( 80264304 ) と満たさないルール ( 6C839D56 ) の時空間パターンを図 5 に示す。

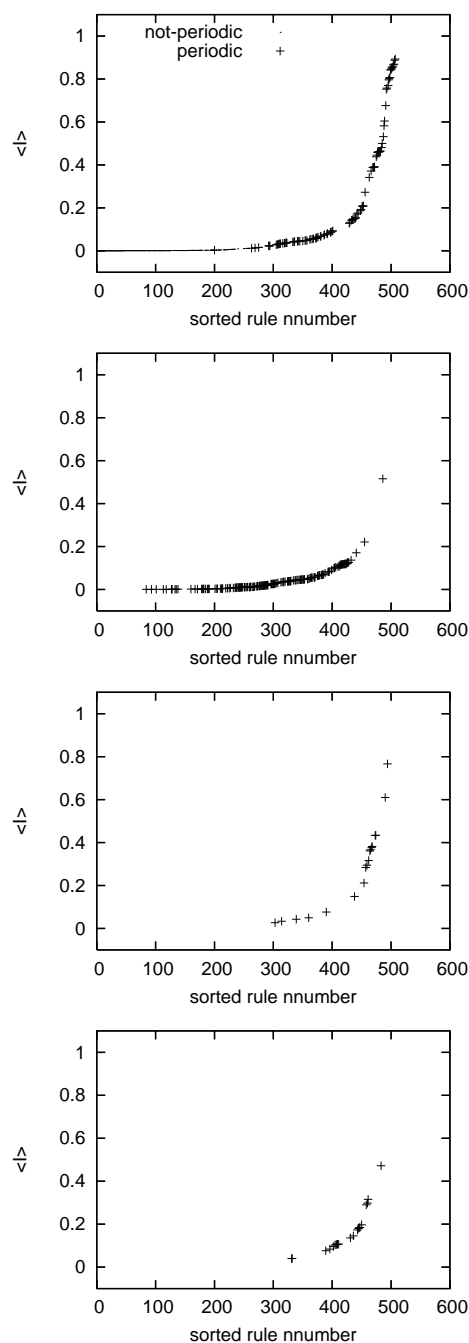


図 2: 昇順に並べた 1-2-5CA の平均相互情報量。上から規則的ルール、カオス的なルール、複雑ルール、その他のルール。規則的ルールは周期的ルール (+) と一様ルール (·) に分かれる。

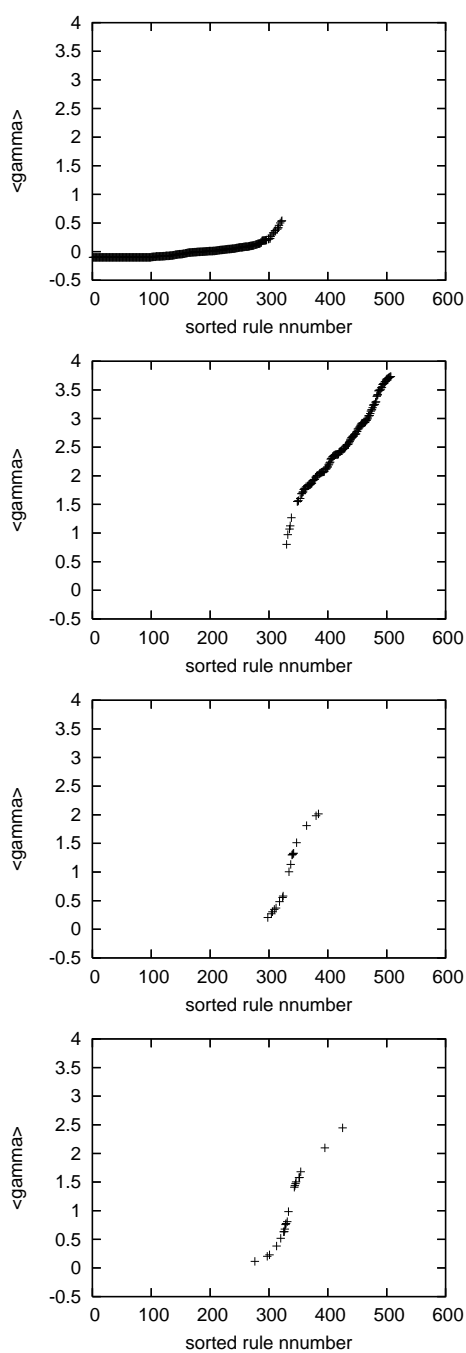


図 3: 昇順に並べた 1-2-5CA の摂動拡大率．上から規則的ルール，カオスのルール，複雑ルール，その他のルール．

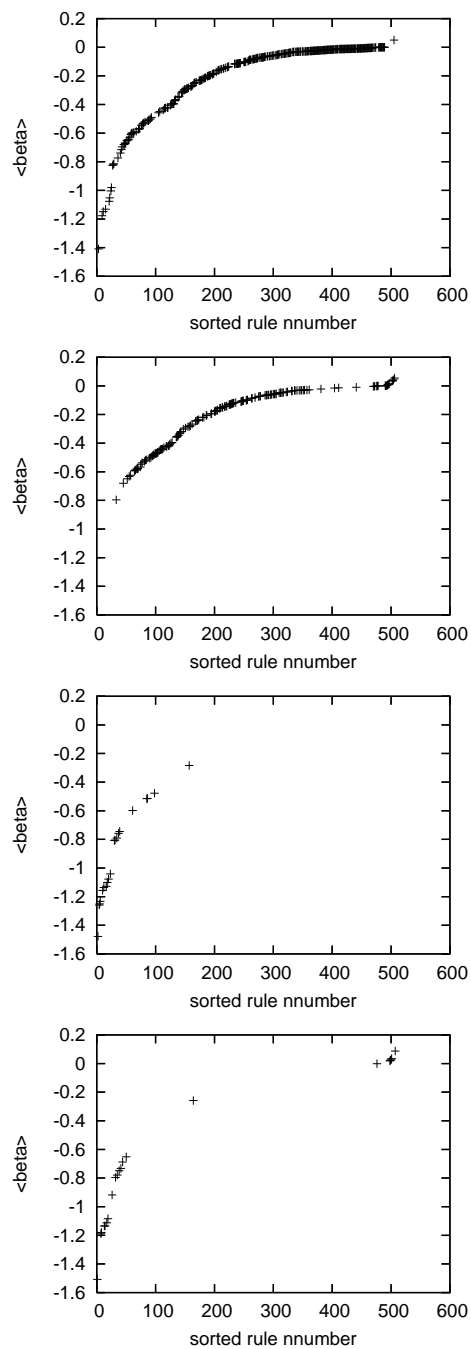


図 4: 昇順に並べた 1-2-5CA のパワースペクトルの傾き．上から規則的ルール，カオスのルール，複雑ルール，その他のルール．

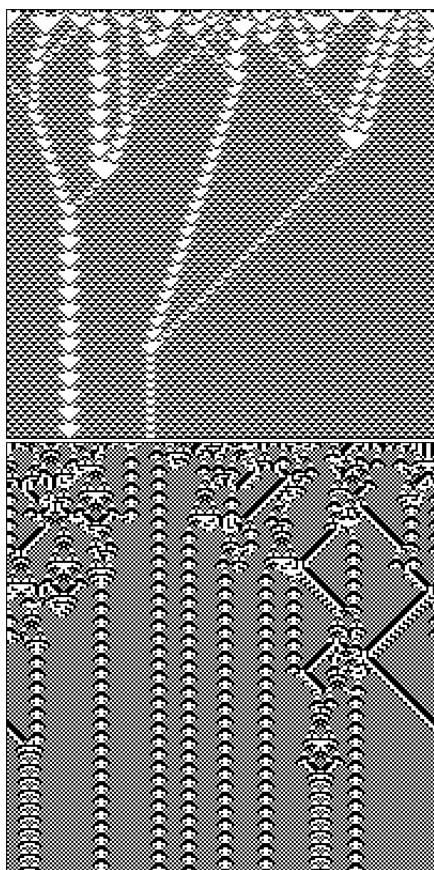


図 5: 複雑ルールのうち  $1/f$  ゆらぎの条件を満たすルール (80264304) (上) と満たさないルール (6C839D56) (下) の時空間パターン。

また,  $1/f$  ゆらぎの条件を満たす規則的ルール (71D1A5BE) (上) とカオスのルール (0102410C) (下) の時空間パターンを図 6 に示す。規則的なルールのうち  $1/f$  ゆらぎの条件を満たすものは過渡状態が長いという特徴がみられた。これらの結果から過渡状態の長さが, 低周波域におけるパワースペクトルの傾きに影響を与えることがわかる。

#### 4. 終りに

本研究ではカオスの縁にあるルールが  $1/f$  ゆらぎを示すことを検証することを目的として ECA および 1-2-5CA を対象として実験を行った。ECA では複雑ルールとされてきた 3 つのルールのうち 2 つが  $1/f$  ゆらぎを示した。1-2-5CA では 507 個のルール中, 複雑ルールとされた 20 ルールのうち, 10 ルールが  $1/f$  ゆらぎを示した。この結果はカオスの縁に位置する複雑ルールが  $1/f$  ゆらぎを示す傾向はあるものの, 複雑ルールでありながら  $1/f$  ゆらぎを示さないものや, 複雑ルールでなくても  $1/f$  ゆらぎを示すものがあることを示している。複雑ルールでありながら  $1/f$  ゆらぎを示さないルールは一般に過渡状態が短く, 逆に複雑ルールでなくても  $1/f$  ゆらぎを示すルールは比較的, 長い過渡状態をもつ。このことから過渡状態の長さがパワースペクトルの傾きに影響を及ぼしていることが推測される。

当初, カオスの縁仮説はより大きな CA 空間において観測された [1]。本研究で扱ったような小さな CA 空間ではルール

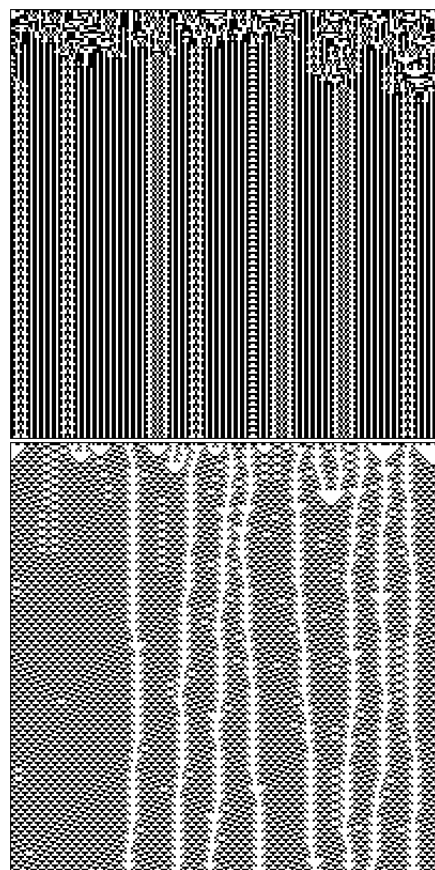


図 6:  $1/f$  ゆらぎの条件を満たす規則的ルール (71D1A5BE) (上) とカオスのルール (0102410C) (下) の時空間パターン。

がまばらに点在しているため, カオスの縁が観測しにくいことが考えられる。今後はより大きな CA 空間でカオスの縁と  $1/f$  ゆらぎの関係を調べる予定である。

#### 謝辞

本研究は科研費 (20500216) の助成を受けたものである。

#### 参考文献

- [1] Langton, C. G.: Computation at the Edge of Chaos: Phase Transitions and Emergent Computation. *Physica D* **42** 12-37 (1990).
- [2] Ninagawa, S., Yoneda, M., Hirose, S.:  $1/f$  Fluctuation in the "Game of Life". *Physica D* **118** 49-52 (1988).
- [3] Cook, M.: Universality in Elementary Cellular Automata. *Complex Systems* **15** 1-40 (2004).
- [4] Ninagawa, S.: Power Spectral Analysis of Elementary Cellular Automata. *Complex Systems* **17** 399-411 (2008).
- [5] Li, W. and N. Packard.: The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space, *Complex Systems* **4** 281-297 (1990)