3C4-01

通信量を制限したセルラーオートマトン上での最適時間一斉射撃アルゴリズムの設計

Firing Squad Synchronization Algorithms for Communication-Restricted Cellular Automata

柳原 崇 † Takashi YANAGIHARA†
金澤 優 † Masaru KANAZAWA†
梅尾 博司 † Hiroshi UMEO†

† 大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻
†Osaka Electro-communication Univ., Graduate School of Engineering

Abstract In the long history of the study of cellular automata, the amounts of bit-information exchanged at one step between neighboring cells have been assumed to be O(1)-bit. In the present paper, we introduce a new class of cellular automata, $\mathrm{CA}_{k\text{-bit}}$, whose inter-cell communication is restricted to k-bit and propose several time-optimum or nearly optimum synchronization algorithms on $\mathrm{CA}_{k\text{-bit}}$ in the case where k=1 and k=2. We show that there exists a six-state $\mathrm{CA}_{2\text{-bit}}$ that can synchronize any one-dimensional n cells in $2n$-2 optimum steps.

1. はじめに

1957 年, J. Myhill によりセルラーオートマトン (CA と略す) 上での一斉射撃問題が提唱され, M. Minsky [4] により $3n$+O($\log n$) ステップ (n はセル数) で動作する一斉射撃アルゴリズムが世界で初めて提案されて以来, 一斉射撃問題に関する研究は数多くなされている. 代表的な 1 次元一斉射撃アルゴリズムとして, Balzer [1], Mazoyer [2], Waksman [9] らによる $2n-2$ ステップ最適時間アルゴリズムが知られており, Mazoyer [2] による 6 状態アルゴリズムは内部状態数が最も少ないものとして知られている. 一方, 従来の CA において隣接するセル間の通信量は O(1) ビットとされてきたが, セル間の通信量に関する研究は前例が少なく, これまであまりなされていない. 本稿では, セル間の相互通信量を k ビットに制限した $\mathrm{CA}_{k\text{-bit}}$ 上での一斉射撃アルゴリズムを提案する.

2. 通信量を制限したセルラーオートマトン

$\mathrm{CA}_{k\text{-bit}}$ とは, 従来のセルラーオートマトンのセル間通信量に制限を加えたものである. k ビット通信セルラーオートマトン ($\mathrm{CA}_{k\text{-bit}}$ と略す) とは, Mazoyer [3], Umeo and Kamikawa [7, 8] らによって考案された計算モデルで, セルと呼ばれる有限オートマトンの集合を, k ビットの通信リンクで双方向に接続したものである. 各セルを 1 次元アレイ状に接続したものを 1 次元 $\mathrm{CA}_{k\text{-bit}}$ と定義する (図 1). 1 次元 $\mathrm{CA}_{k\text{-bit}}$ 上の全てのセルは時刻 t において自身の内部状態と隣接するセルからの k ビットの情報を同時に読み取り, 同一の遷移規則集合を参照することにより, 時刻 $t+1$ における自身の内部状態と隣接するセルへの k ビットの情報を決定する. 全てのセルはこの処理を同時に行い, これを状態遷移と呼ぶ. また 1 回の状態遷移に必要な時間を 1 ステップと定義する. 本稿では $k=1$ 及び $k=2$ の場合の $\mathrm{CA}_{1\text{-bit}}$, $\mathrm{CA}_{2\text{-bit}}$ を考察の対象とし, これらの計算モデルの上で一斉射撃問題を解決するアルゴリズムを提案する.

3. 一斉射撃問題

一斉射撃問題 (Firing Squad Synchronization Problem, FSSP と略す) とは CA の同期に関する問題であり, 局所的な通信のみが可能なモデルにおいてモデル全体を制御することができるアルゴリズムの存在と, その証明のための問題の一つである.

連絡先: {yanagihara, masaru, umeo}@cyt.osakac.ac.jp

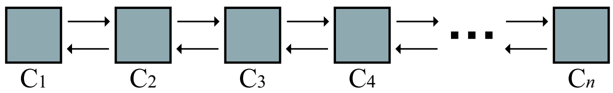

図 1: 1 次元 $\mathrm{CA}_{k\text{-bit}}$

FSSP では時刻 $t=0$ において, 将軍と呼ばれるセルから同期を開始する信号を発信し, 未来のある時刻 $t=\alpha$ において全てのセルが同時に射撃状態と呼ばれる特別な状態に遷移するように遷移規則を決定する. 射撃状態はセルが同期する課程において発生してはならない. 将軍より発信された最初の信号が到達する前のセルを静止状態と呼び区別する. また, ある次元における FSSP において, 最小の時間にて動作する一斉射撃アルゴリズムを最適時間一斉射撃アルゴリズムと呼ぶ.

4. Mazoyer による一斉射撃アルゴリズム

本節では, 考案した一斉射撃アルゴリズムのベースとなる Mazoyer [2] の一斉射撃アルゴリズムについて説明する. Mazoyer [2] の一斉射撃アルゴリズムは, 従来の 1 次元 CA 上で動作するアルゴリズムであり, セル間の通信量は O(1) ビットである. 図 2 に Mazoyer による一斉射撃アルゴリズムの時間空間図式を示す.

最初にセル空間全体の初期状態を設定する. Mazoyer [2] の一斉射撃アルゴリズムは時刻 t=0 の時点で信号を発する将軍状態 G が左端のセルに限定されるため, 左端のセル C_1 を G 状態としそれ以外のセルは静止状態 Q とする. 時刻 $t=0$ より G 状態を保有するセル C_1 は右側のセル C_2 に信号を発する. その信号を受けたセル C_2 が時刻 $t=1$ に更に右側のセル C_3 に信号を送る. この処理を右端のセル C_n に信号が到達するまで行うことで $\frac{1}{1}$ 波が生成される. そして $\frac{1}{1}$ 波は, 時刻 $t=0$ にセル C_1 が G 状態, 時刻 $t=1$ にセル C_2 が C 状態, 時刻 $t=2$ にセル C_3 が A 状態, 時刻 $t=3$ にセル C_4 が G 状態, 時刻 $t=4$ に C_5 が C 状態, 時刻 $t=5$ にセル C_6 が A 状

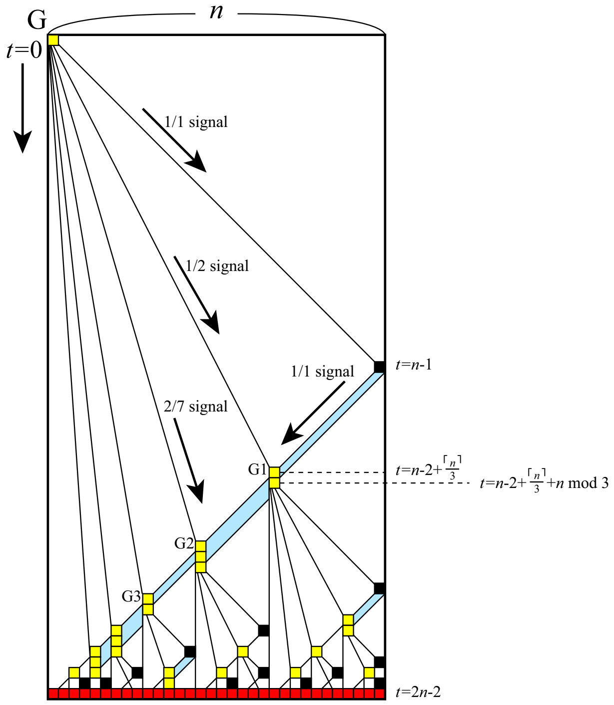

図 2: Mazoyer による一斉射撃アルゴリズム

態 ⋯ と 3 種類の状態を用いることによりセル空間を 2:1 に分割するための n mod 3 を計算する．

時刻 $t = n - 1$ においてセル C_n に到達した $\frac{1}{1}$ 波は信号を反射させ, 左側のセル C_{n-1} に信号を送ることで反射 $\frac{1}{1}$ 波を生成する．この時点でセル空間の n mod 3 が判明するため, それにより反射 $\frac{1}{1}$ 波の内部状態と分割するセル空間のうちの右側のセル空間を遅延させるステップ数が決定する．セル空間を 2:1 に分割する 2:1 波はそれぞれ $\frac{1}{2}$ 波, $\frac{2}{7}$ 波, $\frac{4}{23}$ 波, $\frac{8}{83}$ 波 ⋯ となり, セル数 n が大きければ大きいほど波の数も増加する．反射 $\frac{1}{1}$ 波と 2:1 波が衝突した地点に新たに G 状態を生成し, 反射 $\frac{1}{1}$ 波を左側のセルに, 分割したセル空間を同期させる信号が右側のセルに発せられる．このようにセル空間を 2:1 に分割する過程を再帰的に行い, セル空間が分割しきれなくなった時点で射撃状態を生成し, FSSP を解決するアルゴリズムである．

5. CA1-bit 上での 2n-1 ステップ一斉射撃アルゴリズム

本節では, CA1-bit 上での一斉射撃アルゴリズム $\mathcal{A}_1$ について述べる．一斉射撃アルゴリズム $\mathcal{A}_1$ は Mazoyer [2] をベースとしたアルゴリズムである．図 3 は一斉射撃アルゴリズム $\mathcal{A}_1$ を計算機上に実装したものである．図中の横配列が一次元 CA1-bit であり, 縦が時間の流れを表している．各々の正方形の升がセルであり, 升の中心に書かれている記号が内部状態, 左右に書かれている黒い三角形が隣接セルへのビット送信を表している．

セル空間を 2:1 に分割する信号は A, B, C の三種類の状態を用いて制御しているが, 最初に生成される 2:1 波のみは別の方法を以って制御する．これは左端の将軍状態 G を保有するセル C_1 が左側のセル C_2 に信号を送る際, 通信量の制限により一種類の遷移しか行うことができないためである．$\frac{1}{1}$ 波を受け

図 3: CA1-bit 上での同期アルゴリズム

たセルは自身をカウンティングし, 左側のセルからの信号を待つ．セル C_1 から $t = 1$ の時点で右側のセルに信号を発し, 信号を受けたセル C_2 は 1 ステップ経過後, $t = 3$ の時点で右側のセル C_3 に信号を発する．この制御を繰り返すことにより $\frac{1}{2}$ 波が形成され, 最初の 2:1 波となる．以降の 2:1 波は Mazoyer [2] と同様のアルゴリズムを用いて制御する．

セル間通信量が限定されているため, $\frac{1}{2}$ 波と反射 $\frac{1}{1}$ 波が衝突したセルより左側のセル空間は反射 $\frac{1}{1}$ 波と 2:1 波の制御に用いる信号を区別することができないため, $\frac{1}{2}$ 波と反射 $\frac{1}{1}$ 波の衝突後 1 ステップ遅く反射 $\frac{1}{1}$ 波が送られる．そのため 2:1 波の A, B, C の情報を保有するセルは, 1 → 2 → 1 ⋯ とカウンティングを行い, カウンティングが 1 の状態で右側のセルから信号を受けた場合を反射した $\frac{1}{1}$ 波の認知に, カウンティングが 2 の状態で右側のセルから信号を受けた場合を 2:1 波の制御に用いる．反射 $\frac{1}{1}$ 波が 1 ステップ遅く送られるため, このアルゴリズムを再帰的に用いると再起した回数分, 同期が遅くなってしまう．そのため, 最初の 2:1 点探査により生成された将軍状態より右側のセル空間は再帰的なアルゴリズムを用い, 左側のセル空間は右側の各将軍状態から 1 ステップ早く信号を送り, 新たに出現した静止状態のセル空間にカウンティングする要素を組み込むことに最適時間にて動作するアルゴリズムを用いている．全体のセル空間は最適時間より 1 ステップ遅い 2n-1 にて動作するアルゴリズムとなる．

$\mathcal{A}_1$ を計算機上に実装し, セル数 n を $2 \leqq n \leqq 1000$ とした場合の全てにおいてシミュレーションを行い, 正常に動作することを確認した．以下に定理を記す．

[定理 1] 任意の n ($n \geqq 2$) に対して，n 個のセル空間を $2n-1$ ステップで同期させる CA$_{\text{1-bit}}$ $\mathcal{M}_1$ が存在する．$\mathcal{M}_1$ の内部状態数は 54，遷移規則数は 207 である．

6. CA$_{\text{2-bit}}$ 上での最適時間一斉射撃アルゴリズム

本節では CA$_{\text{2-bit}}$ 上での一斉射撃アルゴリズム $\mathcal{A}_2$ について述べる．一斉射撃アルゴリズム $\mathcal{A}_2$ は Mazoyer [2] をベースとしたアルゴリズムである．図 4 は一斉射撃アルゴリズム $\mathcal{A}_2$ を計算機上に実装したものである．図中の横配列が一次元 CA$_{\text{2-bit}}$ であり，縦が時間の流れを表している．各々の正方形の升がセルであり，升の中心に書かれている記号が内部状態，左右に書かれている黒い三角形が隣接セルへのビット送信を表している．$\mathcal{A}_2$ は $\mathcal{A}_1$ とは異なり，通信量の増加により最初の $\frac{1}{1}$ 波から A, B, C の内部状態を順に持たせることができるため，全て再起的に動作する．全体のセル空間は最適時間にて同期するアルゴリズムである．

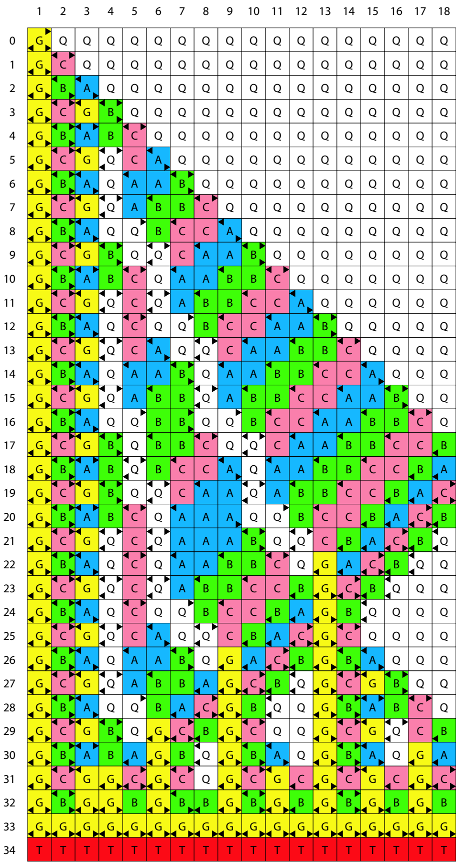

図 4: CA$_{\text{2-bit}}$ 上での最適時間同期アルゴリズム

$\mathcal{A}_2$ を計算機上に実装し，セル数 n を $2 \leqq n \leqq 1000$ とした場合の全てにおいてシミュレーションを行い，正常に動作することを確認した．以下に定理を記す．

[定理 2] 任意の n ($n \geqq 2$) に対して，n 個のセル空間を $2n-2$ ステップで同期させる CA$_{\text{2-bit}}$ $\mathcal{M}_2$ が存在する．$\mathcal{M}_2$ の内部状態数は 6，遷移規則数は 60 である．

7. おわりに

本稿では，CA$_{\text{1-bit}}$ 上での 2n-1 ステップ一斉射撃アルゴリズム並びに CA$_{\text{2-bit}}$ 上での 2n-2 ステップ一斉射撃アルゴリズムを設計し，計算機上への実装を行った．

参考文献

[1] R. Balzer: An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, vol. 10 , pp. 22-42(1967).

[2] J. Mazoyer: A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Theoretical Computer Science*, vol. 50, pp. 183-238(1987).

[3] J. Mazoyer: A minimal time solution to the firing squad synchronization problem with only one bit of information exchanged, Ecole Normale Superieured Lyon, *Technical report*, No. 89-03, p. 51, April(1989).

[4] M. Minsky: *Computation: Finite and infinite machines*. Prentice Hall, pp. 28-29(1967).

[5] E. F. Moore: The firing squad synchronization problem. in *Sequential Machines, Selected Papers* (E. F. Moore, ed.), Addison-Wesley, Reading MA. pp. 213-214(1964).

[6] H. Umeo: A design of cellular algorithms for 1-bit intercell communications and related cellular algorithms. *Proc. of MCU'98*, Vol. 1, pp. 210-227(1998).

[7] H. Umeo and N. Kamikawa: A design of real-time non-regular sequence generation algorithms and their implementations on cellular automata with 1-bit inter-cell communications. *Fundamenta Informaticae*, 52, No.1-3, pp.255-273, (2002).

[8] H. Umeo and N. Kamikawa: An infinite prime sequence can be generated in real-time by a 1-bit inter-cell communication cellular automaton. *Proc. of The Sixth Internal Conference on Developments in Language Theory*, (Eds. M. Ito and M. Toyama), LNCS 2450, pp.339-348, (2002).

[9] A. Waksman: An optimum solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, vol. 9 , pp. 66-78(1966).

[10] 柳原, 金澤, 梅尾: 1 次元 1 ビット通信セルラーオートマトン上での 3n ステップ一斉射撃アルゴリズムの設計. 平成 16 年度電気・情報関連学会中国支部連合大会 (第 55 回) 論文集, pp. 267(2004).

[11] J. B. Yunès: Seven-state solution to the firing squad synchronization problem. *Theoretical Computer Science*, 127, pp.313-332(1966).