4C1-5

下限制約と初期保有財を考慮した学校選択メカニズムの特徴付け

A characterization of the mechanism for a school choice problem with minimum quotas and initial endowments

山口 知晃 Tomoaki Yamaguchi　張 語哲 Yuzhe Zhang　濱田 直斗 Naoto Hamada　鈴木 貴晶 Takamasa Suzuki　横尾 真 Makoto Yokoo

九州大学 システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

This paper considers an assignment problem of multiple types of goods to agents, where each good may have more than one copy (e.g. multiple seats of a school) but the minimum/maximum numbers of consumption of each good are constrained, and each agent initially owns a good (e.g. each student's local school). In this setting, a mechanism called Top Trading Cycles among Representatives with Supplementary Seats (TTCR-SS) was introduced. TTCR-SS utilizes a priority order among agents, and it was shown that it is strategy-proof, individually rational, and Pareto efficient. In this paper, we further investigate theoretical properties of TTCR-SS and give a full characterization of the mechanism by the above three properties, combined with the four natural properties defined on prioritized agents. We also show that TTCR-SS satisfies the properties which are more desirable than strategy-proofness and individual rationality.

1. 序論

公立学校へ学生を割り当てる際，学生の住居と学校の地理的状況等を踏まえて割当を決定する．このとき，学生に入学する学校を選択する機会を与える公的な制度として学校選択制が存在する．文献 [Abdulkadiroğlu 03] では，学校選択制を不可分財（学校）の持つ容量（シート）をエージェント（学生）に割り当てる問題として形式化することでメカニズムデザインの応用例になると紹介している．

本論文では学校側に学生数の下限制約が存在する問題を考察する．下限制約は学校運営の都合上，学校側が最低限必要な人数を割り当てられることを保証する制約である．本論文で扱う問題では，学生は初期保有財を持つと仮定する．学校選択制における初期保有財とは，学生の居住区にある学校等，学校選択制を用いない場合に本来割り当てられる学校を指す．ゆえに全学生が初期保有財に割り当てられるときは，下限制約を満たすとする．ほとんどの場合，学生は自身の居住区から遠く離れた学校に行きたいとは考えない．そのため，マッチングメカニズムには個人合理性，すなわち，初期保有財より好まない学校に学生を割り当てないことを保証する性質が望まれる．

文献 [Kurata 16] は下限制約と初期保有財が存在する問題を扱うメカニズムとして，Top Trading Cycles（TTC）メカニズム [Shapley 74] をもとにした Top Trading Cycles among Representatives with Supplementary Seats（TTCR-SS）を提案し，TTCR-SS が個人合理性に加えて耐戦略性及びパレート効率性を満たすことを示した．本論文では，耐戦略性を強めた性質である集団的耐戦略性や，個人合理性を強めたコア安定性も TTCR-SS が満たすことを示す．また，TTC メカニズムに基づいたメカニズムの特徴付けを行った文献は数多く存在する [Dur 13] が，TTCR-SS の特徴付けに関する研究は存在しない．特徴付けとは，メカニズムが所望の性質を満たし，かつその性質を満たすものはそのメカニズムのみであることを示すことである．特徴付けを行うことで所望の性質を満たすメカニズムについてこれ以上研究の余地がないことが示せる．本論文では新たに初期保有学生に関する単調性，学校のシート数に関する単調性，相思相愛性，弱整合性を提案し，これらの 4 性質を TTCR-SS が満たすことを示す．さらにこれらの性質に個人合理性，耐戦略性，パレート効率性を加えた 7 性質によって TTCR-SS が特徴付けられることを示す．

2. モデル

学校選択制における市場 π は $(S, C, X, q_C, p_C, \omega, \succ_S)$ の組で定義される．$S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ は n 人の学生の集合であり，$C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ は m 校の学校の集合である．$X = S \times C$ は契約の集合であり，$x = (s, c) \in X$ は学生 s が学校 c に割り当てられることを示す．$X' \subseteq X$ に対して，X'_s は $\{(s, c) \in X' \mid c \in C\}$ を，X'_c は $\{(s, c) \in X' \mid s \in S\}$ を意味する，$q_C = (q_c)_{c \in C}$ は学校の割当人数に関する上限のベクトルであり，$p_C = (p_c)_{c \in C}$ は学校の割当人数に関する下限のベクトルである．ω: $S \to C$ は初期保有財の関数である．$\omega(s)$ は学生 s の初期保有財である学校 $c \in C$ を出力する．$\omega(s) = c$ であるとき，c は s の**初期保有学校**と呼び，s は c の**初期保有学生**と呼ぶ．ω^{-1}: $C \to 2^S$ は初期保有学生の関数である．$\omega^{-1}(c)$ は学校 c の初期保有学生の集合 $T \subseteq S$ を出力する．ただし，c が初期保有学生を持たない場合，$\omega^{-1}(c) = \emptyset$ である．X^* を $\bigcup_{s \in S}\{(s, \omega(s))\}$ とし，各学生とその学生の初期保有学校との契約の集合を示す．また，$\sum_{c \in C} p_c \le n \le \sum_{c \in C} q_c$ であり，任意の学校 $c \in C$ に対して，$p_c \le |X^*_c| \le q_c$ が成り立つとする．$\succ_S = (\succ_s)_{s \in S}$ は学生側が持つ選好順序である．各学生が持つ選好順序 $\succ_s$ は厳密に X_s の中の契約にのみ順序付けられている．契約 (s, c) において，$(s, c) \succ_s (s, \omega(s))$ または $c = \omega(s)$ が成り立つならば，(s, c) は s にとって**受け入れ可能**と呼ぶ．また，本論文では $(s, c) \succ_s (s, c')$ の代わりに $c \succ_s c'$ という表記を用いる場合がある．また，$\succ_{-s}$ は，$\succ_{-s} = (\succ_{s'})_{s' \in S \setminus \{s\}}$ を示す．また，$T \subseteq S$ が与えられたとき，$\succ_T = (\succ_{s'})_{s' \in T}$ であり，$\succ_{-T} = (\succ_{s'})_{s' \in S \setminus T}$ である．

ある契約の集合 $X', X'' \subseteq X$ に対して，以下の (i)，(ii) のいずれかが成り立つならば，$X'_s \succ_s X''_s$ とする．(i) 学生 s にとって受け入れ可能な契約 $x', x'' \in X_s$ に対して，$X'_s = \{x'\}$

連絡先: 山口知晃，九州大学大学院システム情報科学府，812-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，yamaguchi@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

かつ $X''_s = \{x''\}$ かつ $x' \succ_s x''$ である．(ii) 学生 s にとって受け入れ可能な契約 $x' \in X_s$ に対して，$X'_s = \{x'\}$ かつ $X''_s = \emptyset$ である．さらに，$X'_s \succ_s X''_s$ または $X'_s = X''_s$ の少なくとも一方が成り立つならば $X'_s \succeq_s X''_s$ とする．また，$X'_s \subseteq X_s$ に対して，$X'_s = \{x\}$ かつ x が s にとって受け入れ可能である場合，X'_s は受け入れ可能であると呼ぶ．全ての学生 $s \in S$ において X'_s が受け入れ可能であるならば，$X' \subseteq X$ は**個人合理的**であるという．また，X' が個人合理的，かつ，全ての学校 $c \in C$ において $p_c \leq |X'_c| \leq q_c$ が成り立つならば，X' は**マッチング**と呼ぶ．注意すべき点として，この定義により任意のマッチングは個人合理的である．つまり，全ての学生は自身の選好順序において少なくとも初期保有学校と同等以上に好む学校に割り当てられる．また，X^* はマッチングである．

市場を入力としマッチングを出力する関数を**メカニズム**という．メカニズムは ϕ で表され，$\phi[\pi]$ は市場 π においてメカニズム ϕ が出力するマッチングを示し，$\phi_s[\pi]$ を $\{(s,c) \in \phi[\pi] \mid c \in C\}$ とする．メカニズムに望まれる性質を以下に示す．

定義 1 (個人合理性) メカニズムが常に個人合理的な契約の集合を出力する場合，そのメカニズムは**個人合理性**を満たすという．

定義 2 (耐戦略性) 学生 $s \in S$ の異なる選好順序 $\succ_s, \succ'_s$ に関する市場 $\pi = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, (\succ_s, \succ_{-s}))$ と $\pi' = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, (\succ'_s, \succ_{-s}))$ について考える．メカニズム ϕ が全ての $s \in S, \succ_s, \succ'_s, \succ_{-s}$ で $\phi_s[\pi] \succeq_s \phi_s[\pi']$ を満たすならば，ϕ は**耐戦略性**を満たすという．

定義 3 (パレート効率性) マッチング X', X'' において，$\forall s \in S, X'_s \succeq_s X''_s$ と $\exists s \in S, X'_s \succ_s X''_s$ を満たすならば，X' は X'' を**パレート支配**するという．あるマッチングが**パレート効率的**であるとは，そのマッチングをパレート支配する他のマッチングが存在しないことをいう．また，メカニズムが常にパレート効率的なマッチングを出力する場合，メカニズムは**パレート効率性**を満たすという．

有向グラフ G とは頂点の集合 V と V に含まれる頂点の順序対の集合 $E \subseteq \{(i,j) \mid i,j \in V\}$ による組合せ (V,E) のことをいう．また，$i,j \in V$ において順序対 (i,j) を i から j への**有向エッジ**という．有向グラフ (V,E) 上の $k \geq 2$ となる頂点の連鎖 $(i_1, \ldots, i_k)$ において全ての $1 \leq h \leq k-1$ で $(i_h, i_{h+1}) \in E$ が成り立つ場合，$(i_1, \ldots, i_k)$ は頂点 i_1 から頂点 i_k への**有向パス**といい，$i_1 = i_k$ ならば，この有向パスを**サイクル**という．

3. Top Trading Cycles among Representatives with Supplementary Seats

初期保有財を考慮しつつエージェントの満足度を改善するメカニズムの一つとして Top Trading Cycles（TTC）メカニズム [Shapley 74] が存在する．TTC メカニズムは同一財が複数存在しないモデルにおいて動作するが，本論文で扱う問題では同一学校内の複数のシートが存在するため，TTC メカニズムは適用することができない．また，学校は初期保有学生の人数以上の学生を受け入れるためのシートである**余剰シート**を持つ可能性がある．そこで文献 [Kurata 16] は余剰シートの問題を解決し，パレート効率性を満たすメカニズムである Top Trading Cycles among Representatives with Supplementary Seats（TTCR-SS）を提案した．このメカニズムは下限制約を満たしつつ余剰シートを制御するために，ダミー学生というアイデアを用いている．

TTCR-SS は **master list（ML）**と呼ばれる学生間の厳密な優先順序 $\succ_{ML}$ を用いる．$\succ_{ML}$ は一般性を失うことなく以下のように定義される: $s_1 \succ_{ML} s_2 \succ_{ML} \ldots. \succ_{ML} s_n$．また，TTCR-SS はラウンドを複数回繰り返すことで動作する．ラウンド k において，Y^{k-1} は現在残っている初期保有の契約の集合を，Z は既に決定した契約の集合を示す．さらに，ラウンド k での各学校 c の状態を以下の 4 つのカテゴリーに分類する．

min: $|Y_c^{k-1}| > 0$ かつ $|Z_c| + |Y_c^{k-1}| = p_c$ である状態．すなわち，c は初期保有の契約が残っており，既に決定した契約と残っている初期保有の契約の総和が下限と等しい．ゆえに，下限制約を満たすために，c に残っている初期保有学生を別の学校の余剰シートに割り当てられない．

dec: $|Y_c^{k-1}| > 0$ かつ $|Z_c| + |Y_c^{k-1}| > p_c$ である状態．すなわち，c は初期保有の契約が残っており，c に残っている初期保有学生を別の学校の余剰シートに割り当てることができる．

max: $|Y_c^{k-1}| = 0$ かつ $|Z_c| = q_c$ である状態．すなわち，c は初期保有の契約が残っておらず，既に決定した契約により学生数が上限に達している．

inc: $|Y_c^{k-1}| = 0$ かつ $|Z_c| < q_c$ である状態．すなわち，c は初期保有の契約が残っておらず，上限制約に違反することなく他の学校の学生を受け入れることができる．

ラウンド k で各カテゴリー min，dec，max，inc に属する学校の集合を，$C^k_{\min}$，C^k_{dec}，$C^k_{\max}$，C^k_{inc} で表す．TTCR-SS はメカニズム 1 で定義される．

メカニズム 1 Top Trading Cycles among Representatives with Supplementary Seats (TTCR-SS)

初期値 $Y^0 = X^*, Z = \emptyset, k = 1$

ラウンド k

ステップ 1 以下のように有向グラフ $G^k = (V^k, E^k)$ を構築する:

- V^k は各学校から選ばれた契約の集合である．詳細には，$C^k_{\min} \cup C^k_{\mathrm{dec}}$ に含まれる各学校 c において，Y_c^{k-1} の中で ML で最も優先度の高い学生 s に関わる契約 (s,c) を選ぶ．また，C^k_{inc} に含まれる各学校 c において，$C^k_{\mathrm{dec}} \neq \emptyset$ である限り，ダミー学生 s_d に関わる契約 (s_d, c) を選ぶ．
- E^k は契約間の有向エッジの集合である．c' が V^k に含まれる学校の中で $\succ_s$ で最も好まれる学校ならば，有向エッジ $((s,c),(s',c')) \in E^k$ が存在する．また，ダミー学生に関わる各契約 (s_d, c) において，V^k の中で ML で最も優先度の高い学生 s と C^k_{dec} に含まれる学校 c' に対して，有向エッジ $((s_d,c),(s,c')) \in E^k$ が存在する．

ステップ 2 $\mathscr{C}^k$ を G^k に含まれるサイクル内の契約の集合とする．

ステップ 3 $\mathscr{C}^k$ 内の各契約 (s,c) において，$((s,c),(s',c'))$ を (s,c) からの有向エッジとし，s がダミー学生でないならば Z へ (s,c') を加え，$Y^k \leftarrow Y^{k-1} \setminus \mathscr{C}^k$ とする．

ステップ 4 もし $Y^k = \emptyset$ ならば，Z を出力する．異なる場合，$k \leftarrow k+1$ とし次のラウンドに進む．

TTCR-SS では学校 c が初期保有学生を出し尽くした状態（すなわち $Y_c^{k-1} = \emptyset$）であっても，余剰シートが残っている（すなわち $|Z_c| < q_c$）限り，学校は inc に属し，ダミー学生を選択する．ダミー学生が c のシートを得ることは，学校 c の割当人数が 1 人減ることを意味する．c が min に属する場合，c はダミー学生を受け入れることはできない．ゆえに，ダミー学生が選ぶ契約は，初期保有学校が dec に属する学校に関する学生の中で，最も優先度の高い学生となる．

4. 集団的耐戦略性，コア

本章では，TTCR-SS が集団的耐戦略性を満たすメカニズムであることを示す．加えて，TTCR-SS により出力されるマッチングはコアに属することを示す．

定義 4 (集団的耐戦略性) 学生の集合 $T \subseteq S$ の異なる選好順序 $\succ_T, \succ'_T$ に関する市場 $\pi = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, (\succ_T, \succ_{-T}))$ と $\pi' = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, (\succ'_T, \succ_{-T}))$ について考える．メカニズム ϕ について $\forall s \in T, \phi_s[\pi'] \succeq_s \phi_s[\pi]$，かつ，$\exists s \in T, \phi_s[\pi'] \succ_s \phi_s[\pi]$ となる $T \subseteq S$ 及び $\succ'_T$ が存在しないならば，ϕ は**集団的耐戦略性**を満たすという．

集団的耐戦略性を満たすメカニズムにおいては，どの学生の集合が選好を操作しても，その集合に含まれる学生の割当が良くなることはない．つまり，学生の集団が共謀して嘘の選好を申告する誘因を持たない．耐戦略性はどの学生も選好を偽って申告する誘因を持たないということを保証する性質であるため，集団的耐戦略性は耐戦略性を強めた性質といえる．

定義 5 (コア安定性) マッチング X' がコアに属するとは，$\forall c \in C, \left|\{(s,c) \in X'' \mid s \in T\}\right| = \left|\{(s,c) \in X^* \mid s \in T\}\right|$，かつ，$\forall s \in T, X''_s \succ_s X'_s$ を満たす $X'' \subseteq X$ および $T \subseteq S$ が存在しないことをいう．メカニズムが常にコアに属するマッチングを出力する場合，そのメカニズムは**コア安定性**を満たすという．

コア安定性はある集団の割当結果が，その集団が初期保有財を交換することにより達成できる割当より悪くなることがないことを保証する性質である．一方，個人合理性は個人の割当結果が初期保有財より悪くなることはないことを保証する性質であるため，コア安定性は個人合理性を強めた性質といえる．

定理 1 TTCR-SS は集団的耐戦略性とコア安定性を満たす．

定理 1 の証明は紙幅の都合上割愛するが，集団的耐戦略性の証明の流れは次の通りである．文献 [Pápai 00] で，耐戦略性と非介入性と呼ばれる性質を満たすことは集団的耐戦略性を満たすことと同値であると示されている．ゆえに本研究では TTCR-SS が非介入性を満たすことを示し，結果として集団的耐戦略性を満たすことを示した．

5. TTCR-SS の特徴付け

本章では 4 つの性質を提案し，TTCR-SS がそれらを満たすことを示す．また，それらに個人合理性，耐戦略性，パレート効率性を加えた 7 つの性質を満たすメカニズムは TTCR-SS に限定されることを示す．本章ではメカニズムは市場と ML が与えられたときにマッチングを返す関数とする．市場 $\pi = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, \succ_S)$ において ML $\succ_{ML}$ を用いたときにメカニズム ψ が出力するマッチングを $\psi[\pi, \succ_{ML}]$ と表す．$\psi_s[\pi, \succ_{ML}]$ を $\{(s, c) \in \psi[\pi, \succ_{ML}] \mid c \in C\}$ とする．また，$\tilde{S} = \{s \in S \mid p_{\omega(s)} < \left|X^*_{\omega(s)}\right|\}$ と置く．

定義 6 (最優先学生) 学校 $c \in C$ の**最優先学生** $t_c^{\succ_{ML}}(\pi) \in S \cup \{s_\emptyset\}$ とは，$\omega^{-1}(c) \neq \emptyset$ のとき $\forall s' \in \omega^{-1}(c) \setminus \{s\}, s \succ_{ML} s'$ となる $s \in \omega^{-1}(c)$ を示し，$\omega^{-1}(c) = \emptyset$ かつ $\tilde{S} \neq \emptyset$ のとき $\forall s' \in \tilde{S} \setminus \{s\}, s \succ_{ML} s'$ となる $s \in \tilde{S}$ を示し，それ以外のとき $s_\emptyset$ を示す．$s_\emptyset$ は最優先学生が存在しないことを意味する．

つまり $t_c^{\succ_{ML}}(\pi)$ は c が初期保有学生を持つ場合，c の初期保有学生の中で ML で最も優先度の高い学生を指し，c が初期保有学生を持たない場合，$\tilde{S}$ に含まれる学生の中で ML で最も優先度の高い学生を指す．しかし全ての学校において初期保有学生の人数と下限が等しい場合，初期保有学生を持たない学校の最優先学生は存在しない．

また，$s \in S$ を最優先学生に持つ学校の集合 $t_s^{\succ_{ML}}(\pi) \subseteq C$ は，$t_s^{\succ_{ML}}(\pi) = \{c \in C \mid t_c^{\succ_{ML}}(\pi) = s\}$ で定義される．

$\pi = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, \succ_S)$ とあるマッチング X' と任意の $T \subseteq S$ について，**T を X' の下で π から除いた市場** $\pi|_{-T,X'}$ を，$\pi|_{-T,X'} = (S \setminus T, C, X^{-T}, q_C|_{-T,X'}, p_C|_{-T,X'}, \omega^{-T}, \succ_{S \setminus T})$ で与える．ここで使用した記号は以下で定義される．$X^{-T} = (S \setminus T) \times C$ であり，$q_C|_{-T,X'} = (0, q_c - |\{s \in T \mid X'_s = \{(s,c)\}\}|)_{c \in C}$，$p_C|_{-T,X'} = (\max\{p_c - |\{s \in T \mid X'_s = \{(s,c)\}\}|\})_{c \in C}$ である．さらに $\omega^{-T} : S \setminus T \to C$ は ω を $S \setminus T$ に関して制限した関数である．すなわち，$\pi|_{-T,X'}$ は市場 π から学生の集合 T を除き，さらに，X' において T が割り当てられるシートを削除した市場である．

$\succ_{ML}$ を $S \setminus T$ に関して制限したものを $\succ_{ML}^{-T}$ として与える．

定義 7 (初期保有学生に関する単調性) 任意の市場 $\pi = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, \succ_S)$ と $\succ_{ML}$ において，$t_{\omega(s)}^{\succ_{ML}}(\pi) = s$ となる任意の $s \in S, c \in C$ を考える．任意の $T \subseteq \omega^{-1}(c) \setminus \{s\}$ を X^* の下で π から除いた市場 $\pi|_{-T,X^*}$ に対して，$\psi_s[\pi, \succ_{ML}] = \psi_s[\pi|_{-T,X^*}, \succ_{ML}^{-T}]$ が成立するならば，メカニズム ψ は**初期保有学生に関する単調性**を満たすという．

この性質は，ある学生が自身の初期保有学校の最優先学生であるなら，その学校を初期保有する他の学生がメカニズムに参加しなくともその学生の割当は変わらないということを示す．

定義 8 (学校のシート数に関する単調性) 任意の市場 $\pi = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, \succ_S)$ と $\succ_{ML}$ において，$c \in t_s^{\succ_{ML}}(\pi)$ を満たす任意の $s \in S, c \in C$ について考える．c の上限を $q'_c > q_c$ に増加させたという点のみで π と異なる市場 π' において，$\psi_s[\pi, \succ_{ML}] \succeq_s \psi_s[\pi', \succ_{ML}]$ を満たすならば，メカニズム ψ は**学校のシート数に関する単調性**を満たすという．

この性質は，ある学校の割当可能なシート数が増えた場合，その学校の最優先学生の割当は悪くなることはないことを示す．

定義 9 (相思相愛性) 任意の市場 $\pi = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, \succ_S)$ と $\succ_{ML}$ において，$\forall c' \in C \setminus \{c\}, c \succ_s c'$ かつ $c \in t_s^{\succ_{ML}}(\pi)$ を満たす任意の $s \in S, c \in C$ を考える．このとき $\psi_s[\pi, \succ_{ML}] = \{(s, c)\}$ となるならば，メカニズム ψ は**相思相愛性**を満たすという．

この性質は，学生と学校が互いに最も優先度が高いと考えているなら，その学生はその学校に割り当てられることを示す．

定義 10 (弱整合性) 任意の市場 $\pi = (S, C, X, q_C, p_C, \omega, \succ_S)$ と $\succ_{ML}$ とあるメカニズム ψ において, $\forall s \in T, t_s^{\succ_{ML}}(\pi) \cap \{c \in C \mid \forall s' \in T, \psi_{s'}[\pi, \succ_{ML}] = \{(s', c)\}\} \neq \emptyset$ を満たす任意の $T \subset S$ を考える．T を $\psi[\pi, \succ_{ML}]$ の下で π から除いた市場 $\pi|_{-T,\psi[\pi,\succ_{ML}]}$ に対して，$\forall s \in S \setminus T$, $\psi_s[\pi, \succ_{ML}] = \psi_s[\pi|_{-T,\psi[\pi,\succ_{ML}]}, \succ_{ML}^{-T}]$ が成立するならば，メカニズム ψ は**弱整合性**を満たすという．

この性質は最優先学生の集合とその割当をメカニズムから除いても，残りの学生の割当は影響を受けないことを示す．

定理 2 TTCR-SS は初期保有学生に関する単調性，学校のシート数に関する単調性，相思相愛性，弱整合性を満たす．

紙幅の都合上，定理 2 の証明は割愛する．次に本論文の主要な貢献である，TTCR-SS を特徴付ける定理を示す．

定理 3 TTCR-SS は個人合理性，耐戦略性，パレート効率性，初期保有学生に関する単調性，学校のシート数に関する単調性，相思相愛性，弱整合性を同時に満たす唯一のメカニズムである．

証明の概略 文献 [Kurata 16] と定理 2 より，TTCR-SS が定理 3 の 7 性質を満たすことが導かれる．定理 3 を得るためには，7 性質を満たすあるメカニズム φ の出力と TTCR-SS の出力が一致することをさらに示す必要がある．以下，ある市場 π と ML において φ が TTCR-SS と異なるマッチングを出力すると仮定し，矛盾を導くまでのアイデアを示す．

もし TTCR-SS のラウンド 1 で決定される割当が φ においても割り当てられるならその割当を市場から取り除いても**弱整合性**より残りの学生の割当には影響しない．その取り除かれた市場において TTCR-SS がラウンド 1 で決定する割当においても同様の議論ができるため，TTCR-SS のラウンド 1 で決定されるある s^1 の割当が φ において異なる市場 π を考えれば十分である．

s^1 を含むサイクルによって，k 人の学生の割当が決まったとする．ラウンド 1 でのサイクルであるため，割当の決まった k 校のそれぞれの最優先学生がサイクルに含まれている．ここで，$\{s^1, \ldots, s^k\}$ と $\{c^1, \ldots, c^k\}$ を，「c^t の最優先学生は s^t」かつ「s^t は c^{t-1} に TTCR-SS で割り当てられた」として順序付ける（$1 \leq t \leq k, 1 - 1 = k$）．

まず，$k = 1$ の場合を考える．すなわち TTCR-SS によって s^1 が c^1 に割り当てられたとすると，c^1 は s^1 が最も好む学校であるため φ の**相思相愛性**に矛盾する．よって $k > 1$ とする．

この市場 π から，$q_{c^1} = 1$ かつ s^1 の選好が異なる π^1 を以下の手順で構築する．(i) $c^1 = \omega(s^1)$ の場合は，$c^k \succ'_{s^1} c^1$ で s^1 の選好を置き換える．この市場では，TTCR-SS では s^1 を含む全く同じサイクルが形成され，φ では s^1 は**個人合理性**，**耐戦略性**，**相思相愛性**より c^1 に割り当てられる（$\omega(s^1) \neq c^1$ の場合は，$c' \succ'_{s^1} c^1 \succ'_{s^1} \omega(s^1)$ で s^1 の選好を置き換えることにより同様の結論を得る）．(ii) 次に，(i) からさらに $\omega^{-1}(c^1) \setminus \{s^1\}$ を X^* の下で除く．この市場でも，TTCR-SS では s^1 を含む全く同じサイクルが形成され，φ では s^1 は**初期保有学生に関する単調性**より c^1 に割り当てられる（$\omega(s^1) \neq c^1$ の場合は $\omega^{-1}(c^1) = \emptyset$ であり，この工程は不要）．(iii) 最後に，(ii) から $q_{c^1} = 1$ にした市場を π^1 とする．この市場でも，TTCR-SS では s^1 を含む全く同じサイクルが形成され，φ では s^1 は**学校のシート数に関する単調性**より c^1 に割り当てられる．

c^1 の唯一のシートが s^1 に割り当てられるため，s^2 の市場 π^1 における φ での割当は TTCR-SS での割当と異なる．ここで，先程と同様の議論を用いて，π^1 から，$q_{c^2} = 1$ かつ s^2 の選好が異なる市場 π^2 を考えると，TTCR-SS では s^1 を含む全く同じサイクルが形成される一方で，φ では s^2 は c^2 に割り当てられるように構築することができる．

π^2 から π^3，π^3 から π^4 と同様の議論を繰り返すことによって，TTCR-SS では全ての t において s^t は c^{t-1} に，φ では s^k が c^k に割り当てられる市場 π^k が定義できる．ここで s^1 の割当を考えると，s^1 の選好は $c^k \succ'_{s^1} c^1$ であり，c^k の唯一のシートが s^k に割り当てられるため，s^1 の市場 π^k における φ での割当は**個人合理性**，**耐戦略性**，**相思相愛性**より c^1 となる．同様の議論を繰り返すことにより，π^k において φ では全ての t で s^t は c^t に割り当てられる．π^k においても，φ の割当はパレート効率的であるはずである．しかし，学生 s^t は π^k において c^t よりも c^{t-1} を厳密に好んでいるため，φ の割当から $\{s^1, \ldots, s^k\}$ の割当を TTCR-SS でのものに交換した割当にパレート支配されるため，**パレート効率性**に反し矛盾である．□

6. 結論

本論文では，下限制約と初期保有財が存在する問題を扱うメカニズムである TTCR-SS について理論的考察を行った．まず TTCR-SS が耐戦略性を強めた集団的耐戦略性と，個人合理性を強めたコア安定性を満たすことを示した．次に，初期保有学生に関する単調性，学校のシート数に関する単調性，相思相愛性，弱整合性を定義し，個人合理性，耐戦略性，パレート効率性を加えた 7 性質によって TTCR-SS が特徴付けられることを示した．今後の研究課題としては，TTCR-SS が満たす性質の更なる解析が挙げられる．

謝辞

本研究は JSPS 基盤研究 (S) (24220003)，JST 国際科学技術共同研究推進事業 (戦略的国際共同研究プログラム) の助成を受けました．深く感謝致します．

参考文献

[Abdulkadiroğlu 03] Abdulkadiroğlu, A. and Sönmez, T.: School Choice: A Mechanism Design Approach, *American Economic Review*, Vol. 93, No. 3, pp. 729–747 (2003)

[Dur 13] Dur, U. M.: A Characterization of the Top Trading Cycles Mechanism for the School Choice Problem, *mimeo* (2013)

[Kurata 16] Kurata, R., Hamada, N., Hsu, C., Suzuki, T., Ueda, S., and Yokoo, M.: Pareto Efficient Strategy-proof School Choice Mechanism with Minimum Quotas and Initial Endowments, in *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Autonomous Agents & Multi-agent Systems*, pp. 59–67 (2016)

[Pápai 00] Pápai, S.: Strategyproof assignment by hierarchical exchange, *Econometrica*, Vol. 68, No. 6, pp. 1403–1433 (2000)

[Shapley 74] Shapley, L. and Scarf, H.: On cores and indivisibility, *Journal of mathematical economics*, Vol. 1, No. 1, pp. 23–37 (1974)