

完全二部グラフ構造上での爆発的同期転移の解析

Analysis of explosive synchronization transition on a complete bipartite graph

長崎俊紀*¹ 徳田悟*¹ 根本幸児*² 岡田真人*¹
 Toshiki Nagasaki Satoru Tokuda Koji Nemoto Masato Okada

*¹ 東京大学 大学院新領域創成科学研究科
 Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

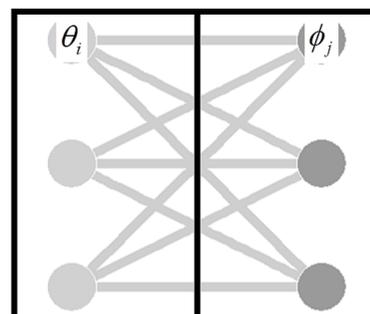
*² 北海道大学 大学院理学研究院物理学部門
 Department of Condensed Matter Physics Graduate School of Science, Hokkaido University

Continuous synchronization transitions have been discussed for oscillator models, especially the Kuramoto oscillator model. Recently, discontinuous synchronization transitions, called explosive synchronization transitions, have been discovered in several oscillator models and several networks. However, it is not clear which factors cause these phenomena. In this paper, we considered motions of the oscillators on a complete bipartite graph model to obtain the analytical stable solutions and behavior of the system. Furthermore, we carried out numerical simulations to confirm the analytical results. We studied these synchronization transitions from the aspects of both analytical methods and numerical simulations.

1. 序論

自律的に周期振動をする素子の運動をその位相により記述する力学系のことを位相振動子と言う。位相振動子の運動を記述する代表的なモデルに蔵本モデルがある [Y. Kuramoto 75]。このモデルでは、各振動子が自身の自然振動数による自律運動に加え、振動子間の相互作用を受けながら運動する。十分時間が経過したときに、これらの振動子が時間に依らず同じ位相差で運動することを周波数同期と言い、特に位相差 0 で運動する場合を位相同期と言う。本稿では、振動数同期のことを同期状態とする。相互作用の強さを表す結合強度を λ 、系の同期度を秩序変数を r で表す。系の定常解が非同期解のときは $r = 0$ であり、同期解のときは $r = 1$ をとる。 λ の増減に対して r の定常解が連続的に変化する転移を蔵本転移と呼ぶ [Y. Kuramoto 84]。 λ の増減に対して r の定常解が不連続的に変化する転移を爆発的同期転移と呼ぶ [J. Gómez-Gardeñes *et al.* 11]。特に、爆発的同期転移は λ の変化の方向性に応じて二つの過程に分けられる。 $r = 0$ の非同期解から出発し、 λ を増加させるフォワード過程では、ある臨界値 λ_c^f を境に不連続的に有限の引き込み解 $r > 0$ に転移する。 $r = 1$ の同期解から出発し、 λ を減少させるバックワード過程では、有限の引き込み解 $r > 0$ からフォワード過程とは別の臨界値 λ_c^b を境に不連続的に非同期解に転移する。 $\lambda_c^f < \lambda < \lambda_c^b$ は、同期解・非同期解ともに安定な双安定領域である [E. A. Martens *et al.* 09]。先行研究では、爆発的同期転移の要因は系のグラフ構造とダイナミクスの相関によると示唆されている [J. Gómez-Gardeñes *et al.* 11]。

本研究では、集団間の相互作用を考慮したもっとも簡単なグラフ構造である完全二部グラフモデルを用いて、爆発的同期転移の性質、要因を探る。特に、双峰形自然振動数分布を考え、先行研究の解析手法を参考に解析計算を行い、秩序変数の振る舞いを求める。また、シミュレーションも行い、その妥当性を検討する。



グループ1 グループ2
 ω_1, N ω_2, N

図 1: 完全二部グラフモデル。左のグループ 1 は自然振動数 ω_1 を持つ N 個の振動子から形成されており、右のグループ 2 は自然振動数 ω_2 を持つ N 個の振動する振動子から形成されている。グループ間にのみ相互作用が働く系である。

2. モデル

本稿では図 1 のモデルを対象にする。自然振動数 ω_1, ω_2 の振動子を N 個ずつ用意する。これらの振動子のうち、自然振動数が ω_1 の振動子をグループ 1、 ω_2 の振動子をグループ 2 にグループ分けをする。そして、異なるグループ間にのみ相互作用がある完全二部グラフモデルを考える。また、自然振動数分布はデルタ関数の和による双峰形な分布 $g(\omega) = [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega - \omega_2)]/2$ となる。このようなモデルを用いて、理論解析とシミュレーションの両面から解析を行い、系の振る舞いを調べる。なお、振動子は蔵本モデルに従って運動する。これ

連絡先: 岡田真人, okada@k.u-tokyo.ac.jp

を数式で表すと式 (1) のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_i}{dt} &= \omega_1 + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \theta_i) \\ \frac{d\phi_j}{dt} &= \omega_2 + \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\theta_i - \phi_j)\end{aligned}\quad (1)$$

ここで, θ_i, ϕ_j ($i, j = 1, \dots, N$) はグループ 1, 2 の振動子の位相, λ は結合強度である。また, 系の同期度を測る指標として次のような秩序変数 (オーダーパラメータ) を用いる [S. H. Strogatz 00].

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{2N} \left(\sum_{i=1}^N e^{i\theta_i} + \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} \right) \quad (2)$$

式 (2) は複素平面上で系全体での位相の重心を求めていると解釈できる。 r が原点からの距離であり, ψ は系全体の平均位相に相当する値である。式 (2) は振動子数 $2N$ で規格化されているため, 重心は, 単位円上, および, 円の内部に位置する。例えば, 振動子の位相が皆等しければ, 重心位置は単位円上に乗る, すなわち, $r = 1$ となる。一方, 位相が揃っておらず, 単位円上に一様に散らばっている場合は, $r = 0$ になる。よって, 定常状態において, この値 r が 0 に近いほど系は非同期状態であり, 1 に近いほど同期状態であることを示している。以降, この秩序変数を用いて, 系の同期度を議論することにする。

3. 結果

爆発的同期転移は, 初期状態が非同期状態のもとで, 相互作用を強めていくフォワード過程と, すべての振動子で初期位相がそろっている, すなわち初期状態が同期状態のもとで相互作用を弱めていくバックワード過程の 2 つの過程に分けることができる。以降では, それぞれの過程ごとに解析手法について述べる。

3.1 理論解析バックワード過程

まず, 比較的解析が容易なバックワード過程から考える。同期状態においては, 同じグループに属する振動子は同じ位相で運動すると考えられる。このことから, 同じグループの振動子は一体化して一つの振動子として捉えられると仮定する [Yong Zou *et al.* 14]. よって, 二体の蔵本振動子系と同様の解析を行えばよい。この仮定の下, 式 (1) の定常状態解析を行う。すなわち, $\theta_i(t) = \theta(t) = \theta_0, \phi_j(t) = \phi(t) = \phi_0$ (θ_0, ϕ_0 は時間に依らない定数) として, 式 (1) を解く。以下に, 一体化条件を課した式 (1) を示す。

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi - \theta) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_2 + \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\theta - \phi)\end{aligned}\quad (3)$$

式 (3) の差をとると, 次のようになる。

$$\frac{d}{dt}(\theta - \phi) = \omega_1 - \omega_2 + 2\lambda \sin(\phi - \theta) \quad (4)$$

$\Delta\theta \equiv \phi - \theta = \phi_0 - \theta_0 = \text{const.}$ という定常条件を課すと,

$$|2\lambda \sin \Delta\theta| = |\omega_1 - \omega_2| \leq 2\lambda \quad (5)$$

これより, 同期状態が保たれる最小の結合強度, すなわち, バックワード過程の転移点は

$$\lambda_c = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} \quad (6)$$

と求まる。また, 式 (2), (5) を連立すると, 秩序変数の振る舞いは, 以下のように求めることができる。

$$r = \sqrt{\frac{1 + \cos \Delta\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\lambda} \right)^2} \right\}} \quad (7)$$

特に, 臨界値 λ_c における秩序変数 r_c は 0 より大きくなる。

$$r_c = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \quad (8)$$

同期状態が保たれる最小の結合強度における秩序変数 r_c が 0 より大きいということは, 有限の引き込み解 $r > 0$ から $r = 0$ の非同期解へと不連続的な飛びがあることを示している。

3.2 理論解析フォワード過程

次に, フォワード過程を考える。振動子数が不変であることから, 時刻 t に自然振動数 ω_1 , 位相 θ を持つ, グループ 1 の振動子における位相分布 $f(\theta, \omega_1|t)$ に関する連続の式を用いることができる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f(\theta, \omega_1|t) + \frac{\partial}{\partial \theta} [f(\theta, \omega_1|t) v(\theta, \omega_1|t)] &= 0 \\ v(\theta, \omega_1|t) = \frac{d\theta_i}{dt} &= \omega_1 + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \theta_i)\end{aligned}\quad (9)$$

同様に自然振動数 ω_2 , 位相 ϕ を持つ, グループ 2 の振動子についても連続の式を用いることができる。ただし, 位相分布 f は規格化されているとする。規格化する前の f に自然振動数分布をかけて積分した値は, $N \rightarrow \infty$ の極限では, 系の振動子数を表している。

$$N = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\theta, \omega|t) g(\omega) \quad (10)$$

また, 式 (2) の系全体の同期度を表す秩序変数とは別に, 式 (1) のグループごとの同期度を表す局所的な秩序変数を考える。

$$\begin{aligned}r_1 e^{i\psi_1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i} \\ r_2 e^{i\psi_2} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}\end{aligned}\quad (11)$$

これを用いることで, 式 (1) を平均場表記することができる [J. Gómez-Gardeñes *et al.* 11]. ここでフォワード過程では初期状態として位相が複素平面上の円の上に一様に散らばっている $r = 0$ の完全非同期解を考える。すなわち, 位相分布 f は一様分布とみなせる。この完全非同期解に摂動を加えたときの安定性を考える。すなわち, 式 (9) における非同期相の線形安定性解析を考えることによってフォワード過程の転移点を求める [Xin Hu *et al.* 14]. 式 (9) に連続の式に次の f を代入する。

$$f(\theta, \omega|t) = g(\omega) \left(\frac{1}{2\pi} + \varepsilon \eta(\theta|\omega, t) \right) \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (12)$$

$\varepsilon\eta$ が摂動項である。なお、 f の規格化条件を満たすために、 η は、 θ に関する積分を取ると、0になるような関数とする。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \eta(\theta|\omega, t) d\theta = 0 \quad (13)$$

これを变形し、整理すると、次の式が得られる。

$$1 = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega}_1 \frac{g(\tilde{\omega}_1)}{\zeta + i\tilde{\omega}_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\omega}_2 \frac{g(\tilde{\omega}_2)}{\zeta + i\tilde{\omega}_2} \quad (14)$$

ここで、 $\eta(\theta|\omega, t) \propto e^{\zeta t}$, $\zeta = Re^{i\alpha}$; (α は実数) としたとき、次の関係式が得られる。

$$\lambda^2 = 4[R^2 \cos^2 \alpha - (R \sin \alpha + \omega_1)(R \sin \alpha + \omega_2)] + 4i[R \cos \alpha (2R \sin \alpha + \omega_1 + \omega_2)] \quad (15)$$

ここで、任意の α に対して、結合強度 λ は実数であるから、

$$R = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2 \sin \alpha} \quad (16)$$

さらに、摂動に対して安定であるのは、 $\eta \propto e^{\zeta t}$ より、 ζ の実部が $\text{Re}[\zeta] = R \cos \alpha = -(\omega_1 + \omega_2)/2 \tan \alpha < 0$ のときである。ゆえに、この範囲での結合強度は、次のようになる。

$$\lambda = 2\sqrt{R^2 \cos^2 \alpha - (R \sin \alpha + \omega_1)(R \sin \alpha + \omega_2)} > |\omega_1 - \omega_2| \quad (17)$$

したがって、フォワード過程の臨界結合強度は、

$$\lambda_c = |\omega_1 - \omega_2| \quad (18)$$

と求まる。また、オーダーパラメータの振る舞いは、完全非同期状態を仮定しているため、転移前では、 $r = 0$ となる。一方、バックワード過程の転移点は、 $\lambda_c = |\omega_1 - \omega_2|/2$ であったから、フォワード過程とバックワード過程の転移点が異なる。よって、初期条件によって安定状態が異なる双安定性が生じる領域が存在することが示唆される。フォワード過程における臨界結合強度 λ_c^f とバックワード過程の臨界結合強度 λ_c^b の差をとると、

$$\lambda_c^f - \lambda_c^b = |\omega_1 - \omega_2| - \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} = \delta\omega \quad (19)$$

となる。ここで、 $2\delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ である。ゆえに、この系では、集団間での自然振動数の差 $\delta\omega$ が大きいほど双安定な領域が広がる。

3.3 シミュレーションおよび理論解析との比較

これまで、各過程に対して理論的な解析を行った。そこで、これらの結果を、式 (1) をシミュレーションによって解いたときの結果と比較し、その妥当性を検討する。理論解析による結果とシミュレーションの結果を比較したのが図 2 である。それぞれ、実線が秩序変数の理論値、点線が転移点における理論値、円がフォワード過程のシミュレーション結果、ひし形がバックワード過程のシミュレーション結果を表している。横軸は振動子数で規格化した結合強度であり、縦軸は定常状態における、式 (2) で定義された秩序変数である。先行研究 [J. Gómez-Gardeñes *et al.* 11] に習い、フォワード過程では、 $\lambda_0 = 0$ から順に幅 $\delta\lambda$ で $\lambda_0, \lambda_1 = \lambda_0 + \delta\lambda, \dots, \lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n = \lambda_0 + n\delta\lambda$ まで順に結合強度を上げ

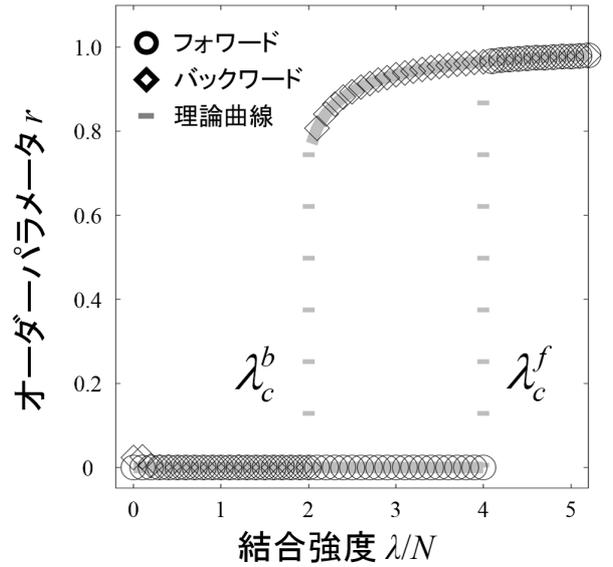


図 2: フォワード過程、バックワード過程の理論解析の結果、および、シミュレーション結果を重ねて表示している。フォワード過程は円、バックワード過程はひし形で表されている。理論曲線はオーダーパラメータの振る舞いが実線で表されており、転移点の位置が点線で表されている。どちらの過程に対しても理論解析の結果はシミュレーションと等しい挙動を表現できている。

ていき、それぞれの結合強度に対する秩序変数 r をプロットする。また、 λ_l における位相分布の終状態を λ_{l+1} での始状態として用いる。対称的にバックワード過程では、 $\lambda_n = \lambda_0 + n\delta\lambda$ から λ_0 まで順に結合強度を下げていき、 r をプロットする。 λ_{l+1} での終状態を λ_l での始状態として用いる。なお、パラメータは、 $N = 100, \delta\omega = 2$ で行った。 λ_c^f はフォワード過程における転移点、 λ_c^b はバックワード過程における転移点である。理論解析、シミュレーションいずれも各過程ごとに異なる臨界結合強度で転移を起している。よって、理論とシミュレーションの両面から完全二部グラフ構造上の同期現象では爆発的同期転移が生じることが確かめられた。次に、理論解析によって得られた理論曲線とシミュレーション結果を比較する。図 2 を見ると理論的に求めたフォワード、バックワード過程ともにシミュレーションと一致する挙動を示していることが確かめられた。これは、自然振動数分布の中心位置 ω_0 に依らず一致する挙動を示している。また、異なる $\delta\omega$ に対しても等しい挙動を示している。したがって、完全二部グラフモデルにおける系の振る舞いを解析的に求めることができた。

4. 結論

爆発的同期転移の要因を探るために、可解モデルである完全二部グラフモデルを用いて、爆発的同期転移の解析を行った。その結果、完全二部グラフモデル上でも爆発的同期転移が生じることが確かめられた。また、先行研究に基づき、フォワード過程、バックワード過程のそれぞれに対して解析的な振る舞いを求め、シミュレーション結果と一致する挙動を示すことができた。集団間の自然振動数差が大きいほど双安定状態が実現しやすいことが確かめられた。今回、自然振動数の割り振りは、

グループごとに固定されていた。そこで、今後は、その割り振りの比率を変化させることで完全グラフモデルと完全二部グラフモデルを一つのパラメータで表現することによって、爆発的同期転移の要因を探る。

参考文献

- [Y. Kuramoto 75] Y. Kuramoto. :In *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, volume 39 of *Lecture Notes in Physics*, page 420. Springer, New York, (1975).
- [Y. Kuramoto 84] Y. Kuramoto.: *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, Berlin, (1984).
- [E. A. Martens *et al.* 09] E. A. Martens, E. Barreto, S. H. Strogatz, E. Ott, P. So, and T. M. Antonsen: Exact results for the Kuramoto model with a bimodal frequency distributions, *Phys. Rev. E* **79**, 026204 (2009).
- [J. Gómez-Gardeñes *et al.* 11] Jesús Gómez-Gardeñes, Sergio Gómez, Alex Arenas, and Yamir Moreno: Explosive Synchronization Transition in Scale-Free Networks, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 128701 (2011).
- [Xin Hu *et al.* 14] Xin Hu, S. Boccaletti, Wenwen Huang, Xiyun Zhang, Zonghua Liu, Shuguang Guan, and Choy-Heng Lai: Exact solution for first-order synchronization transition in a generalized Kuramoto model *Sci. Rep.* 07262 (2014).
- [Yong Zou *et al.* 14] Yong Zou, Tiago Pereira, Michael Small, Zonghua Liu, and Jürgen Kurths : Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 114102 (2014).
- [S. H. Strogatz 00] Steven H. Strogatz: From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, *Physica D* 143 1-20 (2000).